

# Fundamental groups of Galois coverings of the projective plane

東北学院大学教養学部 土橋 宏康 (Hiroyasu Tsuchihashi)

$\pi : X \rightarrow \mathbf{P}^2$  を  $\mathbf{P}^2$  のガロア被覆とし,  $\mu : \tilde{X} \rightarrow X$  を  $X$  の特異点解消とする. 本稿の目的は  $\pi$  の分岐点集合がある条件を満たすときに  $\tilde{X}$  の基本群の計算方法を与えることである.

$B$  を  $\pi$  の分岐点集合,  $Y^\circ := \mathbf{P}^2 \setminus B$ ,  $X^\circ := \pi^{-1}(Y^\circ)$  とすれば, 次の完全列がある.

$$1 \rightarrow \pi_1(X^\circ) \rightarrow \pi_1(Y^\circ) \rightarrow \text{Gal}(X/\mathbf{P}^2) \rightarrow 1$$

一方,  $X$  の特異点は  $\pi^{-1}(\text{Sing}(B))$  の上にしか現れないから,  $X^\circ$  は  $\tilde{X}$  の開集合としてよい. 従って,  $\pi_1(X^\circ)$  から  $\pi_1(\tilde{X})$  の上への準同型写像がある. この準同型写像の核を  $H$  とする. 即ち, 次の完全列がある.

$$1 \rightarrow H \rightarrow \pi_1(X^\circ) \rightarrow \pi_1(\tilde{X}) \rightarrow 1$$

$H$  は  $\pi_1(Y^\circ)$  の正規部分群でもあることがわかるので

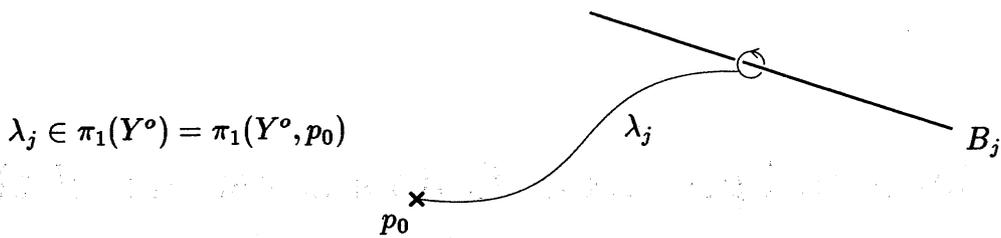
$$\pi_1(\tilde{X}) \simeq \ker[\pi_1(Y^\circ)/H \rightarrow \text{Gal}(X/\mathbf{P}^2)]$$

となる.  $B$  がある条件を満たす曲線の場合は難波 [6] により  $\pi_1(Y^\circ)$  が計算できるので  $H$  が計算できれば  $\pi_1(\tilde{X})$  も計算できる.

以下,  $X$  が非特異の場合, 有理特異点のみをもつ場合, 一般の場合に分けて  $H$  の計算法について説明する.

## 1 $X$ が非特異の場合

$B_1, B_2, \dots, B_l$  を  $\pi$  の分岐点集合  $B = \{y \in \mathbf{P}^2 \mid \#\pi^{-1}(y) < \deg(\pi)\}$  の既約成分とし,  $r_j$  を  $\pi$  の  $B_j$  に沿った分岐次数とする. また,  $\lambda_j$  を  $B_j$  の回りを正方向に一回転する  $\pi_1(Y^\circ)$  の投げ縄とし,  $J$  を  $\{\lambda_j^r \mid 1 \leq j \leq l\}$  を含む  $\pi_1(Y^\circ)$  の最小の正規部分群とする. このとき, 明らかに  $J$  は  $H$  に含まれるが, 次の定理により  $X$  が非特異のときには  $\pi_1(X)$  は  $\pi_1(Y^\circ)/J \rightarrow \text{Gal}(X/\mathbf{P}^2)$  の核に同型となることがわかる.



