数理解析研究所講究録
1176 巻 2000 年 1-4

ANALYTIC SOLUTIONS TO NONLINEAR SCHRÖDINGER EQUATIONS

加藤 圭一（東京理科大・理）(KEIICHI KATO)

1. INTRODUCTION

次の空間1次元非線形 Schrödinger 方程式

$$(1) \qquad \begin{cases} i\partial_t u - \partial_x^2 u &= f(u), \\ u(0,x) &= \phi(x), \end{cases}$$

を考える。本講演で考察する問題は、ϕがどのような条件の下で、解uが実解析的になるかという問題である。Hayashi-Saitoh[5] により、初期値ϕが$\|e^{a|x|}\phi\| < \infty$を満たす時、解$u$は、$t \neq 0$で実解析的になることがわかっている。一方、Hayashi-Kato[3], Taniguchi-Kato[7] において、$\|(x\partial_x)^k\phi\| \leq CA^l l!$が任意の自然数$l$で満たされれば、(1) は$t \neq 0$で時空間変数に関し実解析的になることを示している。ただし、$\|\cdot\|$は、(1) の初期値問題を解くことができる適当な Sobolev ノルムである。

本講演では、後者と同様のことを解析接続を用いて示すことを目標とする。主結果は以下の通りである。簡単のため、$f(u) = u^2$とする。初期値ϕに次の条件を仮定する。

Assumption 1. 初期値ϕはその *Fourier* 変換$\hat{\phi}$がある正数$A > 0$に対し$\Omega_A = \{\xi + i\eta \in \mathbb{C}; 0 < \eta < A\xi \ or \ A\xi < \eta < 0\}$で正則で、

$$\sup_{0 \leq a \leq A} \|\langle\xi\rangle\hat{\phi}(\xi - ia\xi)\|_{L^2_\xi} < \infty,$$

かつ、任意の$\epsilon > 0$に対し、

$$\sup_{\epsilon \leq a \leq A-\epsilon} \|\partial_\xi\hat{\phi}(\xi - ia\xi)\|_{L^2_\xi} < \infty.$$

ここで、$\langle\xi\rangle = (1+\xi^2)^{1/2}$.

Theorem 1. 上記 *Assumption1* を仮定する。そのとき、ある$T > 0$が存在して(1) の解uが$C([0,T];H^1)$で一意的に存在し、さらに$\exists B > 0$が存在し、uは$|x| < Bt$において実解析的。

Remark 1. この結果は部分的なものであり、この条件の下で解uは$\mathbb{R}$上で実解析的であると期待される。以下の証明では、Bを任意に大きくとることはできない。

Remark 2. *Hayashi-Kato*[3], *Taniguchi-Kato*[7] では、空間次元が *1* 次元の場合には初期値の条件として原点以外（あるいはある *1* 点以外）は解析的を仮定している。*Assumption1* では、複数の点が解析的でなくてもよい。

2. 証明の方針

証明は以下の 3 つのステップで行なう。

(ステップ 1)

(1) を解くことは、次の積分方程式を解くことに帰着される。

$$\hat{u}(t,\xi) = e^{it\xi^2}\hat{\phi}(\xi) + i\int_0^t e^{i(t-s)\xi^2}\hat{u} * \hat{u}(s,\xi)ds. \tag{2}$$

もし、$\hat{u}(t,\xi)$ が Ω_A まで解析接続できると仮定すると形式的に方程式(2) は次のようになる。

$$\begin{aligned}\hat{u}(t,\xi-ia\xi) &= e^{it(\xi-ia\xi)^2}\hat{\phi}(\xi-ia\xi)\\ &\quad + i(1-ia)\int_0^t e^{i(t-s)(\xi-ia\xi)^2}\hat{u} * \hat{u}(s,\xi-ia\xi)ds.\end{aligned} \tag{3}$$

$\tilde{u}_a(t,\xi) = \hat{u}(t,\xi-ia\xi)$ とおくと、積分方程式

(4)

$$\tilde{u}_a(t,\xi) = e^{it(\xi-ia\xi)^2}\hat{\phi}(\xi-ia\xi) + i(1-ia)\int_0^t e^{i(t-s)(\xi-ia\xi)^2}\tilde{u}_a * \tilde{u}_a(s,\xi)ds,$$

が得られる。(4) の解を次のように逐次近似で求める。

$$\tilde{u}_a^{(0)}(t,\xi) = e^{it(\xi-ia\xi)^2}\hat{\phi}(\xi-ia\xi), \tag{5}$$

(6)

$$\begin{aligned}\tilde{u}_a^{(N)}(t,\xi) &= e^{it(\xi-ia\xi)^2}\hat{\phi}(\xi-ia\xi)\\ &\quad + i(1-ia)\int_0^t e^{i(t-s)(\xi-ia\xi)^2}\tilde{u}_a^{(N-1)} * \tilde{u}_a^{(N-1)}(s,\xi)ds.\end{aligned}$$

各 $0 < a < A$ について、関数空間

$$X_a = \{f(t,\xi) \in C([0,T],L^2) \mid \|f\|_{X_a} < \infty\}$$

を用意する。ここで、

$$\|f\|_{X_a} = \sup_{0\le t\le T}\max\left\{\|e^{4at|\xi|}\langle\xi\rangle f(t,\xi)\|_{L^2_\xi},\ \|e^{4at|\xi|}\partial_\xi f(t,\xi)\|_{L^2_\xi}\right\}$$

