数理解析研究所講究録
1173 巻 2000 年 217-242

ARTHUR の予想について

平賀 郁

1. Introduction

この概説では主に J. Arthur [4],[5] に述べられている予想について解説を行う. 最初に、知られている実例を幾つか挙げることにする.

• 例 1. (E. Hecke [14, §13])
p を $p \equiv 3 \mod 4$ をみたす奇素数とする. また、

$$\Gamma(p) = \{\gamma \in SL_2(\mathbb{Z}) \mid \gamma \equiv 1_2 \mod p\},$$

とする. いま、$k > 2$ を奇数とし、$S_k(\Gamma(p))$ で、weight k の正則な cusp form 全体のなす空間をあらわすことにする. また、$\mathbb{F}_p$ を有限体とし、$SL_2(\mathbb{F}_p) \cong SL_2(\mathbb{Z})/\Gamma(p)$ を $S_k(\Gamma(p))$ へ自然に作用させる. ここで、$SL_2(\mathbb{F}_p)$ の表現 π_+ と π_- を以下のように定める. まず、$SL_2(\mathbb{F}_p)$ の Borel subgroup $B = TN$ を次のようにとる.

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{F}_p) \right\},$$

$$T = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{F}_p) \right\},$$

$$N = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{F}_p) \right\}.$$

いま、χ を $\mathbb{F}_p^\times/(\mathbb{F}_p^\times)^2$ の自明でない 1 次元 character とし、B の 1 次元 character

$$B \ni \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \longrightarrow \chi(a),$$

も同じ χ であらわすことにする. また、$\mathbb{F}_p$ の加法群の 1 次元 character φ を $\varphi(1) = \exp(2\pi\sqrt{-1}/p)$ により定め、

$$N \ni \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \varphi(b),$$

により N の 1 次元 character とみなす. このとき、誘導表現 $\mathrm{Ind}_B^G(\chi)$ は二つの既約表現 π, π' の直和に分解し、$\mathrm{Ind}_N^G(\varphi)$ の直和因子にでてくるのは片方のみである. $\mathrm{Ind}_N^G(\varphi)$ の直和因子 にあらわれる方を π_+ とし、もう一方を π_- とする.

Theorem . $S_k(\Gamma(p))$ での $SL_2(\mathbb{F}_p)$ の表現 π_+ （*resp.* π_-）の *multiplicity* を m_+ （*resp.* m_-）とするとき、次のことが成り立つ．

$$m_+ - m_- = h_{\mathbb{Q}(\sqrt{-p})}.$$

但し、$h_{\mathbb{Q}(\sqrt{-p})}$ は $\mathbb{Q}(\sqrt{-p})$ の類数である．（[41] 参照.）

• 例 2．（Labesse–Langlands [26]）
$G = SL_2$ とその inner form のときに、endoscopic lift、multiplicity formula を扱っている．例 1．はこの場合の特別な例である．現在のところ、weak multiplicity 1 は完全には示されていないようである．

• 例 3．（Rogawski [33],[34]）
$G = U(3)$ のときに、endoscopic lift、multiplicity formula を扱っている．例 2．と同様に trace formula を stabilize している．

• 例 4． Saito–Kurokawa lift
PGL_2 から $PGSp_2$ への lift. J. Arthur [3] に例として挙げられている non-tempered packet の実例．但し、表現の distribution character の関係は、non-archimedean local field については示されていない．
（[32],[12],[3] 参照）

• 例 5． Duke–Imamoglu–Ibukiyama–Ikeda lift
PGL_2 から Sp_{2n} への lift. $L_{\mathbb{Q}}$ を hypothetical Langlands group とする．いま、

$$k \equiv n \mod 2,$$

とし、Langlands parameter

$$\phi : L_{\mathbb{Q}} \longrightarrow SL_2(\mathbb{C}) \times L_{\mathbb{Q}},$$

が $SL_2(\mathbb{Z})$ に関する weight k の正則な cusp form に対応しているとする．また、Sym_{2n-1} を $SL_2(\mathbb{C})$ の $2n$ 次の既約表現とする．$SL_2(\mathbb{C})$ と Sym_{2n-1} のどちらにも、非退化な不変交代形式が存在するので、$L_{\mathbb{Q}} \times SL_2(\mathbb{C})$ を定義域とする写像 $\phi \boxtimes Sym_{2n-1}$ は $SO_{4n}(\mathbb{C}) \times L_{\mathbb{Q}}$ に像をもつ．ここで、$SO_{4n}(\mathbb{C})$ の $SO_{4n+1}(\mathbb{C})$ への自然な埋め込みにより、次のような、$L_{\mathbb{Q}} \times SL_2(\mathbb{C})$ から $SO_{4n+1}(\mathbb{C}) \times L_{\mathbb{Q}} = {}^L Sp_{2n}$ への Arthur parameter ψ が得られる．

$$\begin{array}{ccccc}
L_{\mathbb{Q}} & \xrightarrow{\phi_k} & SL_2(\mathbb{C}) \times L_{\mathbb{Q}} & & \\
\times & & \times & \longrightarrow & SO_{4n}(\mathbb{C}) \times L_{\mathbb{Q}} \\
SL_2(\mathbb{C}) & \xrightarrow{Sym_{2n-1}} & Sp_{2n}(\mathbb{C}) & & \downarrow \\
 & & & & SO_{4n+1}(\mathbb{C}) \times L_{\mathbb{Q}} = {}^L Sp_{2n}
\end{array}$$

この Arthur parameter に対応するもののなかで、$Sp_{2n}(\mathbb{Z})$ に関する、weight $k+n$ の正則な Siegel cusp form となるものが、Duke–Imamoglu–Ibukiyama–Ikeda lift である.（[11] 参照. また、T. Ibukiyama も独立に Koecher–Maass series の形で存在を予想していた [15].）最近、T. Ikeda [17] により lift の存在が証明された. この Arthur parameter に対応した global packet に属する正則でない保型表現も Arthur conjecture により存在が予想されるが、正則でない場合は、現在、存在は証明されていない.（この Arthur parameter ψ に対応する local A-packet は実数体の場合 J. Adams–J. Johnson [2] で構成されている.）

また、endoscopy の理論は prehomogeneous vector space の場合に何らかの類似がある可能性がある.（[8, 特に、Kottwitz による preface], [16], [35] 参照.）

2. Local Langlands Parameter の復習

F を数体とし、F_v を F の素点 v に対応する局所体とする. また、G を F_v 上定義された connected reductive algebraic group とする. この論説では、twisted case は扱わない.（twisted case については、[4],[5],[24] 参照.）W_{F_v} を Weil group とし、L_{F_v} を次のように定める.

$$L_{F_v} = \begin{cases} W_{F_v}, & v\text{: archimedean}, \\ W_{F_v} \times SU_2(\mathbb{R}), & v\text{: non-archimedean}. \end{cases}$$

また、${}^LG = \hat{G} \rtimes L_{F_v}$ を L-group とする.

${}^LG_1$ から ${}^LG_2$ への準同型写像 $\phi : {}^LG_1 \longrightarrow {}^LG_2$ が下の図式を可換にするとき、ϕ は L_{F_v} 上の準同型写像であるという.

$$\begin{array}{ccc} {}^LG_1 & \xrightarrow{\phi} & {}^LG_2 \\ \downarrow & & \downarrow \\ L_{F_v} & = & L_{F_v} \end{array}$$

Definition 2.1. 写像 $\phi : L_{F_v} \longrightarrow {}^LG$ が L_{F_v} 上の準同型写像で、しかも、ϕ の像 $\phi(L_{F_v}) \subset {}^LG$ に含まれる元はすべて、その $\hat{G}$ 因子が *semisimple* であるとき、ϕ は *admissible* な準同型写像であるという.

ϕ^0 を ϕ に対応する L_{F_v} から $\hat{G}$ への写像とすると、上の条件は

$$\phi^0(L_{F_v}) \subset \{g \in \hat{G} | \, g \text{ は semisimple}\},$$

とかける.（ϕ^0 は L_{F_v} の $\hat{G}$ に値をもつ 1-cocyle となる.）L_{F_v}-stable な $\hat{G}$ の subgroup $\hat{P}$ が $\hat{G}$ の parabolic subgroup であるとき、${}^LP = \hat{P} \rtimes L_{F_v} \subset {}^LG$ を ${}^LG$ の parabolic subgroup という. $\mathcal{P}^* = \mathcal{P}^*({}^LG)$ を

${}^LG$ の parabolic subgroup 全体のなす集合とする．また、$\mathcal{P} = \mathcal{P}({}^LG)$ を $\mathcal{P}^*({}^LG)$ のなかで、G の F_v 上定義された parabolic subgroup に対応するもの全体のなす $\mathcal{P}^*$ の部分集合とする．

Definition 2.2. *Admissible* な準同型写像 ϕ が、全ての ${}^LP \in \mathcal{P}^* - \mathcal{P}$ に対し、条件 $\phi(L_{F_v}) \not\subset {}^LP$ をみたすとき、ϕ は *relevant* であるという．

Local Langlands parameter 全体の集合 $\Phi(G)$ を

$$\Phi = \Phi(G),$$
$$= \{\phi : L_{F_v} \longrightarrow {}^LG | \ \phi \text{ は admissible かつ relevant } \}/\operatorname{Ad}(\hat{G}),$$

により定義する．また、混乱が起きない場合、準同型写像 ϕ と対応する Φ の元を同一視することにする．

Definition 2.3. 三つ組み $(\hat{B}, \hat{T}, \{X_{\check{\alpha}}\}_{\check{\alpha}\in\check{\Delta}})$ が次の条件をみたすとき、$\hat{G}$ の *splitting* と呼ぶ．

1. $\hat{B}$ は $\hat{G}$ の *Borel subgroup.*
2. $\hat{T}$ は $\hat{B}$ の *maximal torus.*
3. $\check{\Delta}$ を $(\hat{B}, \hat{T})$ に対応する *simple root* 全体のなす集合.
4. $X_{\check{\alpha}} \neq 1$ は $\check{\alpha} \in \check{\Delta}$ に対応する *one parameter subgroup* の元.