**定理 1.**  $X$  が非特異のとき,  $J = H$ .

**証明**  $C_1, C_2, \dots, C_m$  を  $\pi^{-1}(B)$  の既約成分とし,  $\sigma_i$  を  $C_i$  の回りを正方向に一回転する  $\pi_1(X^o)$  の投げ縄とする.  $X$  は非特異であるから,  $H$  は  $\{\sigma_i | 1 \leq i \leq m\}$  を含む  $\pi_1(X^o)$  の最小の正規部分群となる ([2], p.124 参照).  $\pi(C_i) = B_j$  ならば  $B_j$  の回りを正方向に一回転する  $\pi_1(Y^o)$  の投げ縄  $\lambda_j$  で  $\pi_*\sigma_i = (\lambda_j)^{r_j}$  となるものがある. この  $\lambda_j$  は  $\lambda_j$  の共役元である. 従って,  $\pi_*\sigma_i \in J$  である. ■

次に,  $X$  がいつ非特異になるか考える.  $\{x_1, x_2, \dots, x_s\}$  を  $B$  の特異点の集合とする.  $V_j$  を  $x_j$  の単連結な開近傍とし,  $U_j$  を  $\pi^{-1}(V_j)$  の連結成分の一つとする. このとき,  $V_j$  を十分小さくとり,  $x_j \notin B_i$  ならば  $V_j \cap B_i = \emptyset$  としてよい.  $V_j^o := V_j \setminus B, U_j^o := U_j \setminus \pi^{-1}(B)$  とすれば次の可換図が成り立つ.

$$\begin{array}{ccccccc}
 1 & \longrightarrow & \pi_1(U_j^o) & \longrightarrow & \pi_1(V_j^o) & \longrightarrow & \text{Gal}(U_j/V_j) \longrightarrow 1 \\
 & & \downarrow \phi_j & & \downarrow & & \downarrow \\
 1 & \longrightarrow & \pi_1(X^o) & \longrightarrow & \pi_1(Y^o) & \longrightarrow & \text{Gal}(X/\mathbb{P}^2) \longrightarrow 1
 \end{array} \tag{1}$$

このとき, 三番目の  $\downarrow$  は単射である. 従って,  $\pi_1(U_j^o) = \ker[\pi_1(V_j^o) \rightarrow \pi_1(Y^o) \rightarrow \text{Gal}(X/\mathbb{P}^2)]$  となる.  $B'_1, \dots, B'_n$  を  $V_j \cap B$  の既約成分,  $\eta_{jk}$  を  $V_j \cap B'_k$  の回りを正方向に一回転する  $\pi_1(V_j^o)$  の投げ縄とする.  $J_j$  を  $\{(\eta_{jk})^{r'_k} | 1 \leq k \leq n\}$  を含む  $\pi_1(V_j^o)$  の最小の正規部分群とする. ここで,  $r'_k$  は  $\pi|_{U_j}$  の  $B'_k$  に沿った分岐次数, 即ち,  $B'_k \subset B_i$  ならば  $r'_k = r_i$  である.  $U_j \setminus \pi|_{U_j}^{-1}(x_j)$  は非特異であるから, 次の完全列がある.

$$1 \longrightarrow J_j \longrightarrow \pi_1(U_j^o) \longrightarrow \pi_1(U_j \setminus \pi|_{U_j}^{-1}(x_j)) \longrightarrow 1 \tag{2}$$

