

# Integer Programming and Gröbner Bases

東海大理 松井 泰子 (Yasuko Matsui)

## 概要

線形計画問題とは、線形不等式制約のもとで線形関数を最小化(または最大化)する問題であり、整数計画問題は、線形計画問題の変数のとる値を整数に限定した問題である。本稿では、線形計画問題や整数計画問題に対する、数理計画の分野で提案されている解法と、トーリックイデアルのグレブナー基底を用いた、それらの問題に対する解法の解説を行う。

## 1 線形計画問題と整数計画問題

### 1.1 線形計画問題

線形計画問題は、与えられた線形不等式制約を満たし、線形の目的関数を最小化(または最大化)する解を求める問題であり、一般に、以下のように定式化される<sup>1</sup>。

$$\begin{aligned} \text{(P) Minimize } & c^T x, \\ \text{subject to } & Ax = b, \\ & x \in R_{\geq 0}^n. \end{aligned}$$

ただし、 $c \in R^n, A \in Z^{d \times n}, b \in R^d$  である。

線形計画問題 (P) で制約条件を満たすベクトル  $x$  を実行可能解という。  $A$  中の線形独立な  $d$ 本の列ベクトルからなる正則行列  $B = [A_{j_1}, \dots, A_{j_d}]$  を  $A$  の基底といい、  $I = \{j_1, \dots, j_d\}$  とする。基底  $B$  に対応する実行可能基底解とは、以下を満たすベクトル  $x$  をいう。

$$\begin{aligned} x_{j_k} &= B^{-1}b \text{の第 } k \text{ 番要素, } k = 1, \dots, d \quad (j_k \in I), \\ x_j &= 0 \quad \text{otherwise.} \end{aligned}$$

ただし、 $A_j$  は  $A$  の第  $j$  列ベクトルである。目的関数  $c^T x$  を最小にする解を最適解といい、 $\text{rank} A = d$  を仮定するならば、最適解は実行可能基底解の中にある。

<sup>1</sup>線形計画問題には、他にも目的関数を最大化する問題、制約式が不等式を含む問題等のバリエーションがあるが、これらの問題も変数変換を行って、上記の標準形に書き表すことが出来る [7].

任意の線形計画問題に対し、その双対となる線形計画問題が定義でき、それぞれ、主問題、双対問題とよばれる<sup>2</sup>。主問題 (P) に対する双対問題 (D) は、以下のように定義できる。

$$(D) \text{ Maximize } \mathbf{b}^T \mathbf{y}, \\ \text{subject to } A^T \mathbf{y} \leq \mathbf{c}.$$

また、主問題と双対問題の最適解には、次の関係が成立することが知られている。

**定理 1 (双対定理)** 線形計画問題の主問題が最適解を持つならば、その双対問題は最適解を持ち、

$$\min\{\mathbf{c}^T \mathbf{x} \mid A\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\} = \max\{\mathbf{b}^T \mathbf{y} \mid A^T \mathbf{y} \leq \mathbf{c}\}$$

が成り立つ。

一般に、線形計画問題 (P) の最適解が、整数解である保証はない。ただし、(P) の制約式の係数行列  $A$  と右辺項  $\mathbf{b}$  がある性質を満たすならば最適整数解を持つことが知られている。

**定義 1** 行列  $A$  が整数行列であり、その任意の小行列の行列式が  $\pm 1$  または  $0$  であるとき、 $A$  を **完全ユニモジュラ行列** (*totally unimodular matrix*) という。

定義から明らかのように、完全ユニモジュラ行列の各要素は、 $\pm 1, 0$  である。完全ユニモジュラ行列の例としては、グラフの接続行列が挙げられる。

**定理 2 (Hoffman [4], Edmonds-Giles [3])** 線形計画問題 (P) の係数行列  $A$  が完全ユニモジュラ行列ならば、任意の整数ベクトル  $\mathbf{b}$  に対し、(P) のすべての基底解は整数解となる。

線形計画問題を解く実用的なアルゴリズムとしては、**シンプレックス法** (simplex method)、**内点法** (interior point method) 等が知られている。シンプレックス法は、任意の実行可能基底解から、目的関数値が減少するように、隣接する実行可能基底解へ移動し、最適解に到達する有限点列を生成する。内点法は、実行可能領域の内部を通過して、最適解に収束する点列を生成する。シンプレックス法、内点法の詳細に関しては、例えば、茨木、福島の著書 [5] を参照されたい。

<sup>2</sup>双対問題の双対問題は、主問題となる。

## 1.2 整数計画問題

整数計画問題は、与えられた線形不等式制約を満たし、線形の目的関数を最小化（または最大化）する整数解を求める問題であり、以下のように定式化される。

$$\begin{aligned} \text{(IP)} \quad & \text{Minimize} \quad \mathbf{c}^\top \mathbf{x}, \\ & \text{subject to} \quad \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \\ & \quad \quad \quad \mathbf{x} \in \mathbf{Z}_{\geq 0}^n. \end{aligned}$$

ただし、 $\mathbf{c} \in \mathbf{R}^n, \mathbf{A} \in \mathbf{Z}^{d \times n}, \mathbf{b} \in \mathbf{R}^d$  であり、 $\text{rank } \mathbf{A} = d$  を仮定する。