Remark 2.4. 構成方法から明らかなように、$\hat{G}$ には、L_{F_v}*-stable* な *splitting* が存在している．いま、

$$1 \longrightarrow \hat{G} \longrightarrow \mathcal{G} \overset{\iota}{\underset{}{\leftrightarrows}} L_{F_v} \longrightarrow 1,$$

を *split exact sequence* とする．このとき、$\iota(L_{F_v})$*-stable* な $\hat{G}$ の *splitting* は必ずしも存在しない．しかし、G の、*z-extension* G'（定義は *Definition 2.5* を参照）で、準同型写像 $\hat{\jmath} : \hat{G} \to \hat{G}'$ が次の図式をみたす準同型写像 ${}^Lj : \mathcal{G} \to {}^LG'$ に延長されるものが存在する．(G' は一意的に決まるわけではない.)

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G} & \xrightarrow{{}^Lj} & {}^LG' \\ \downarrow & & \downarrow \\ L_{F_v} & = & L_{F_v} \end{array}$$

このとき、準同型写像 $\phi : L_{F_v} \longrightarrow \mathcal{G}$ は、

$${}^Lj \circ \phi : L_{F_v} \xrightarrow{\phi} \mathcal{G} \xrightarrow{{}^Lj} {}^LG',$$

により、L_{F_v} から ${}^LG'$ への準同型写像とみなす．

Definition 2.5. G の *central extension* G'

$$1 \longrightarrow Z \longrightarrow G' \xrightarrow{j} G \longrightarrow 1,$$

が、次の条件をみたすとき、G' は G の *z-extension* と呼ぶ.

1. Z は *induced torus.*
2. G' は *connected center.*
3. G' の *semisimple part* G'_{der} は *simply-connected.*

Conjecture 2.6. F の *additive character* φ を固定しておく. $\Pi = \Pi(G)$ を $G(F_v)$ の既約許容表現の "同値類 "全体のなす集合とする. 各 $\phi \in \Phi$ に対し、*L-packet* $\Pi_\phi = \Pi_\phi(G)$ が存在し、次のことが成り立つ.

1. Π_ϕ は $\Pi(G)$ の有限な部分集合.
2. $\Pi(G)$ は Π_ϕ の *disjoint union* である.
$$\Pi(G) = \coprod_{\phi\in\Phi} \Pi_\phi.$$
3. $\pi \in \Pi_\phi$ と、${}^LG$ の表現 $r : {}^LG \longrightarrow GL_m(\mathbb{C})$ に対し、*L-function* $L(s,\pi,r)$ と *ϵ-factor* $\epsilon(s,\pi,r,\varphi)$ が存在し、
$$L(s,\pi,r) = L(s, r\circ\phi),$$
$$\epsilon(s,\pi,r,\varphi) = \epsilon(s, r\circ\phi,\varphi),$$
が成り立つ.

3. SL_2 の Local L-Packet.

必ずしも Arthur 予想の必要のない場合ではあるが、endoscopy と L-packet の実例として、$G = SL_2$ の場合を述べる. また、この節の内容は、J.-P. Labesse–R. P. Langlands [26] による.

GL_2, SL_2 の L-group は、それぞれ

$${}^LGL_2 = GL_2(\mathbb{C}) \times L_{F_v},$$
$${}^LSL_2 = PGL_2(\mathbb{C}) \times L_{F_v},$$

なので、Langlands parameter $\tilde\phi \in \Phi(GL_2)$ に対し、$\tilde\phi^0$ を対応する $GL_2(\mathbb{C})$ への写像とすると、$\tilde\phi^0$ は $GL_2(\mathbb{C})$ への準同型写像となる. また、$\tilde\phi^0(SU_2(\mathbb{R})) = 1$ であるとき、W_{F_v} への制限も 同じ記号 $\tilde\phi^0$ で書くことにする. $\phi \in \Phi(SL_2)$ に対しても、同様に準同型写像 ϕ^0 を考える. いま $GL_2(F_v)$ の L-packet は全て 1 つの既約許容表現の "同値類 "により構成されている. 準同型写像

$$\iota : GL_2(\mathbb{C}) \longrightarrow PGL_2(\mathbb{C}),$$

により、写像

$$\iota_* : \Phi(GL_2) \longrightarrow \Phi(SL_2),$$

が得られる．ここで、$\tilde{\phi} \in \Phi(GL_2)$ に対し、$\phi = \iota_*(\tilde{\phi}) = \iota \circ \tilde{\phi} \in \Phi(SL_2)$ とおくことにする．$\Pi_{\tilde{\phi}}(GL_2) = \{\pi\}$ とすると、π の $SL_2(F_v)$ への制限 $\pi|_{SL_2}$ は multiplicity free で、その既約表現への分解を

$$\pi|_{SL_2} = \sigma_1 \oplus \sigma_2 \oplus \cdots \oplus \sigma_r,$$

（$\sigma_1, \ldots, \sigma_r$ は $SL_2(F_v)$ の既約表現）とするとき、$r = 1, 2, 4$ であることがわかる．このとき、対応する SL_2 の L-packet は、

$$\Pi_\phi(SL_2) = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_r\},$$

となる．

以下、F_v を non-archimedean local field とする．いま E_w を F_v の 2 次の拡大体とする．ここで、N_{E_w/F_v} を norm map とし、$E_w^1 = N_{E_w/F_v}^{-1}(1)$ とおく．いま、

$$\chi : W_{E_w} \longrightarrow E_w^\times \xrightarrow{\chi_0} \mathbb{C}^\times,$$

を W_{E_w} の 1 次元 character として、

$$\tilde{\phi}^0 = \mathrm{Ind}_{W_{E_w}}^{W_{F_v}}(\chi),$$

$$\phi^0 : W_{F_v} \xrightarrow{\tilde{\phi}^0} GL_2(\mathbb{C}) \longrightarrow PGL_2(\mathbb{C}),$$

とする．また、$\tilde{\phi}^0, \phi^0$ は $SU_2(\mathbb{R})$ を単位元にうつすとする．よって、Langlands parameter $\tilde{\phi} \in \Phi(GL_2)$, $\phi \in \Phi(SL_2)$ が得られる．この節では、以上のようにして構成された $\tilde{\phi} \in \Phi(GL_2)$ を (E_w, χ) からの lift と呼ぶことにする．$GL_2(F_v)$ の部分群 G_{E_w} を

$$G_{E_w} = \{g \in GL_2(F_v) |\ \det g \in N_{E_w/F_v}(E_w^\times)\},$$

により定める．π を $\tilde{\phi}$ に対応する $GL_2(F_v)$ の既約許容表現とすると、π の G_{E_w} への制限は、同値でない 2 つの既約表現の直和に分解する．

$$\pi|_{G_{E_w}} = \tilde{\sigma} \oplus \tilde{\sigma}'.$$

Langlands parameter $\tilde{\phi}$ に対して、次の 3 つの場合を考える．

•Case 1.

2 つの相異なる F_v の 2 次の拡大体 E_1, E_2 と W_{E_1}（resp. W_{E_2}）の 1 次元 character χ_1（resp. χ_2）が存在し、$\tilde{\phi}$ が (E_1, χ_1) の lift であり、しかも (E_2, χ_2) の lift でもある場合．

このとき、χ_1^0 を、χ_1 に対応する $E_1^\times$ の 1 次元 character とすると、$\chi_1^0|_{E_1^1}$ は $(\chi_1^0|_{E_1^1})^2 = 1_{E_1^1}$ をみたす non-trivial な 1 次元 character となる．いま、$\Pi_{\tilde{\phi}}(GL_2) = \{\pi\}$ とすると、$\pi|_{SL_2}$ は、同値でない 4 つの既約表現の直和に分解する．

$$\pi|_{SL_2} = \sigma_1 \oplus \sigma_2 \oplus \sigma_3 \oplus \sigma_4.$$

また、

$$\pi|_{G_{E_1}} = \tilde{\sigma_1} \oplus \tilde{\sigma_1}',$$
$$\pi|_{G_{E_2}} = \tilde{\sigma_2} \oplus \tilde{\sigma_2}',$$

とするとき、それぞれが、

$$\tilde{\sigma_1}|_{SL_2} = \sigma_1 \oplus \sigma_2, \qquad \tilde{\sigma_1}'|_{SL_2} = \sigma_3 \oplus \sigma_4,$$
$$\tilde{\sigma_2}|_{SL_2} = \sigma_1 \oplus \sigma_3, \qquad \tilde{\sigma_2}'|_{SL_2} = \sigma_2 \oplus \sigma_4,$$

と分解している. この場合の SL_2 の L-packet は

$$\Pi_\phi = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4\},$$

である.

•Case 2.
ある F_v の 2 次の拡大体 E_w と W_{E_w} の 1 次元 character χ が存在し、$\tilde{\phi}$ が (E_w, χ) の lift となっており、しかも Case 1 ではない場合.

この場合、$\chi^0|_{E_w^1}$ は trivial であるか（このとき、π は principal series）、$(\chi^0|_{E_w^1})^2 \neq 1_{E_w^1}$ である（このとき、π は supercuspidal）. いま、

$$\pi|_{G_{E_w}} = \tilde{\sigma} \oplus \tilde{\sigma}',$$

とすると、$\sigma = \tilde{\sigma}|_{SL_2}$ も $\sigma' = \tilde{\sigma}'|_{SL_2}$ も既約表現であり、

$$\pi|_{SL_2} = \sigma \oplus \sigma'.$$

よって、ϕ に対応する L-packet は

$$\Pi_\phi = \{\sigma, \sigma'\},$$

となる.