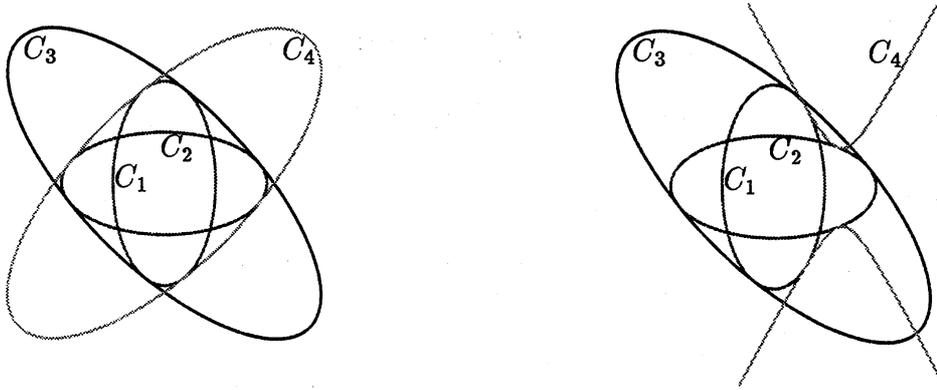
**命題 2.**  $U_j$  が非特異であるための必要十分条件は  $J_j$  が合成写像  $\pi_1(V_j^o) \rightarrow \pi_1(Y^o) \rightarrow \text{Gal}(X/\mathbb{P}^2)$  の核に一致することである.

**証明** [4] の Theorem(p5) により,  $U_j$  が非特異であるための必要十分条件は  $\pi_1(U_j \setminus \text{Sing}(U_j)) = 1$  となることである. この条件は (2) により  $J_j = \pi_1(U_j^o)$  となることと同値である. ■

例えば,  $B_1$  と  $B_2$  が  $x_1$  で  $k$  位の接触をしていて,  $B$  の他の既約成分は  $x_1$  を通らないとする. このとき,  $\pi_1(V_1^o)$  は  $(\beta_1\beta_2)^k = (\beta_2\beta_1)^k$  を満たす二つの元  $\beta_1$  と  $\beta_2$  で生成される ( $\beta_i$  は  $B_i$  の回りを正方向に一回転する投げ縄である).  $r_1 = r_2 = 2$  と仮定すると  $J_1$

は  $\beta_1^2, \beta_2^2$  を含む  $\pi_1(V_1^\circ)$  の最小の正規部分群であるから,  $\pi_1(V_1^\circ)/J_1$  は位数  $4k$  の二面体群  $D_{4k}$  に同型になる. 従って, 上の命題により,  $U_1$  が非特異となるための必要十分条件は  $1 \leq j < 2k$  ならば  $(\beta_1\beta_2)^j \notin \ker[\pi_1(V_1^\circ) \rightarrow \pi_1(Y^\circ) \rightarrow \text{Gal}(X/\mathbf{P}^2)]$  となることである.

例 1 [7]  $C$  を下図のような配置の四つの conic からなる曲線とする.



難波 [6] の方法により計算するとつぎの結果が得られる. 右図の場合

$$\begin{aligned} \pi_1(\mathbf{P}^2 \setminus C, p_0) = \langle \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4 \mid & (\beta_1\beta_2\beta_3\beta_4)^2 = 1, \quad (\beta_3\beta_1)^2 = (\beta_1\beta_3)^2, \\ & (\beta_4\beta_1)^2 = (\beta_1\beta_4)^2, \quad (\beta_3\beta_2)^2 = (\beta_2\beta_3)^2, \quad (\beta_4\beta_2)^2 = (\beta_2\beta_4)^2, \\ & \beta_2\beta_1 = \beta_1\beta_2, \quad (\beta_4^{-1}\beta_3^{-1}\beta_2\beta_3\beta_4)\beta_1 = \beta_1(\beta_4^{-1}\beta_3^{-1}\beta_2\beta_3\beta_4), \\ & (\beta_3^{-1}\beta_2\beta_3)\beta_1 = \beta_1(\beta_3^{-1}\beta_2\beta_3), \quad (\beta_4^{-1}\beta_2\beta_4)\beta_1 = \beta_1(\beta_4^{-1}\beta_2\beta_4), \\ & \underline{\beta_3\beta_4 = \beta_4\beta_3}, \quad \underline{(\beta_1^{-1}\beta_2^{-1}\beta_4\beta_2\beta_1)\beta_3 = \beta_3(\beta_1^{-1}\beta_2^{-1}\beta_4\beta_2\beta_1)}, \\ & (\beta_1^{-1}\beta_4\beta_1)\beta_3 = \beta_3(\beta_1^{-1}\beta_4\beta_1), \quad (\beta_2^{-1}\beta_4\beta_2)\beta_3 = \beta_3(\beta_2^{-1}\beta_4\beta_2)}. \end{aligned}$$