もし、整数計画問題 (IP) の制約式の係数行列  $\mathbf{A}$  が完全ユニモジュラ行列であるならば、整数計画問題 (IP) の制約式の  $\mathbf{x}$  の整数性を示す式  $\mathbf{x} \in \mathbf{Z}_{\geq 0}^n$  を  $\mathbf{x} \in \mathbf{R}_{\geq 0}^n$  と線形緩和して得られた線形計画問題 (P) の最適基底解を求めれば、整数計画問題 (IP) の最適整数解を求めることができる。

整数計画問題 (IP) を解く一般的なアルゴリズムとして、分枝限定法 (branch and bound method) が知られている。分枝限定法は、すべての整数解のなかで、最適整数解を与える可能性のあるものを組織的に生成しテストを加えるアルゴリズムである。他に、切除平面法 [6]、代数のアプローチで整数計画問題を解くアルゴリズムとして、トーリックイデアルのグレブナー基底を用いた手法 [2] 等が知られている。

以降では、トーリックイデアルのグレブナー基底を用いた整数計画問題の解の求め方について触れる。

## 2 整数計画問題とグレブナー基底

1991年、Conti-Traverso は、整数計画問題 (IP) の最適解が一意であるとき、それを解くトーリックイデアルのグレブナー基底を用いたアルゴリズムを提案した [2]。以下にアルゴリズムの概略を述べる。

### 整数計画問題 (IP) を解く Conti-Traverso のアルゴリズム

- (1)  $\mathbf{A}$  のトーリックイデアル  $I_{\mathbf{A}}$  のある項順序に対する簡約グレブナー基底  $\mathcal{G}_c$  を計算する。
- (2)  $\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{b}$  を満たす、任意の実行可能な整数解  $\mathbf{u}$  を求める。
- (3)  $\mathcal{G}_c$  により  $\mathbf{x}^{\mathbf{u}}$  を簡約する。簡約して得られた  $\mathbf{x}^{\mathbf{v}}$  が、一意な最適解である。

彼らのアルゴリズムは、任意の実行可能な整数解から、トーリックイデアルを用いて簡約を行い、normal form を計算している。ここで簡約操作は、幾何的には以下のように解釈

できる。すなわち、トーリックイデアルの簡約グレブナー基底の各要素に対応するベクトルを用いて、任意の実行可能な(最適ではない)整数解から、整数点を辿るパスを生成しながら、最適解に到達することに対応付けられる。

Conti-Traverso のアルゴリズムは、整数計画問題の実行可能な整数解から探索を開始し、最適解までの到達に組合せ的な操作がある。さらに、アルゴリズムの終了後、整数計画問題の実行可能領域内の整数点を列挙できる点が興味深い。すなわち、最適解が得られたら、前出のパスを逆方向に全探索することによって、整数計画問題の実行可能領域中の、すべての整数点を列挙することが可能である。この列挙方法は、Avis-福田が提案した、逆探索法 (Reverse search technique) [1] と同様の枠組みである。整数計画問題を解く代数的な手法としては、他に超幾何級数を用いて解くアルゴリズムが挙げられるだろう。最近、整数計画問題の最適解が一意でない場合に、GKZ 超幾何級数を用いて最適解を求める方法が、斎藤らによって提案された [8] ので、参照されたい。

今後の課題としては、グラフの問題を解くアルゴリズムとトーリックイデアルの簡約グレブナー基底との関連の解明や、計算量の解析が挙げられるだろう。

## 参考文献

- [1] Avis, D. and Fukuda, K.: Reverse Search for Enumeration, *Discrete Appl. Math.*, **65**(1996) 21–46.
- [2] Conti, P. and Traverso, C.: Buchberger algorithm and integer programming, *Proceedings AAEECC - 9 (New Orleans)*, Springer Verlag, LNCS **539**(1991) 130–139.
- [3] Edmonds, J. and Giles, R.: A min-max relation for submodular function on graphs, *Ann. Discrete Math.*, **1**(1977) 185–204.
- [4] Hoffman, A. J.: A generalization of max-flow min-cut, *Math. Programming*, **6** (1974) 352–359.
- [5] 茨木 俊秀, 福島 雅夫: 最適化の手法 情報数学講座 第14巻, 共立出版社 (1993).
- [6] 今野 浩, 鈴木 久敏編: 整数計画法と組合せ最適化 ORライブラリー7, 日科技連 (1982).

- [7] Papadimitriou, C. H. and Steiglitz, I.: *Combinatorial Optimization - Algorithms and Complexity* -. Prentice Hall, Inc., New Jersey (1982), the Dover edition, Dover Publications, Inc. (1998).
- [8] Saito, M., Strumfels, B. and Takayama, N.: *Gröbner Deformations of Hypergeometric Differential Equations, – Algorithms and Computation in Mathematics 6 –*, Springer Verlag(2000).
- [9] Schrijver, A.: *Theory of linear and integer programming*, John Wiley and Sons(1987).
- [10] Thomas, R. R.: *Applications to Integer Programming, Proceedings of Symposia in Applied Mathematics*, in *Applications of Computatinal Algebraic Geometry*, (D. A. Cox and B. Sturmfels eds.), American Mathematical Society **53**(1997) 119 – 141.
- [11] Thomas, R. R.: *Gröbner Bases in Integer Programming*, in *Handbook of Combinatorial Optimization*, (D. -Z. Du and P. M. Pardalos eds.), Kluwer Academic Publishers **1**(1998) 533 – 572.