•Case 3.
Case 1 でも Case 2 でもない場合.

このとき、$\sigma = \pi|_{SL_2}$ は既約で、対応する L-packet は

$$\Pi_\phi = \{\sigma\},$$

となる. $\phi|_{SU_2(\mathbb{R})} \neq 1$ ならば、σ は Steinberg 表現である. F_v の剰余標数が 2 でなく、しかも $\phi|_{SU_2(\mathbb{R})} = 1$ ならば、σ は既約な principal series か trivial 表現である. F_v の剰余標数が 2 で、しかも $\phi|_{SU_2(\mathbb{R})} = 1$ ならば、σ は既約な principal series か trivial 表現、または supercuspidal 表現になる.

次に、Case.1 の場合をもう少し詳しくみてみる．この場合、$E_0 = E_1E_2$ とおくと、

$$\mathrm{Gal}(E_0/F_v) = \{1,\, \tau_1,\, \tau_2,\, \tau_3 = \tau_1\tau_2\} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z},$$

となっている．但し、

$$\mathrm{Gal}(E_0/E_1) = \{1, \tau_1\}, \quad \mathrm{Gal}(E_0/E_2) = \{1, \tau_2\},$$

である．ここで、$\{1, \tau_3\}$ に対応する F_v の 2 次の拡大体を E_3 とおく．また、$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{C})$ の $PGL_2(\mathbb{C})$ での像を $\overline{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}}$ であらわすことにする．

$$s_1 = \overline{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}, \qquad s_2 = \overline{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}},$$

とする．いま、

$$\mathrm{Im}(\phi^0) = \langle s_1, s_2 \rangle,$$

$$\phi^0(\tau_1 \cdot W_{E_0}) = s_1,$$
$$\phi^0(\tau_2 \cdot W_{E_0}) = s_2,$$

と仮定する．ここで、ϕ の $\hat{G} = PGL_2(\mathbb{C})$ での centralizer を

$$\mathcal{S}_\phi = Z_{\hat{G}}(\phi(L_{F_v})),$$

とすると、

$$\mathcal{S}_\phi = \langle s_1, s_2 \rangle,$$

である．また、$s \in \mathcal{S}_\phi$ に対し、$\hat{G} = PGL_2(\mathbb{C})$ での centralizer を $\hat{G}_s = Z_{\hat{G}}(s)$、$\hat{G}_s$ の単位元を含む連結成分を $\hat{G}_s^0$ とかくことにする．

$$\hat{G}_{s_1}^0 = \left\{ \overline{\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}} \,\middle|\, x, y \in \mathbb{C}^\times \right\},$$

なので、T_{s_1} を $\mathrm{Res}_{E_1/F_v}\mathbb{G}_m$ の部分群 $N_{E_1/F_v}^{-1}(1)$ とすると、

$$\hat{G}_{s_1}^0 \cdot \phi(L_{F_v}) \cong {}^L T_{s_1},$$

であることがわかる．ここで、

$$\mathcal{H}_{s_1} = \hat{G}_{s_1}^0 \cdot \phi(L_{F_v}),$$

と定義する．同様に、s_2（resp. $s_3 = s_1 s_2$）に対しても、

$$T_{s_2} = N_{E_2/F_v}^{-1}(1), \qquad \mathcal{H}_{s_2} = \hat{G}_{s_2}^0 \cdot \phi(L_{F_v}),$$
$$T_{s_3} = N_{E_3/F_v}^{-1}(1), \qquad \mathcal{H}_{s_3} = \hat{G}_{s_3}^0 \cdot \phi(L_{F_v}),$$

とおくと、

$$\mathcal{H}_{s_2}=\hat{G}^0_{s_2}\cdot\phi(L_{F_v})\cong {}^L T_{s_2},$$
$$\mathcal{H}_{s_3}=\hat{G}^0_{s_3}\cdot\phi(L_{F_v})\cong {}^L T_{s_3},$$

であることが分かる. いま、

$$\pi|_{SL_2}=\sigma_1\oplus\sigma_2\oplus\sigma_3\oplus\sigma_4,$$

とする. ここで、$\chi_1 : W_{E_1}\longrightarrow\mathbb{C}^\times$ に Tate–Nakayama duality で対応する $E_1^\times$ の 1 次元 character を $T_{s_1}(F_v)\cong E_1^1$ に制限したものを、θ_{s_1} とする. また、$\mathrm{Gal}(E_1/F_v)=\langle\tau\rangle$ とし、

$$\overline{\theta}_{s_1}(\tau(x))=\theta_{s_1}(x),\quad {}^\forall x\in T_{s_1}(F_v),$$

により 1 次元 character $\overline{\theta}_{s_1}$ を定義する. s_2, s_3 に対しても同様に定める. T_{s_i}, $(i=1,2,3)$ は SL_2 の torus と同型なので、T_{s_i} の SL_2 への埋め込みを固定し、SL_2 の subgroup とみなす. 簡単のため、T_{s_i} と同型な SL_2 の torus は、全て $SL_2(F_v)$-conjugate であると仮定する. Harish-Chandra の定理により、G の既約許容表現 σ の distribution character は G の regular semisimple element の集合の上の locally constant な類関数 Θ_σ であらわすことができる.

$\Theta_{\sigma_1},\ldots,\Theta_{\sigma_4}$ の関係は次のようになっている. $\mathcal{H}_{s_i}$, $(i=1,2,3)$ に対し、G の regular semisimple element の集合の上の類関数 $\Delta_{G,H_{s_i}}$ が存在し、

$$\sum_{j=1}^{4}\langle s_i,\sigma_j\rangle\cdot\Theta_{\sigma_j}(x)=\begin{cases}0, & \text{if } \{x\}_{GL_2}\cap T_{s_i}(F_v)=\emptyset,\\ \dfrac{(\theta_{s_i}+\overline{\theta}_{s_i})(x)}{\Delta_{G,H_{s_i}}(x)}, & \text{if } x\in T_{s_i}(F_v),\end{cases}$$

となる. 但し、$\{x\}_{GL_2}$ は x の $\mathrm{Ad}(GL_2(F_v))$-orbit とし、$\langle s_i,\sigma_j\rangle=\pm1$ $(i,j=1,\ldots,4)$ を、

$$\begin{aligned}
s_1:&\quad \langle s_1,\sigma_1\rangle=+1,\quad \langle s_1,\sigma_2\rangle=+1,\quad \langle s_1,\sigma_3\rangle=-1,\quad \langle s_1,\sigma_4\rangle=-1,\\
s_2:&\quad \langle s_2,\sigma_1\rangle=+1,\quad \langle s_2,\sigma_2\rangle=-1,\quad \langle s_2,\sigma_3\rangle=+1,\quad \langle s_2,\sigma_4\rangle=-1,\\
s_3:&\quad \langle s_3,\sigma_1\rangle=+1,\quad \langle s_3,\sigma_2\rangle=-1,\quad \langle s_3,\sigma_3\rangle=-1,\quad \langle s_3,\sigma_4\rangle=+1,
\end{aligned}$$

とおいている. ところで、π は

$$\begin{aligned}
\pi|_{G_{E_1}}&=\tilde{\sigma_1}\oplus\tilde{\sigma_1}', & \pi|_{G_{E_2}}&=\tilde{\sigma_2}\oplus\tilde{\sigma_2}',\\
\tilde{\sigma_1}|_{SL_2}&=\sigma_1\oplus\sigma_2, & \tilde{\sigma_2}|_{SL_2}&=\sigma_1\oplus\sigma_3,\\
\tilde{\sigma_1}'|_{SL_2}&=\sigma_3\oplus\sigma_4, & \tilde{\sigma_2}'|_{SL_2}&=\sigma_2\oplus\sigma_4,
\end{aligned}$$

と分解していたが、実は E_3 においても、

$$\pi|_{G_{E_3}} = \tilde{\sigma}_3 \oplus \tilde{\sigma}_3',$$
$$\tilde{\sigma}_3|_{SL_2} = \sigma_1 \oplus \sigma_4,$$
$$\tilde{\sigma}_3'|_{SL_2} = \sigma_2 \oplus \sigma_3,$$

と分解している．比べてみるとわかるように、s_i に対し、$\tilde{\sigma}_i$ に含まれるものが $\langle s_i, \sigma\rangle = +1$ で、$\tilde{\sigma}_i'$ に含まれるものが $\langle s_i, \sigma\rangle = -1$ となるように定めている．ここで、σ_1 は、$\langle s_i, \sigma_1\rangle = +1$, $(i = 1, 2, 3)$ となるものだが、実は、σ_1 の選び方は一意的ではない．（$\Delta_{G,H_{s_i}}$ をそれぞれ適当に ± 1 倍することにより、$\sigma_1, \ldots, \sigma_4$ のどれを選ぶこともできる.）また、$s = 1$ のときは、$\hat{G}_s^0 = \hat{G} = PGL_2(\mathbb{C})$ なので $\mathcal{H}_s = {}^L G$ とおく．このとき、

$$\langle 1, \sigma_1\rangle = \langle 1, \sigma_2\rangle = \langle 1, \sigma_3\rangle = \langle 1, \sigma_4\rangle = +1,$$

とする．このように定義すると、σ_j に、$\mathcal{S}_\phi$ から $\mathbb{C}$ への写像

$$\mathcal{S}_\phi \ni s \longrightarrow \langle s, \sigma_j\rangle,$$

を対応させることにより、$\{\sigma_1, \ldots, \sigma_4\}$ と $\mathcal{S}_\phi$ の 1 次元 character が 1 対 1 に対応する．特に、σ_1 は、$\mathcal{S}_\phi$ の trivial character に対応するものである．最後に、L-packet $\Pi_\phi(SL_2)$ に対し、$\{\Theta_{\sigma_1}, \ldots, \Theta_{\sigma_4}\}$ を基底とする $\mathbb{C}$ 上の線形空間

$$\langle \Theta_{\sigma_1}, \Theta_{\sigma_2}, \Theta_{\sigma_3}, \Theta_{\sigma_4}\rangle,$$