となり, 左図の場合は上の関係式の中で下線を引いたものを取り除いたものとなる.  $\beta_i$  は上図の conic  $C_i$  の回りを一回転する投げ縄である.  $G = \langle \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \mid \gamma_1^2 = \gamma_2^2 = \gamma_3^2 = 1, \gamma_1\gamma_2 = \gamma_2\gamma_1, (\gamma_1\gamma_3)^2 = (\gamma_3\gamma_1)^2 = (\gamma_2\gamma_3)^2 = (\gamma_3\gamma_2)^2 \rangle$  とすれば  $|G| = 16$  であり,  $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$  をそれぞれ  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_3$  に移す  $\pi_1(\mathbf{P}^2 \setminus C)$  から  $G$  の上への準同型写像がある. 従って, Grauert-Remmert[1] の定理により被覆変換群が  $G$  に同型で  $C$  で分岐するガロア被覆  $\pi: X \rightarrow \mathbf{P}^2$  があることがわかる. さらに  $\gamma_i^2 = 1$  であるから  $C$  の各既約成分  $C_i$  に沿っての分岐次数は 2 である. 従って,  $J$  は  $\beta_1^2, \beta_2^2, \beta_3^2, \beta_4^2$  を含む最小の正規部分群である. また, 左図の場合は命題 2 により,  $X$  は非特異であることもわかる. 従って, 定理 1 により  $\pi_1(X) \simeq \ker[\pi_1(\mathbf{P}^2 \setminus C)/J \rightarrow G]$  となる. [3] の方法で計算して次の結果が得られる.

定理 3. 左図の場合  $\pi_1(X) \simeq \mathbf{Z}^{\oplus 4}$  である.

お詫び: 講演では右図の場合も  $X$  が非特異になると言ってしまいましたが,  $\pi_1(\mathbf{P}^2 \setminus C)$  から  $G$  への準同型写像で  $\beta_3\beta_4$  が単位元に移されるので  $X$  は特異点を持ちます. お詫びして訂正します. なお,  $G$  を上の  $\pi_1(\mathbf{P}^2 \setminus C)$  に  $\beta_1^2 = \beta_2^2 = \beta_3^2 = \beta_4^2 = 1$  という関係式を付け加えた群とすれば, [7] に書いたように  $X$  は非特異, 単連結となります.

## 2 $X$ が有理特異点のみをもつ場合

前節の記号をそのまま使う.  $C_1, C_2, \dots, C_m$  を  $(\pi \circ \mu)^{-1}(B)$  の既約成分とし,  $\sigma_i$  を  $C_i$  の回りを正方向に一回転する  $\pi_1(X^\circ)$  の投げ縄とすれば,  $H$  は  $\{\sigma_i | 1 \leq i \leq m\}$  を含む  $\pi_1(X^\circ)$  の最小の正規部分群となる ([2], p.124 参照).  $\widetilde{U}_j = \mu^{-1}(U_j)$  とし  $H_j$  を上への準同型写像  $\pi_1(U_j^\circ) \rightarrow \pi_1(\widetilde{U}_j)$  の核とする. 即ち, 次の完全列がある.

$$1 \longrightarrow H_j \longrightarrow \pi_1(U_j^\circ) \longrightarrow \pi_1(\widetilde{U}_j) \longrightarrow 1 \quad (3)$$

$\text{Sing}(U_j) \subset \pi_{|\widetilde{U}_j}^{-1}(x_j)$  であるから (2) より次の完全列が得られる.

$$1 \longrightarrow H_j/J_j \longrightarrow \pi_1(U_j \setminus \text{Sing}(U_j)) \longrightarrow \pi_1(\widetilde{U}_j) \longrightarrow 1 \quad (4)$$