とする。各 $0 < a < A$ に対し、積分方程式(4) を解く。これは、通常の縮小写像の原理を用いて解くことができる。

(ステップ 2)

$U(t,\xi-ia\xi)=\tilde{u}_a(t,\xi)$ と置き、$U(t,\zeta)$ が Ω_A で正則であることを示す。このために、次の 2 つの補題を用意する。

Lemma 1. $g(\zeta) = g(\xi - ia\xi)$ が Ω_A で正則かつ $0 < a < A$ に対し、$g(\xi-ia\xi)$, $\partial_\xi[g(\xi-ia\xi)]$, $\xi g(\xi-ia\xi) \in L^2_\xi$ とする。このとき、

$$F(\xi,a) = (1-ia)\int_{-\infty}^{\infty} g((\xi-\eta)-ia(\xi-\eta))g(\eta-ia\eta)d\eta$$

に対して、$\tilde{F}(\zeta)=\tilde{F}(\xi-ia\xi)=F(\xi,a)$ と定めると $\tilde{F}(\zeta)$ は Ω_A で正則。

Lemma 2. K を Ω_A のコンパクト集合とすると、$0 \le t \le T$ に対し、$\tilde{u}_a^{(N)}(t,\xi)$ は K 上一様収束する。

（証明は略）

(ステップ 3)

ステップ 2 の結果から、解の積分表示

$$u(t,x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{it\xi^2}\hat{\phi}(\xi)e^{ix\xi}d\xi + \frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^t e^{i(t-s)\xi^2}\hat{u}*\hat{u}(s,\xi)e^{ix\xi}dsd\xi$$

において、$|x| < \exists Bt$ なら ξ に関する積分路を $\Gamma_a = \{\xi - ia\xi; \xi \in \mathbb{R}\}$ に取り換えることができて

$$(7)\quad u(t,x) = (1-ia)/2\pi\int_{-\infty}^{\infty} e^{it(\xi-ia\xi)^2}\hat{\phi}(\xi)e^{ix(\xi-ia\xi)}d\xi$$

$$+\, i(1-ia)^2/2\pi\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^t e^{i(t-s)(\xi-ia\xi)^2}\hat{u}*\hat{u}(s,\xi-ia\xi)e^{ix(\xi-ia\xi)}dsd\xi,$$

と表すことができる。第1項は、$|e^{it(\xi-ia\xi)^2}| = e^{-2at\xi^2}$ だから積分路の変更ができることは明らか。第2項は、t に関する積分を $\int_0^{t-\delta}$ と $\int_{t-\delta}^t$ に分けて考える。$\int_0^{t-\delta}$ においては、$|e^{i(t-s)(\xi-ia\xi)^2}| \le e^{-2(t-s)a\xi^2} \le e^{-2\delta a\xi^2}$ だから、$\forall x \in \mathbb{R}$ に対し、積分路の変更ができる。$\int_{t-\delta}^t$ においては、$|\hat{u}*\hat{u}(s,\xi-ia\xi)| = e^{-4as|\xi|}\times|L^1-function| \le e^{-4a(t-\delta)|\xi|}\times|L^1-function|$ だから、$|ax\xi| < |4a(t-\delta)\xi|$ すなわち、$B=4$ ととれば、$|x| < Bt$ で積分路の変更ができる。

(7) において、x に関して定義域を x の複素近傍に拡張することができるから $|x| < Bt$ で実解析的であることがわかる。

References

[1] de Bouard, A., *Analytic solutions to non-elliptic nonlinear Schrödinger equations* , J. Diff. Equations, **104**, (1993) 196-213.

[2] de Bouard, A., Hayashi, N., Kato, K. *Regularizing effect for the (generalized) Korteweg de Vries equation and nonlinear Schrödinger equations*, Ann.Inst. H.Poincaré, Analyse non linéaire, **9** (1995), 673–725.

[3] Hayashi, N., Kato, K *Regularity in time of solution to nonlinear Schrödinger equations,* J. Funct. Anal. **128** (1995), 253–277.

[4] Hayashi, N., Kato, K *Analyticity in time and smoothing effect of solutions to nonlinear Schrödinger equations,* Comm. Math. Phys. **184** (1997), 273–300.

[5] Hayashi, N., Saitoh, S. *Analytichity and smoothing effect for the Schrödiner equation,* Ann. Inst. H. Poincaré, Phys. Théor. **52** (1990), 163–173.

[6] Kato, K., Ogawa, T., *Analyticity and Smoothing Effect for the Korteweg de Vries Equation with a single point singularity*, Math. Annalen, (2000), to appear.

[7] Kato, K., Taniguchi, K., *Gevrey regularizing effect for nonlinear Schrödinger equations*, Osaka J. Math., **33** (1996), 863–880.

[8] Kato, T., Masuda, K., *Nonlinear evolution equations and analyticity I,* Ann.Inst.Henri Poincaré. Analyse non linéaire, **3** no. 6 (1986), 455–467.

[9] Ukai, S. *Local solutions in Gevrey classes to the nonlinear Boltzmann equation without cutoff.* Japan J. Appl. Math., **1** (1984), 141-156.