を考えると、これは、$s \in \mathcal{S}_\phi$ に対応する部分空間

$$\mathbb{C} \cdot \Big(\sum_{j=1}^{4} \langle s, \sigma_j\rangle \cdot \Theta_{\sigma_j} \Big),$$

の直和となっている．ここで、$GL_2(F_v)$-invariant な vector のなす部分空間は $s = 1$ （つまり、$\mathcal{H}_s = {}^L G$ の場合）に対応するものと一致している．

Remark 3.1. *Case.2* の場合も同様のことが成り立つ．このときは、$\mathcal{S}_\phi \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ であり、σ （*resp.* σ'）と $\mathcal{S}_\phi$ の *trivial* な *character* （*resp. sign character* ）が対応する．

4. Endoscopy

もとに戻り、G を connected reductive algebraic group とする．前節の $\mathcal{H}_s$ は $G = SL_2$ の endoscopic datum を決めている．一般には endoscopic datum は、次のように定義される．

Definition 4.1. G の *endoscopic datum* とは、4 つ組み

$$(H, \mathcal{H}, s, \xi),$$

で次の条件をみたすもののことである．

1. H は F_v 上定義された *quasi-split connected reductive algebraic group.*
2. 次のような *split exact sequence*

$$1 \longrightarrow \hat{H} \longrightarrow \mathcal{H} \overset{\longleftarrow}{\longrightarrow} L_{F_v} \longrightarrow 1,$$

が存在し、これにより定義される写像 $L_{F_v} \longrightarrow Out(\hat{H})$ は ${}^L H$ に対応するものと一致する.
3. s は $\hat{G}$ の *semisimple element.*
4. $\xi : \mathcal{H} \longrightarrow {}^L G$ は L_{F_v} 上の準同型写像.
5. ξ の $\hat{H}$ への制限は、同型写像

$$\hat{H} \longrightarrow \hat{G}^0_s,$$

を導く. この同型写像により、$\hat{H}$ を $\hat{G}$ の部分群と同一視する.
6. s は次の条件をみたす.
   (a) $\Gamma_v = \mathrm{Gal}(\overline{F}_v/F_v)$ とし、$Z(\hat{H})$ (*resp.* $Z(\hat{G})$) を $\hat{H}$ (*resp.* $\hat{G}$) の *center* とするとき、s の $Z(\hat{H})/Z(\hat{G})$ での像 $\overline{s}$ は

$$\overline{s} \in [Z(\hat{H})/Z(\hat{G})]^{\Gamma_v},$$

   をみたす. 但し、$[\quad]^{\Gamma_v}$ は Γ_v-*invariant* な元全体のなす部分群. (L_{F_v} の $Z(\hat{H})$ への作用は Γ_v を経由することに注意.)
   (b) π_0 で *connected component* のなす群をあらわすことにする. *Exact sequence*

$$1 \longrightarrow Z(\hat{G}) \longrightarrow Z(\hat{H}) \longrightarrow Z(\hat{H})/Z(\hat{G}) \longrightarrow 1,$$

   から、*exact sequence*

$$\pi_0(Z(\hat{H})^{\Gamma_v}) \longrightarrow \pi_0([Z(\hat{H})/Z(\hat{G})]^{\Gamma_v}) \longrightarrow H^1(F_v, Z(\hat{G})),$$

   が得られるが [21]、このとき、$\overline{s}$ の $H^1(F_v, Z(\hat{G}))$ での像は *trivial.*

Remark 4.2. 上の定義は、*local field* F_v でのものである. *Global field* F の場合は、最後の条件

「$\overline{s}$ の $H^1(F_v, Z(\hat{G}))$ での像は *trivial*」

が

「$\overline{s}$ の $H^1(F, Z(\hat{G}))$ での像は *locally trivial*」

に変わる. また、ここでの定義は *standard endoscopy* と呼ばれるものである. *Base change lift* 等には *twisted endoscopy* の概念が必要になる [24].

Definition 4.3. *Endoscopic datum* $(H, \mathcal{H}, s, \xi)$, $(H', \mathcal{H}', s', \xi')$ が同値とは、H と H' の間の同型写像と、$\mathcal{H}$ と $\mathcal{H}'$ の間の同型写像、および、$\hat{G}^0_s$ を $\hat{G}^0_{s'}$ にうつす $\mathrm{Ad}(\hat{G})$ の元 $\mathrm{Ad}(g)$ で、自然な条件をみたし、

しかも、s と $\mathrm{Ad}(g)^{-1}s'$ の $\pi_0([Z(\hat{H})/Z(\hat{G})]^{\Gamma_v})$ での像が等しくなるものが存在することである.（詳しくは [21] を参照.）

Definition 4.4. γ, γ' を $G(F_v)$ の *strongly regular semisimple elements* とする. γ, γ' が $G(\overline{F_v})$*-conjugate* であるとき、γ, γ' は *stably conjugate* であるという. また、γ と *stably conjugate* な $G(F_v)$ の元全体のなす集合を γ の *stable conjugacy class* と呼ぶ.

γ の stable conjugacy class を $\{\gamma\}_{st}$ であらわすことにする.

Remark 4.5. γ が *strongly regular* でない場合にも *stable conjugacy class* は定義されている. また、$SL_2(F_v)$ では *stable conjugacy class* は $\mathrm{Ad}(GL_2(F_v))$*-orbit* と一致している.

Remark 4.6. 互いに *conjugate* な2つの元は、*stably conjugate* になる. *Strongly regular semisimple element* γ の *stable conjugacy class* に含まれる *conjugacy class* 全体の集合 $\{\gamma\}_{st}/conj.$ と

$$\mathrm{Ker}[H^1(F_v, G_\gamma) \longrightarrow H^1(F_v, G)],$$

との間には自然な全単射が存在する.

いま、strongly regular semisimple elements γ, γ' が stably conjugate ならば、G_γ と $G_{\gamma'}$ は同型になる.（同型写像は $\mathrm{Ad}(G(\overline{F_v}))$ の元により得られる.）以下では、$G_{\gamma'}$ の上の Haar measure と、G_γ 上の Haar measuer をこの同型により $G_{\gamma'}$ に引き戻したものが一致するように、torus の上の Haar measure をとることにする.

Remark 4.7. F_v を *non-archimedean local field* とする. γ は *strongly regular* なので、G_γ は G の *maximal torus* となる. いま、$\hat{G}_\gamma$ から $\hat{G}$ への埋め込みを固定し（$G_\gamma \subset G$ に対応したものをとる）、$\hat{G}_\gamma$ を $\hat{G}$ の部分群とみなす.（一般に、$\hat{G}_\gamma$ への L_{F_v} の作用は、$\hat{G}$ の部分群としての作用と異なる.）*Kottwitz* の定理 [21] により、

$$H^1(F_v, G) \cong \pi_0(Z(\hat{G})^{\Gamma_v})^D,$$

が成り立つ. 但し、^{D} は *Pontrjagin dual* . よって、$\{\gamma\}_{st}/conj.$ と

$$\mathrm{Ker}[\pi_0(\hat{G}_\gamma^{\Gamma_v})^D \longrightarrow \pi_0(Z(\hat{G})^{\Gamma_v})^D],$$

との間には自然な全単射が存在することがわかる. ここで、*endoscopic datum* が条件 $\overline{s} \in [\hat{G}_\gamma/Z(\hat{G})]^{\Gamma_v}$ をみたすと仮定する. すると、*endoscopic datum* の条件 *4.1.6b* から、s が写像

$$\kappa_\gamma : \{\gamma\}_{st}/conj. \longrightarrow \mathbb{C}^1,$$

を定義することが分かる.（$Z(\hat{H}) \subset \hat{G}_\gamma$ であることに注意.）

混乱が起きないときは、endoscopic datum $(H, \mathcal{H}, s, \xi)$ を endoscopic group H と呼ぶことにする. Endoscopic group H に対し、$\Delta_{G,H}(\gamma_H, \gamma_G)$ を transfer factor とする. 但し、γ_G (resp. γ_H) は G (resp.H) の strongly regular semisimple element. (定義については [29] を参照.) ここでは次のことを注意するにとどめる.

Remark 4.8.

1. もし、
$$\Delta_{G,H}(\gamma_H, \gamma_G) \neq 0,$$
が成り立つならば、γ_H を γ_G へ移す H_{γ_H} から G_{γ_G} への F_v 上定義された同型写像が存在し、対応する $\hat{H}_{\gamma_H}$ と $\hat{G}_{\gamma_G}$ の間の同型写像が、ξ から導かれるものと $\mathrm{Ad}(\hat{G})$ をのぞいて一致する. 特に、γ_H に対し、$\Delta_{G,H}(\gamma_H, \gamma_G) \neq 0$ となる γ_G の *conjugacy class* は、有限個である. 一般に、この条件をみたすような *strongly regular element* γ_G が存在するとき、γ_H は *strongly G-regular* であるという.
2. γ_H, γ'_H が *stably conjugate* で γ_G, γ'_G も *stably conjugate* ならば、
$$\Delta_{G,H}(\gamma'_H, \gamma'_G) = \kappa_{\gamma_G}(\gamma'_G)\Delta_{G,H}(\gamma_H, \gamma_G),$$
が成り立つ.