**命題 4.**  $H$  は  $\bigcup_{j=1}^s \phi_j(H_j)$  を含む  $\pi_1(Y^\circ)$  の最小の正規部分群に等しい.

**証明** 明らかに  $\pi_1(Y^\circ)$  の任意の元  $g$  に対して  $g\phi_j(H_j)g^{-1} \subset H$  である. 従って,  $C_k$  の回りを一回転する投げ縄  $\vartheta_k$  が  $\bigcup_{j=1}^s \phi_j(H_j)$  に含まれる元に共役であることを示せばよい.  $(\pi \circ \mu)(C_k)$  は一次元の場合は  $B_1, B_2, \dots, B_l$  の一つに一致し, 一点につぶれる場合は  $B$  の特異点  $x_1, x_2, \dots, x_s$  の一つに一致する.

最初に  $(\pi \circ \mu)(C_k) = B_i$  と仮定する.  $B_i$  の回りを一回転する  $\pi_1(Y^\circ)$  の投げ縄  $\eta_i^r$  で  $\vartheta_k = (\eta_i^r)^{r_i}$  となるものがある.  $\text{Sing}(B) \cap B_i \neq \emptyset$  であるから,  $x_j \in B_i$  となる  $B$  の特異点  $x_j$  がある. このとき,  $(\eta_i^r)^{r_i}$  は  $\phi_j(H_j)$  のある元に共役となる.

次に  $(\pi \circ \mu)(C_k) = x_j$  と仮定する. このとき  $C_k$  は  $\pi^{-1}(V_j)$  の連結成分の一つ  $U_j'$  の  $\mu$  による逆像  $\mu^{-1}(U_j')$  に含まれる.  $g$  を  $\hat{g}U_j = U_j'$  を満たす  $\pi_1(Y^\circ)$  の元とする. ここで  $\hat{g}$  は上への準同型写像  $\pi_1(Y^\circ) \rightarrow \text{Gal}(X/\mathbf{P}^2)$  による  $g$  の像である. すると  $g^{-1}\vartheta_k g$  は例外集合  $\mu^{-1}(\pi^{-1}(x_j) \cap U_j)$  の既約成分  $\hat{g}^{-1}(C_k)$  の回りを一回転する投げ縄である. 従って,  $g^{-1}\vartheta_k g$  は  $\phi_j(H_j)$  の元の一つに共役である. ■

**補題 5.**  $\pi_{|\widetilde{U}_j}^{-1}(x_j)$  が  $U_j$  の有理特異点のとき  $\pi_1(\widetilde{U}_j) = 1$ .

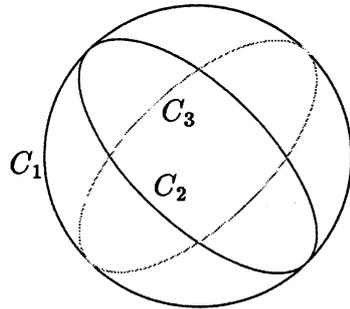
**証明**  $\widetilde{U}_j \rightarrow U_j$  の例外集合は有理曲線のみからなり, その双対グラフは木である. 従って, [4] の p12 より  $\pi_1(\widetilde{U}_j) = 1$  となる. ■

(1) と (3) より次の系が従う.

**系 6.**  $X$  が有理特異点のみを持つとき,  $H$  は  $\bigcup_{j=1}^s \phi_j(\ker[\pi_1(V_j^\circ) \rightarrow \pi_1(Y^\circ) \rightarrow \text{Gal}(X/\mathbf{P}^2)])$  を含む  $\pi_1(Y^\circ)$  の最小の正規部分群に等しい.

上の系により,  $X$  が有理特異点のみを持つときは  $H_j$  を計算する必要がないことがわかる.

例 2  $C$  を下図のような配置の三つの conic からなる曲線とする.