$C_c^\infty(G)$ を $G(F_v)$ 上の locally constant compactly supported function 全体のなす空間とする. $f^G \in C_c^\infty(G)$ の orbital integral を
$$I(\gamma_G, f^G) = \int_{G(F_v)/G_{\gamma_G}(F_v)} f^G(g\,\gamma_G\,g^{-1})\,dg,$$
により定め、$f^H \in C_c^\infty(H)$ の stable orbital integral を
$$I^{st}(\gamma_H, f^H) = \sum_{\gamma'_H \in \{\gamma_H\}_{st}/\mathrm{conj.}} I(\gamma'_H, f^H),$$
により定める.

以後、次の予想が成り立っていると仮定する.

Conjecture 4.9. $f^G \in C_c^\infty(G)$ に対し、ある $f^H \in C_c^\infty(H)$ が存在し、全ての *strongly G-regular element* γ_H について、次をみたす.
$$I^{st}(\gamma_H, f^H) = \sum_{\{\gamma_G\}} \Delta_{G,H}(\gamma_H, \gamma_G) I(\gamma_G, f^G).$$
但し、右辺は G の *strongly regular semisimple orbit* について和をとっている.

Remark 4.10. *Remark 4.6.1* より、右辺は有限和となっている. もし、f^G の *support* が *strongly regular semisimple elements* 全体のなす部分集合に含まれていれば、f^H の存在は簡単にわかる. 問題は、*singular* *element* へ近づくときの挙動にある．この予想は、F_v が *archimedean* ならば、*D. Shelstad* により証明されている．（[36] 参照.）F_v が *non-archimedean* ならば、*J. L. Waldspurger* により *Lie* 環の場合の *fundamental lemma*（*lemma* と呼ばれているが、*conjecture* である）から予想が従うことが示されている．

Definition 4.11. H 上の *stable distribution* とは、各点収束の意味で、*strongly regular semisimple element* の *stable orbital integral* の *closed linear span* に含まれる *distribution* のことである．つまり、*distribution* S が、全ての *strongly regular semisimple element* γ_H に対し $I^{st}(\gamma_H, f^H) = 0$ をみたす $f^H \in C_c^\infty(H)$ に対し、$S(f^H) = 0$ をみたせば、S は *stable distribution* である．

f^G に対し、f^H のとり方は一意的ではないが、f^H の stable orbital integral は f^H のとり方によらず、f^G のみで決まる．よって、H 上の stable distribution S に対して、$S(f^H)$ は f^H のとり方によらず決まる．

Definition 4.12. S を H 上の *stable distribution* とする．このとき、G 上の *invariant distribution* $\mathrm{Tran}_H^G(S)$ を

$$\mathrm{Tran}_H^G(S)(f^G) = S(f^H), \quad {}^\forall f^G \in C_c^\infty(G),$$

により定義する．

Remark 4.13. $G = SL_2$ のとき、s_i $(i = 1, 2, 3)$ に対し、

$$\mathrm{Tran}_{H_{s_i}}^G(\theta_{s_i}) = \sum_{j=1}^{4} \langle s_i, \sigma_j \rangle \cdot \Theta_{\sigma_j},$$

が成り立っている．

5. Local Tempered Packet.

Definition 5.1. $\phi \in \Phi(G)$ の像 $\mathrm{Im}\,\phi$ が *bounded* のとき、ϕ を *tempered* な *parameter* と呼び、$\Phi_{temp} = \Phi_{temp}(G)$ を *tempered* な *parameter* 全体のなす集合とする．このとき、$\phi \in \Phi_{temp}$ に対し、S_ϕ を、

$$s \cdot \phi(t) \cdot s^{-1} \cdot \phi(t)^{-1} \in Z(\hat{G}), \quad {}^\forall t \in L_{F_v},$$

をみたし、しかも対応する $H^1(L_{F_v}, Z(\hat{G}))$ の元が *trivial* になる $s \in \hat{G}$ 全体のなす部分群とし、

$$\mathcal{S}_\phi = S_\phi / (S_\phi^0 \cdot Z(\hat{G})),$$

と定義する．（一般の $\phi \in \Phi(G)$ に対しても同様にして S_ϕ, $\mathcal{S}_\phi$ が定義される.）

Remark 5.2. *Global* の場合は、s の条件で
「対応する $H^1(L_{F_v}, Z(\hat{G}))$ の元が *trivial*」

のところを、
「対応する $H^1(L_F, Z(\hat{G}))$ の元が *locally trivial*」
に変更したものが S_ϕ となる．($\mathcal{S}_\phi = S_\phi/(S_\phi^0 \cdot Z(\hat{G}))$ は同様.)

$\mathcal{S}_\phi$ は有限群である．$G = SL_2$ のときは、$\mathcal{S}_\phi$ は可換群であったが、一般には、非可換な群になることがある．また、G が quasi-split で、ϕ が Borel subgroup からの tempered な誘導表現に対応するときには、R-group を ${}^LG$ において実現したものとみなすことができる．S_ϕ の semisimple element s に対し、$\mathcal{H} = \hat{G}_s^0 \cdot \phi(L_{F_v})$ とし、$\xi = id|_{\mathcal{H}}$ とすることにより endoscopic datum を定義することができる．以下、簡単のため $\mathcal{H} \cong {}^LH$ と仮定する．

Conjecture 5.3. $\phi \in \Phi_{temp}$ とする．$\pi \in \Pi_\phi$ に対し、$\mathcal{S}_\phi$ の必ずしも既約とは限らない有限次元表現の *character*

$$\overline{s} \longrightarrow \langle \overline{s}, \pi \rangle \in \mathbb{C},$$

が対応し、次をみたす．

1. Θ_π を $\pi \in \Pi_\phi$ の *distribution character* とするとき、

$$\sum_{\pi \in \Pi_\phi} \langle 1, \pi \rangle \cdot \Theta_\pi,$$

   は G 上の *stable distribution.*
2. H を s に対応する *endoscopic group* とし、ϕ を $\mathcal{H}$ への *parameter* とみる．$f^H \in C_c^\infty(H)$ に対し、

$$f^H(\phi) = \sum_{\sigma \in \Pi_\phi(H)} \langle 1, \sigma \rangle \cdot \Theta_\sigma(f^H),$$

   とおく．いま、f^H が f^G と対応していれば、f^G によらない定数 c が存在し、

$$f^H(\phi) = c \cdot \sum_{\pi \in \Pi_\phi} \langle \overline{s}, \pi \rangle \Theta_\pi(f^G),$$

   がなりたつ．

Remark 5.4. $\mathcal{H} \cong {}^LH$ でないとき、*5.3.2* は *Remark 2.4* により H を H' にかえたものについての予想となる．

Remark 5.5. F_v が *archimedean* のときには、この予想は、[36] で証明されている．F_v が *non-archimedena* で G が *quasi-split* のときは、Π_ϕ と $\mathcal{S}_\phi$ の既約表現全体とが、1 対 1 に対応するとおもわれる．G が *quasi-split* でないときは、G が SL_2 の *anisotropic* な *inner form* (*division algebra* の *reduced norm* が *1* の群) にすでに $\mathcal{S}_\phi$ の既約表現と対応しない例がある [26].

π と $\mathcal{S}_\phi$ の表現の character との対応は、一意的には決まらない. $G = SL_2$ のときの Case.1 の例でも、どの表現が $\mathcal{S}_\phi$ の trivial character に対応するかにより、4 通りの可能性がある. われわれは、G が quasi-split で F_v が non-archimedean のときに、$\mathcal{S}_\phi$ の trivial character に対応するものを決めたい. その為に、次の予想を使う. ([26] での決め方とは異なっている.)

いま、G を quasi-split とし、F_v 上定義された Borel subgroup B の unipotent radical を N とする. N の generic な 1 次元 character χ を固定する. G の既約許容表現 π が $\mathrm{Ind}_N^G(\chi)$ に Whittaker model をもつとき、π は χ-generic であるという. (これは、G の splitting と F_v の additive character により決まる.)

Conjecture 5.6. (*Generic packet conjecture*)
G を quasi-split とする. $\phi \in \Phi_{temp}$ であれば、Π_ϕ に、唯一つだけ χ-generic なものが存在する.

Conjecture 5.7. *G が quasi-split であれば、χ-generic なものが、$\mathcal{S}_\phi$ の trivial character と対応するようにできる.*

Remark 5.8. *F_v が archimedean のときには、generic packet conjecture は証明されている.* ([39] 参照.) *F_v が non-archimedean のときには、$G = GL_n$, $G = SL_n$ の場合が I. N. Bernstein–A. V. Zelevinski* [9] *により証明され、$U(3)$ の場合が、S. Friedberg–S. Gelbart–H. Jacquet–J. Rogawski* [13] *(別の方法で T. Konno* [20]*) により証明されている.*

6. Local A-Packet

Saito–Kurokawa lift の場合を考えると、$\phi \in \Phi$ が non-tempered の場合、L-packet だけでは、local にも global にもうまくいかないことが分かる. このため、J. Arthur により、A-packet が考えられた. まず、A-packet に対応する parameter を導入する. Arthur parameter の集合 $\Psi = \Psi(G)$ を、次の 3 つの条件をみたす L_{F_v} 上の準同型写像

$$\psi : L_{F_v} \times SL_2(\mathbb{C}) \longrightarrow {}^LG,$$

の $\hat{G}$-orbit 全体のなす集合とする.

1. ψ は relevant. つまり、${}^LP \in \mathcal{P}^* - \mathcal{P}$ ならば $\mathrm{Im}\,\psi \not\subset {}^LP$.
2. ψ の L_{F_v} への制限は admissible かつ bounded.
3. ψ の $SL_2(\mathbb{C})$ への制限は $\mathbb{C}$ 上定義された準同型写像.

$\psi \in \Psi$ に対し、$\phi = \phi_\psi \in \Phi$ を

$$\phi : L_{F_v} \xrightarrow{\ \iota\ } L_{F_v} \times SL_2(\mathbb{C}) \xrightarrow{\ \psi\ } {}^LG,$$

により定める. ただし、ι は、

$$\iota(w \times t) = (w \times t) \times \begin{pmatrix} |w|_{F_v}^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & |w|_{F_v}^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix}, \quad w \in W_{F_v},\ t \in SU_2(\mathbb{R}),$$

により定まる写像である. $\psi \in \Psi$ に対しても、Φ_{temp} の場合と同様にして、S_ψ、$\mathcal{S}_\psi$ を定義することができる. また、自然な準同型写像

$$\mathcal{S}_\psi \longrightarrow \mathcal{S}_\phi,$$

は全射である. よって、$\Pi(\mathcal{S}_\psi)$ (resp. $\Pi(\mathcal{S}_\phi)$) を $\mathcal{S}_\psi$ (resp. $\mathcal{S}_\phi$) の既約表現の character 全体のなす集合とするとき、写像

$$\Pi(\mathcal{S}_\phi) \longrightarrow \Pi(\mathcal{S}_\psi),$$

は単射である. また、$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{C})$ に対し、

$$s_\psi = \psi\left(\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right),$$

とおく. s_ψ は S_ψ の center の元である.

$$s_\psi \in S_\phi^0,$$

なので、s_ψ の $\mathcal{S}_\phi$ での像は、1 である. Tempered のときと同様に、$s \in \mathcal{S}_\psi$ に対しても、endoscopic datum $(H, \mathcal{H}, s, \xi)$ を定義することができる. 簡単のため、$\mathcal{H} \cong {}^L H$ と仮定する.

次が、Arthur 予想の local な場合である.

Conjecture 6.1. $\psi \in \Psi$ に対し、$\Pi(G)$ の有限な部分集合 Π_ψ と写像

$$\delta : S_\psi \times \Pi_\psi \longrightarrow \mathbb{C},$$

が存在し、次の性質をみたす.

1. Π_ψ に属する既約許容表現は全て *unitarizable.*
2. G 上の *distribution*

$$\sum_{\pi \in \Pi_\psi} \delta(s_\psi, \pi) \cdot \Theta_\pi,$$

は *stable distribution.*

3. ψ を H の *parameter* とみなし、$f^H \in C_c^\infty(H)$ での *2* の *distribution* の値を $f^H(\psi)$ とおく. このとき、f^H が $f^G \in C_c^\infty(G)$ に対応しているとすると、f^G によらない定数 c が存在し、

$$f^H(\psi) = c \cdot \sum_{\pi \in \Pi_\psi(G)} \delta(s_\psi s, \pi) \cdot \Theta_\pi(f^G),$$

が成り立つ. また、各 $\pi \in \Pi_\psi$ に対して、δ は類関数になっている.

4. *Normalization function* と呼ばれる S_ψ の類関数

$$\rho : S_\psi \longrightarrow \mathbb{C}^\times,$$

が存在し、$\rho(s_\psi) = \pm 1$ で、しかも、

$$\delta(s, \pi)\rho(s)^{-1},$$

は s の $\mathcal{S}_\psi$ での像 $\overline{s}$ のみで決まる S_ψ から $\mathbb{C}$ への写像となる．$\pi \in \Pi_\psi$ に対し、$\mathcal{S}_\psi$ の類関数を

$$\langle \overline{s}, \pi|\rho\rangle = \delta(s,\pi)\rho(s)^{-1},$$

により定める．

5. $\mathbb{R}_{\geq 0}[\Pi(\mathcal{S}_\psi)]$ を $\Pi(\mathcal{S}_\psi)$ の $\mathbb{R}_{\geq 0}$ 係数の有限和のなす $\mathcal{S}_\psi$ の類関数の集合とする．このとき、$\pi \in \Pi_\psi$ に対し、$\langle\,\cdot\,,\pi|\rho\rangle$ は $\mathbb{R}_{\geq 0}[\Pi(\mathcal{S}_\psi)]$ に含まれる．
6. $\pi \in \Pi_\psi$ に対し、$\{1, \overline{s}_\psi\}$ の 1 次元 *character* $e_\psi(\,\cdot\,,\pi|\rho)$ が存在し、

$$\langle \overline{s}_\psi\overline{s}, \pi|\rho\rangle = e_\psi(\overline{s}_\psi, \pi|\rho)\langle \overline{s}, \pi|\rho\rangle,$$

が成り立つ．

Conjecture 6.2. G が *quasi-split* であるとする．このとき、上の予想に加え、次のことが成り立つと予想されている．

1. $\phi = \phi_\psi$ を ψ に対応する *Langlands parameter* とするとき、

$$\Pi_\phi \subset \Pi_\psi,$$

が成り立つ．

2. $\pi \in \Pi_\phi \subset \Pi_\psi$ ならば、$\delta(s_\psi, \pi) = 1$.
3. *Generic packet conjecture* により、Π_ϕ には、対応する *standard* 表現が χ*-generic* になる表現 π_χ が一つだけ存在する．いま、$\pi \in \Pi_\psi$ に対し、

$$\langle \overline{s}, \pi|\pi_\chi\rangle = \langle \overline{s}, \pi|\rho\rangle\langle \overline{s}, \pi_\chi|\rho\rangle^{-1},$$

と定義する．このとき、横方向の写像を

$$\pi \longrightarrow \langle\,\cdot\,, \pi|\pi_\chi\rangle,$$

として、次の可換図式が得られる．

$$\begin{array}{ccc} \Pi_\psi & \longrightarrow & \Pi(\mathcal{S}_\psi) \\ \uparrow & & \uparrow \\ \Pi_\phi & \longrightarrow & \Pi(\mathcal{S}_\phi) \end{array}$$

Remark 6.3. $\mathcal{H} \ncong {}^L H$ のときは、*Remark 2.4* により H を H' にかえたものについての予想となる．

Remark 6.4. $G = U(3)$ のときは、*J. Rogawski* [33] によりこの予想は示されている．

Remark 6.5. Π_ψ は *enlarged packet* と呼ばれることもある．

Remark 6.6. $\psi|_{SL_2(\mathbb{C})} = 1$ のとき、ϕ は *tempered* な *Langlands parameter* で、$\Pi_\psi = \Pi_\phi$ となると予想される．一般に Π_ψ は、*non-tempered* な表現と *tempered* な表現を同時に含みうる．よって、Π_ψ 同士は、一般に *disjoint* ではない．また、一般に Π_ψ は *L-packet* の和集合にもなり得ない．（次の例 [33].）

例 （J. Rogawski [33]）

$G = U(3)$ とする．F_v を non-archimedean local field とし、G が F_v の 2 次の拡大体 E_w 上 split していると仮定する．$\mathrm{Gal}(E_w/F_v) = \langle\tau\rangle$ とし、τ が $\hat{G} = GL_3(\mathbb{C})$ に

$$\tau(g) = J^{-1} \cdot {}^tG^{-1} \cdot J,$$

で作用するとする．但し、$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ である．この作用により、${}^LG$ を定義する．次に、$\psi \in \Psi(G)$ を、以下のように定める．まず、

$$w_\sigma \in W_{E_w/F_v} - W_{E_w/E_w},$$

を固定する．1 次元 character

$$\mu : E^\times \longrightarrow \mathbb{C}^1,$$

を $F^\times$ への制限が E_w/F_v の class character と一致するものとし、

$$\chi : E^\times \longrightarrow \mathbb{C}^1,$$

を $F^\times$ への制限が trivial character となる 1 次元 character とする．ここで、ψ に対応する $\hat{G}$ への写像 ψ^0 を次のように定める．

$$\psi^0 : SL_2(\mathbb{C}) \ni \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & a_{12} \\ 0 & 1 & 0 \\ a_{21} & 0 & a_{22} \end{pmatrix},$$

$$\psi^0 : SU_2(\mathbb{R}) \ni t \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\psi^0 : W_{E_w/E_w} \ni w \longrightarrow \begin{pmatrix} \mu(w) & 0 & 0 \\ 0 & \chi(w) & 0 \\ 0 & 0 & \mu(w) \end{pmatrix},$$

$$\psi^0 : w_\sigma \longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

このとき、

$$\mathcal{S}_\psi = \langle \overline{s}_\psi \rangle \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z},$$
$$\mathcal{S}_\phi = \{1\},$$

となり、$\Pi_\phi = \{\pi^n\}$ は non-tempered な表現 1 つだけからなる L-packet で、$\Pi_\psi = \{\pi^n, \pi^s\}$ は、π^n と supercuspidal 表現 π^s からなる A-packet となる．ここで、$\pi_\chi = \pi^n$ であり、δ, ρ は、次のようになる．

$$\delta(1, \pi^n) = 1, \quad \delta(s_\psi, \pi^n) = 1,$$
$$\delta(1, \pi^s) = 1, \quad \delta(s_\psi, \pi^s) = -1,$$
$$\rho(1) = 1, \qquad \rho(s_\psi) = 1.$$

$\Pi(\mathcal{S}_\phi)$ の $\mathcal{S}_\psi$ への inflation は、$\mathcal{S}_\psi$ の trivial な character になり、これと π^n が対応し、π^s が $\mathcal{S}_\psi$ の sign character と対応する．s_ψ に対応する endoscopic datum を考えると、$H = U(2) \times U(1)$、$\mathcal{H} \cong {}^LH$ であり、ψ を $\Psi(H)$ の元とみると、$\Pi_\psi(H) = \{\pi_H\}$ は H の 1 次元表現 π_H のみからなる A-packet である．つまり、

$$\mathrm{Tran}_H^G(\Theta_{\pi_H}) = \Theta_{\pi^n} + \Theta_{\pi^s},$$

が成り立つ．また、π^s を含む tempered な L-packet $\{\pi^s, \pi^d\}$ は π^s と discrete series π^d の 2 つからなる．

Remark 6.7. $F_v = \mathbb{R}$ のとき、*J. Adams–J. Johnson* [2] により、予想は条件付きで示された．このとき、G が *split* でも、Π_ψ から $\Pi(\mathcal{S}_\psi)$ への写像が単射ではない例がある．