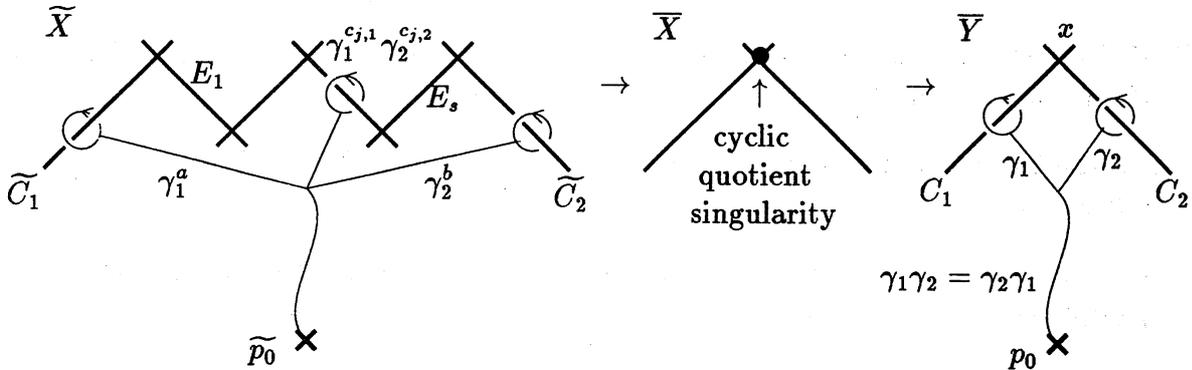
難波 [6] の方法により計算すると次の結果が得られる.

$$\pi_1(\mathbf{P}^2 \setminus C, p_0) = \langle \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \mid (\gamma_1\gamma_2)^2 = (\gamma_2\gamma_1)^2, (\gamma_1\gamma_3)^2 = (\gamma_3\gamma_1)^2, \gamma_2\gamma_3 = \gamma_3\gamma_2, (\gamma_1\gamma_2\gamma_1^{-1})\gamma_3 = \gamma_3(\gamma_1\gamma_2\gamma_1^{-1}) \rangle$$

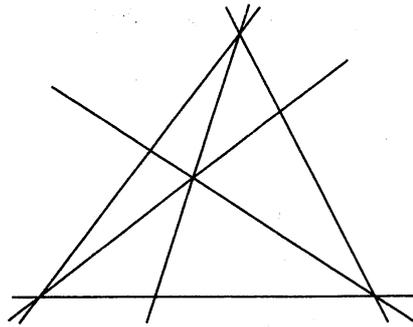
( $\gamma_i$  は  $C_i$  の回りを正方向に一回転する投げ縄である).  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  をそれぞれ  $(1, 1), (1, 0), (0, 1)$  へ移す  $\pi_1(\mathbf{P}^2 \setminus C)$  から  $\mathbf{Z}_2 \oplus \mathbf{Z}_2$  (resp.  $\mathbf{Z}_3 \oplus \mathbf{Z}_3$ ) の上への準同型写像がある. 従って, 前節と同様にして被覆変換群が  $\mathbf{Z}_2 \oplus \mathbf{Z}_2$  (resp.  $\mathbf{Z}_3 \oplus \mathbf{Z}_3$ ) に同型で  $C$  に沿って分岐次数 2 で分岐するガロア被覆  $\pi : X \rightarrow \mathbf{P}^2$  があることがわかる.  $X$  は有理特異点しか持たない ([8] 参照) ので, 系 6 により,  $H$  は  $\gamma_1^2, \gamma_2^2, \gamma_3^2, \gamma_1\gamma_2\gamma_1^{-1}\gamma_2^{-1}, \gamma_1\gamma_3\gamma_1^{-1}\gamma_3^{-1}$  を含む  $\pi_1(\mathbf{P}^2 \setminus C)$  の最小の正規部分群であることがわかる. 従って, [3] の方法で計算して  $\pi_1(\tilde{X}) \simeq \mathbf{Z}_2$  (resp.  $\mathbf{Z}_3$ ) となることがわかる.