例 (J. Adams–J. Johnson [2])

$F_v = \mathbb{R}$ とする．簡単のため、G が quasi-split で compact な maximal torus T をもつと仮定する．また、Π_ϕ の元が discrete series と同じ infinitesimal character を持つ場合のみを考える．θ を T を fix する Cartan involution とし、対応する G の Lie algebra $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \otimes_\mathbb{R} \mathbb{C}$ の involution も θ であらわす．$\mathfrak{q} = \mathfrak{l} \oplus u$ を $\nu \in \mathfrak{t}$ により決まる $\mathfrak{g}$ の θ-stable parabolic subalgebra とし、L を $\mathfrak{q}$ の G での stabilizer とする．よって、L の Lie algebra は $\mathfrak{l}$ となり、$T \subset L$ である．$w \in W(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$ に対し、$\mathrm{Ad}(w)\nu$ により決まる θ-stable parabolic subalgebra を $\mathfrak{q}_w$ とする．もし必要であれば、$\mathfrak{q}$ を $\mathfrak{q}_w$ で取り換えて、L が quasi-split であると仮定する．ここで、${}^LL$ の ${}^LG$ への $L_\mathbb{R}$ 上の埋め込みを固定する．我々は $\psi \in \Psi(G)$ が次の条件をみたしていると仮定する．

1. ψ は ${}^LL$ を経由する．
2. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{C})$ の $\hat{L}$ での像は $\hat{L}$ の regular unipotent element である．

3. $\phi = \phi_\psi$ に対応する L-packet $\Pi_\phi(G)$ に属する表現は G のある discrete series と同じ infinitesimal character μ をもつ.

このとき、次の条件をみたす $\lambda \in \mathfrak{t}^*$ が存在する.

1. $2\rho = 2\rho(\mathfrak{l}) + 2\rho(\mathfrak{u})$ を positive root の和として、

$$\mathrm{Re}\langle \alpha, \lambda + \rho \rangle \geqq 0, \quad {}^\forall \alpha \in \Delta(\mathfrak{u}, \mathfrak{t}),$$

が成り立つ.

2. $A_\mathfrak{q}(\lambda) \in \Pi_\phi$. よって、特に $A_\mathfrak{q}(\lambda)$ は infinitesimal character $\mu = \lambda + \rho$ をもつ.

ここで、

$$S = W(G,T)\backslash W(\mathfrak{g},\mathfrak{t})/W(\mathfrak{l},\mathfrak{t}),$$

とする. このとき、

$$\Pi_\psi(G) = \{A_{\mathfrak{q}_w}(\mathrm{Ad}(w)\lambda) |\, w \in S\},$$

である.

7. Global Packet.

以後、G は F 上定義されているとし、L_F を conjectural Langlands group とする. Local のときと同様に、Arthur parameter

$$\psi : L_F \times SL_2(\mathbb{C}) \longrightarrow {}^L G,$$

全体の集合 $\Psi(G)$ を考えることができる. (Definition 7.1で述べるように、$\mathrm{Ad}(\hat{G})$-orbit と異なる同値条件を考えるので、ここでは $\mathrm{Ad}(\hat{G})$-orbit 全体の集合ではなく、準同型写像全体の集合とみる.) また、準同型写像

$$L_{F_v} \longrightarrow L_F,$$

により、ψ から、local な Arthur parameter ψ_v を定義することができる. 以後、local なものは、v をつけることにする. A_G を G の center の maximal F-split torus とする. 準同型写像

$$A_G \longrightarrow G,$$

から、L_F 上の準同型写像

$${}^L G \longrightarrow {}^L A_G,$$

が得られる. よって、Arthur parameter ψ に対し、A_G の 1 次元 character ζ が決まる. (ψ の条件により、ζ は unitary character になる. 一般には、ζ が unitary でない様に定義してもよい.) $\Psi(G,\zeta)$ を、対応する A_G の 1 次元 character が ζ となる Arthur paramter 全体のなす

集合とする. Local にも同様に、$\Psi_v(G,\zeta_v)$ を定義することができる. また、$L^2(G(F)\backslash G(\mathbb{A}),\zeta)$ を条件

$$f(\gamma g a)=\zeta(a)f(\gamma),\quad {}^\forall\gamma\in G(F),\ {}^\forall g\in G(\mathbb{A}),\ {}^\forall a\in A_G(\mathbb{A}),$$
$$\int_{G(F)\cdot A_G(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})}|f(g)|^2<\infty,$$

をみたす L^2- 関数 f 全体のなす空間とし、r をこの空間の上への $G(\mathbb{A})$ の右正則表現とする. $G(\mathbb{A})$ の表現 r の multiplicity formula を考えるとき、ψ の $\hat{G}$-conjugacy class を考えるのではうまくいかない. このため、次のような同値類を考える.

Definition 7.1. $\psi_1,\psi_2\in\Psi(G,\zeta)$ が同値（$\psi_1\sim\psi_2$ とあらわす）であるとは、次の条件をみたす $g\in\hat{G}$ が存在することである. L_F の $Z(\hat{G})$ に値を持つ *1-cocycle* $a(t)$ で対応する $H^1(L_F,Z(\hat{G}))$ の元が

$$\mathrm{Ker}[H^1(L_F,Z(\hat{G}))\longrightarrow\oplus_v H^1(L_{F_v},Z(\hat{G}))],$$

に属するものが存在し、

$$\psi_2(t\times u)=g^{-1}\psi_1(t\times u)g\cdot a(t),\quad {}^\forall t\in L_F,\ {}^\forall u\in SL_2(\mathbb{C}),$$

が成り立つ.

Remark 7.2. *G が torus のときでも、Tate–Nakayama duality により、$\Pi(G(\mathbb{A})/G(F))$ と 1 対 1 に対応するものは Arthur parameter の $\mathrm{Ad}(\hat{G})$-orbit ではなく $\Psi(G)/\sim$ である.*

$\Psi(G,\zeta)$ のうち、r の discrete spectrum に対応するもの $\Psi_0(G,\zeta)$ を次のように定義する.

$$\Psi_0(G,\zeta)=\{\psi\in\Psi(G,\zeta)|\,S_\psi^0\in Z(\hat{G})\}.$$

以後、$\pi=\otimes_v\pi_v$ と書くときは、有限個の素点をのぞいて π_v が unramified であるとする. Arthur parameter $\psi\in\Psi_0(G,\zeta)$ に対し、

$$\{\pi=\otimes_v\pi_v|\,\pi_v\in\Pi_{\psi_v}\},$$

のうちで r の discrete spectrum にあらわれるものを決めるため、次のように、$\mathcal{S}_\psi$ の character $\epsilon_\psi(\overline{s})$ を定義する.

Definition 7.3. $\hat{\mathfrak{g}}$ を $\hat{G}$ の *Lie algebra* とする. $\psi\in\Psi_0(G)$ なので、$S_\psi^0\subset Z(\hat{G})$ が成り立つ. よって、$s\in S_\psi$ の $\hat{\mathfrak{g}}$ への作用 $\mathrm{Ad}(s)\curvearrowright\hat{\mathfrak{g}}$ は s の $\mathcal{S}_\psi$ への像 $\overline{s}$ のみによっている. $\mathcal{S}_\psi\times L_F\times SL_2(\mathbb{C})$ の $\hat{\mathfrak{g}}$ への作用 τ_ψ を

$$\tau_\psi(\overline{s}\times t\times u)=\mathrm{Ad}(s\cdot\psi(t\times u))\curvearrowright\hat{\mathfrak{g}},\quad s\in S_\psi,\ t\in L_F,\ u\in SL_2(\mathbb{C}),$$

により定める. τ_ψ を $\mathcal{S}_\psi \times L_F \times SL_2(\mathbb{C})$ の $\hat{\mathfrak{g}}$ への表現とみると、これは完全可約なので、

$$\tau_\psi = \oplus_k \tau_k = \oplus_k (\lambda_k \otimes \mu_k \otimes \nu_k),$$

と既約表現の直和に分解される. 但し、λ_k, μ_k, ν_k は、それぞれ $\mathcal{S}_\psi$, L_F, $SL_2(\mathbb{C})$ の既約表現である. $\tilde{\mu}_k$ を μ_k の *contragredient* 表現とし、$\mu_k \simeq \tilde{\mu}_k$ と仮定すると、L_F の表現 μ_k の ϵ-*factor* $\epsilon(\frac{1}{2}, \mu_k)$ は、

$$\epsilon(\frac{1}{2}, \mu_k) = \pm 1,$$

となる. ここで、$\epsilon_\psi(\overline{s})$ を

$$\epsilon_\psi(\overline{s}) = \prod_k \det(\lambda_k(s)),$$

により定める. 但し、積は、次の3つの条件をみたす k についてとる.

1. $\mu_k \simeq \tilde{\mu}_k$.
2. $\epsilon(\frac{1}{2}, \mu_k) = -1$.
3. $\dim \nu_k$ は偶数.

Conjecture 7.4. $\pi = \otimes_v \pi_v$ が、全ての素点 v について $\pi_v \in \Pi_{\psi_v}$ をみたすとする. このとき、$s \in S_\psi$ に対し $\prod_v \delta(s_v, \pi_v)$ が定義され、しかも、s の $\mathcal{S}_\psi$ での像 $\overline{s}$ のみによっている.

Definition 7.5. このとき、$\overline{s} \in \mathcal{S}_\psi$ に対し、$\langle \overline{s}, \pi \rangle$ を

$$\langle \overline{s}, \pi \rangle = \prod_v \delta(s_v, \pi_v),$$

により定義する. また、それ以外の $\pi = \otimes_v \pi_v$ に対しては、$\langle \overline{s}, \pi \rangle = 0$ と定義する.