### 3 一般の場合

$\nu : \bar{Y} \rightarrow \mathbf{P}^2$  を分岐点集合  $B$  の embedded resolution とする.  $\bar{X}$  を  $X \times_{\mathbf{P}^2} \bar{Y}$  の正規化とする. このとき  $\bar{X}$  は巡回商特異点しか持たない. また,  $\tilde{X}$  は  $\bar{X}$  の特異点解消としてよい. 従って,  $\nu^{-1}(B)$  の各二重点  $x$  に対して  $x$  で交わる  $\nu^{-1}(B)$  の二つの既約成分  $C_1, C_2$  の回りを一回転する投げ縄を  $\pi_1(\mathbf{P}^2 \setminus B)$  の元として具体的に書ければ, 前節の方法と同様にして  $H$  が計算できる.



例 3  $C$  を下図のような配置の  $\mathbf{P}^2$  の 6 直線とする.



このとき, 難波 [6] により,

$$\pi_1(\mathbf{P}^2 \setminus C, p_0) = \langle \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, \gamma_5 \mid \begin{aligned} &\gamma_5\gamma_3\gamma_1 = \gamma_3\gamma_1\gamma_5 = \gamma_1\gamma_5\gamma_3, \gamma_5\gamma_4 = \gamma_4\gamma_5, \\ &\gamma_2\gamma_1 = \gamma_1\gamma_2, \gamma_4\gamma_3\gamma_2 = \gamma_3\gamma_2\gamma_4 = \gamma_2\gamma_4\gamma_3 \end{aligned} \rangle$$

である.  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_5$  を 1 に移す  $\pi_1(\mathbf{P}^2 \setminus C)$  から  $\mathbf{Z}_3$  の上への準同型写像がある. 従って,  $\text{Gal}(X/\mathbf{P}^2) \simeq \mathbf{Z}_3$  となるガロア被覆  $\pi: X \rightarrow \mathbf{P}^2$  がある. このとき, 上記の方法で計算すると  $H$  は

$\{\gamma_1\gamma_3\gamma_5, \gamma_2\gamma_3\gamma_4, \gamma_2\gamma_5\gamma_6, \gamma_1\gamma_4\gamma_6, \gamma_1^2\gamma_2, \gamma_1\gamma_2^2, \gamma_4^2\gamma_5, \gamma_4\gamma_5^2, (\gamma_2^{-1}\gamma_3\gamma_2)^2\gamma_6, (\gamma_2^{-1}\gamma_3\gamma_2)\gamma_6^2\}$   
 $(\gamma_6 = (\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4\gamma_5)^{-1})$  を含む  $\pi_1(\mathbf{P}^2 \setminus C)$  の最小の正規部分群であることがわかる. 従って, [3] の方法で計算して  $\pi_1(\bar{X}) \simeq \mathbf{Z}_3$  となることがわかる.

## 参考文献

- [1] H. Grauert and R. Remmert, Komplexe Raume, Math. Ann., 136(1958), 254-318.
- [2] M. W. Hirsch, Differential Topology, Graduate Text in Mathematics 33, Springer-Verlag, Berlin, 1966.
- [3] D. L. Johnson, Presentation of group, Cambridge University Press
- [4] D. Mumford, The topology of normal isolated singularities of an algebraic surface and a criterion for simplicity, Publ. Math. IHES 9, (1961), 5-22.
- [5] M, Namba, Branched coverings and algebraic functions, Pitman Research Notes in Mathematics Series 161, Longman Scientific & Technical
- [6] M, Namba, Visual Zariski-van Kampen Theorem, 数理解析研究所講究録「特異点とその応用」
- [7] M. Namba and H. Tsuchihashi, Visual Zariski-van Kampen Theorem and the fundamental groups of Galois coverings of the projective plane, 投稿中
- [8] H. Tsuchihashi, Galois covering singularities I, Journal of Math. Soc. of Japan 51-1 (1999), 35-44