Conjecture 7.6. 有限個の素点をのぞき $\rho_v(s_v) = 1$ で、しかも、

$$\prod_v \rho_v(s_v) = 1,$$

が成り立つように ρ_v をとることができる.

よって、

$$\langle \overline{s}, \pi \rangle = \prod_v \langle \overline{s}_v, \pi_v | \rho_v \rangle,$$

が成り立つ.

Definition 7.7. $G(\mathbb{A})$ の既約表現 $\pi = \otimes_v \pi_v$ に対し、

$$m_\psi(\pi) = |\mathcal{S}_\psi|^{-1} \sum_{\overline{s} \in \mathcal{S}_\psi} \epsilon_\psi(\overline{s}) \langle \overline{s}, \pi \rangle,$$

と定義する.

Conjecture 7.8. *$G(\mathbb{A})$ の unitarizable な既約表現 π に対し、r の discrete spectrum における multiplicity を $m_0(\pi)$ であらわすことにする．このとき、*

$$m_0(\pi) = \sum_{\psi \in \Psi(G,\zeta)/\sim} m_\psi(\pi),$$

が成り立つ．

$\mathcal{S}(G)$ を、$G(\mathbb{A})$ 上の関数 $f^G = \prod_v f_v^G$ （但し、$f_v^G \in C_c^\infty(G_v)$ で、しかも、有限個の素点をのぞいて f_v^G は hyperspecial maximal compact subgroup K_v の特性関数）全体からなる集合とする．また、Haar measuer として Tamagawa measure をとる．

Conjecture 7.9. *H を endoscopic group とする．$f^G \in \mathcal{S}(G)$ に対し、ある $f^H \in \mathcal{S}(H)$ が存在し、strongly G-regular な全ての $\gamma_H \in H(F)$ に対し、*

$$\prod_v I^{st}(\gamma_{H_v}, f_v^H) = \prod_v \sum_{\{\gamma_{G_v}\}} \Delta_{G_v,H_v}(\gamma_{H_v}, \gamma_{G_v}) I(\gamma_{G_v}, f_v^G),$$

が成り立つ．

Conjecture 7.10. *$\overline{s} \in \mathcal{S}_\psi$ に対応する endoscopic group を H とする．Local の場合と同様に*

$$f^H(\psi) = \sum_\pi \langle \overline{s}_\psi \overline{s}, \pi \rangle f^G(\pi),$$

が成り立つ．

Remark 7.11. *$G = SL_2$, $G = U(3)$、Saito–Kurokawa lift、Duke–Imamoglu–Ibukiyama–Ikeda lift のいづれの場合の結果もこの予想と矛盾しない．また、$G = SL_n$, $(n > 2)$ のときに、$m_0(\pi) > 1$ となる例が D. Blasius [10] により得られている．*

References

[1] Adams, Jeffrey; Barbasch, Dan; Vogan, David A., Jr. *The Langlands classification and irreducible characters for real reductive groups.* Progress in Mathematics, 104. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1992.

[2] Adams, Jeffrey; Johnson, Joseph F. *Endoscopic groups and packets of nontempered representations.* Compositio Math. 64 (1987), no. 3,271 309.

[3] Arthur, James *On some problems suggested by the trace formula.* Lie group representations, II , 1 49, Lecture Notes in Math., 1041, Springer, Berlin-New York, 1984.

[4] Arthur, James *Unipotent automorphic representations: conjectures.* Orbites unipotentes et représentations, II, Astérisque No. 171-172, (1989), 13 71.

[5] Arthur, James *Unipotent automorphic representations: global motivation.* Automorphic forms, Shimura varieties, and L-functions, Vol. I, 1 75, Perspect. Math., 10, Academic Press, Boston,

[6] Arthur, James; Clozel, Laurent *Simple algebras, base change, and the advanced theory of the trace formula.* Annals of Mathematics Studies, 120. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1989.

[7] Assem, Magdy *On stability and endoscopic transfer of unipotent orbital integrals on p-adic symplectic groups.* Mem. Amer. Math. Soc. 134 (1998), no. 635.

[8] Assem, Magdy *Remarks on the transfer factors for unipotent orbital integrals in p-adic classical split groups.* Compositio Math. 120 (2000), no. 3, 227–290.

[9] Bernšteĭn, I. N.; Zelevinskiĭ, A. V. *Representations of the group $GL(n,F)$, where F is a local non-Archimedean field.* (Russian) Uspehi Mat. Nauk 31 (1976), no. 3(189), 5–70.

[10] Blasius, Don *On multiplicities for* SL(n). Israel J. Math. 88 (1994), no. 1-3, 237–251.

[11] Breulmann, S.; Kuss, M. *On a conjecture of Duke Imamoglu.* Proc. Amer. Math. Soc. 107 (2000).

[12] Cogdell, J. W.; Piatetski-Shapiro, I. I. *Base change for the Saito-Kurokawa representations of* PGSp(4). J. Number Theory 30 (1988), no. 3, 298–320.

[13] Friedberg, Solomon; Gelbart, Stephen; Jacquet, Hervé; Rogawski, Jonathan *Représentations génériques du groupe unitaire à trois variables.* C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 329 (1999), no. 4, 255–260.

[14] Heck, E. *Über Modulfunktionen und die Dirichletschen Reihen mit Eulerscher Produktentwicklung, II.* Math. Ann. Bd. 114 (1937).

[15] Ibukiyama, Tomoyoshi *Conjecture on the lifting of modular forms to Siegel modular forms.* notes.

[16] Ibukiyama, Tomoyoshi; Saito, Hiroshi *On zeta functions associated to symmetric matrices. I. An explicit form of zeta functions.* Amer. J. Math. 117 (1995), no. 5, 1097–1155.

[17] Ikeda, Tamotsu *On the lifting of elliptic cusp forms to Siegel cusp forms of degree $2n$.* preprint.

[18] Ikeda, Tamotsu *On Some Construction of Siegel Cusp Forms: Miyawaki's Conjecture.* preprint.

[19] Jacquet, H.; Langlands, R. P. *Automorphic forms on* GL(2). Lecture Notes in Mathematics, Vol. 114. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1970.

[20] Konno, Takuya *Twisted Endoscopy and the Generic Packet Conjecture.* preprint.

[21] Kottwitz, Robert E. *Stable trace formula: cuspidal tempered terms.* Duke Math. J. 51 (1984), no. 3, 611–650.

[22] Kottwitz, Robert E. *Stable trace formula: elliptic singular terms.* Math. Ann. 275 (1986), no. 3, 365–399.

[23] Kottwitz, Robert E. *Tamagawa numbers.* Ann. of Math. (2) 127 (1988), no. 3, 629–646.

[24] Kottwitz, Robert E.; Shelstad, Diana *Foundations of twisted endoscopy.* Astérisque No. 255, (1999).

[25] Labesse, J.-P. *Cohomologie, L-groupes et fonctorialité.* Compositio Math. 55 (1985), no. 2, 163–184.

[26] Labesse, J.-P.; Langlands, R. P. *L-indistinguishability for* SL(2). Canad. J. Math. 31 (1979), no. 4, 726–785.

[27] Langlands, R. P. *Stable conjugacy: definitions and lemmas.* Canad. J. Math. 31 (1979), no. 4, 700–725.

[28] Langlands. R. P. *Les débuts d'une formule des traces stable.* Publications Mathématiques de l'Université Paris VII. 13. Université de Paris VII. U.E.R. de Mathématiques. Paris. 1983.

[29] Langlands. R. P.; Shelstad. D. *On the definition of transfer factors.* Math. Ann. 278 (1987). no. 1-4. 219 271.

[30] Langlands. R.; Shelstad. D. *Descent for transfer factors.* The Grothendieck Festschrift. Vol. II. 485 563. Progr. Math.. 87. Birkhöuser Boston. Boston. MA. 1990.

[31] Piatetski-Shapiro. I. I. *A remark on my paper: "On the Saito Kurokawa lifting".* Invent. Math. 76 (1984). no. 1. 75 76.

[32] Piatetski-Shapiro. I. I. *On the Saito Kurokawa lifting.* Invent. Math. 71 (1983). no. 2. 309 338.

[33] Rogawski. Jonathan D. *Automorphic representations of unitary groups in three variables.* Annals of Mathematics Studies. 123. Princeton University Press. Princeton. NJ. 1990.

[34] Rogawski. Jonathan D. *The multiplicity formula for A-packets.* The zeta functions of Picard modular surfaces. 395 419. 1992.

[35] Saito. Hiroshi *Explicit form of the zeta functions of prehomogeneous vector spaces.* Math. Ann. 315 (1999). no. 4. 587 615.

[36] Shelstad. D. *L-indistinguishability for real groups.* Math. Ann. 259 (1982). no. 3. 385 430.

[37] Shelstad. D. *Embeddings of L-groups.* Canad. J. Math. 33 (1981). no. 3. 513 558.

[38] Vogan. David A.. Jr. *The local Langlands conjecture.* Representation theory of groups and algebras. 305 379. Contemp. Math.. 145. Amer. Math. Soc.. Providence. RI. 1993.

[39] Vogan. David A.. Jr. *Gelfand-Kirillov dimension for Harish-Chandra modules.* Invent. Math. 48 (1978). no. 1. 75 98.

[40] Waldspurger. J.-L. *Le lemme fondamental implique le transfert.* Compositio Math. 105 (1997). no. 2. 153 236.

[41] Yoshida. Hiroyuki *On representations of finite groups in the space of Siegel modular forms and theta series.* J. Math. Kyoto Univ. 28 (1988). no. 2. 343 372.

[42] Zagier. D. *Sur la conjecture de Saito Kurokawa (d'après H. Maass).* Seminar on Number Theory. Paris 1979 80. pp. 371 394. Progr. Math.. 12. Birkhäuser. Boston. Mass.. 1981.