数理解析研究所講究録
1183巻 2001年 52-64

量子群の既約integrable表現のcrystal baseとquiver variety

斉藤 義久 (Yoshihisa Saito)

広島大学理学研究科 (Hiroshima University)

1 Introduction

1.1

もともと量子群はDrinfeld-Jimboにより可解格子模型の研究から導入された非可換代数であるが、1990年頃を境として量子群の研究は一つの転機を迎えたといってもよいであろう。その理由の一つにLusztigによる量子群の幾何学的構成およびcanonical baseの発見と、Kashiwaraによるcrystal baseの理論がある。

LusztigはRingelのquiverの表現を用いた$U_q^-(\mathfrak{g})$の代数的構成に触発されて、quiverに付随するvariety[1]を用いて$U_q^-(\mathfrak{g})$を幾何学的に構成した。quiverとは頂点と頂点を結ぶ向きづけられた辺からなる有向グラフである。ただしRingel-Lusztigの構成では各辺に対して一つの向きしか考えない。(つまり逆向きの矢印は考えない。) quiverの各頂点にベクトル空間を対応させ頂点が矢印で結ばれているときにhomを考える。このようなhomたちをたしあわせてできるベクトル空間がquiver表現全体の空間$E_\Omega(V)$であり、GLの直積(以下Gと記す。)が自然に作用する。$E_\Omega(V)$上のG同変な構成可能層の複体のなす圏のGrothendieck群を考え、さらにconvolutionによって積を定義してalgebraを作る。このalgebraが$U_q^-(\mathfrak{g})$と同型になるというのが、Lusztigによる幾何学的構成である。canonical baseはこのGrothendieck群の中のpureかつ既約な対象として定義される。定義は幾何学的であるが、canonical baseは代数的にも非常によい性質をもった基底であり、$q=1$、すなわち通常のLie algebraの世界でも意味を持つ。

[1]ここでいう「quiverに付随するvariety」は後にNakajimaによって導入されたquiver varietyではない。

一方Kashiwaraは可解格子模型の研究に触発されて量子群の$q=0$の基底、すなわち結晶基底を導入し[2]、さらに$q=0$の基底からqが一般の基底をつくり出す操作(原論文ではmeltingと呼んでいる)を通じてglobal baseを定義した。この定義は純代数的なものであるがLusztigにより、$U_q^-(\mathfrak{g})$の場合にはglobal baseは幾何学的に定義されたcanonical baseと一致することが証明された。全く別の動機から導入された2つのものが一致するのは非常に興味深い。

1.2

このような状況下において次のような問題は自然であろう。

- crystal baseを幾何学的に構成せよ。

$U_q^-(\mathfrak{g})$のcrystal base $B(\infty)$の場合には筆者とKashiwaraの共同研究([KS]参照)により、(1)に対しては解答が得られていた。この場合quiverの表現全体の空間にsymplectic structureが定まり、あるcanonicalなLagrangian subvarietyが定義できる。このLagrangian subvarietyの既約成分のなす集合として$B(\infty)$が幾何学的に実現できる。

この小論の目的は量子群の既約integrable表現に対して、そのcrystal base $B(\lambda)$を幾何学的に構成することである。この場合はNakajimaによるquiver varietyを用いる。quiver varietyの場合も自然なsymplectic structureを持ち、canonicalなLagrangian subvarietyが定義できる。その既約成分の全体として$B(\lambda)$が実現できる。その意味では多様体をquiverの表現全体の空間からquiver varietyに取り換えるだけで、アイデアは$B(\infty)$の場合と同じといってよい。

1.3 記号について

この小論では断りがない限り次の記号を用いることにする。
$\mathfrak{g}$:symmetric Kac-Moody Lie algebra,
$\mathfrak{h}$:$\mathfrak{g}$のCartan subalgebra,
$\{\alpha_i\}_{i\in I}$:$\mathfrak{g}$のsimple roots,
$\{h_i\}_{i\in I}$:$\mathfrak{g}$のsimple coroots,
P:$\mathfrak{g}$のweight lattice,

[2]可解格子模型の立場では量子群のパラメータqは温度のパラメータであり、$q=0$は絶対零度に対応するが、物理的な考察から$q=0$の基底を考えるというアイデアに至ったのかどうかは筆者は知らない。

Q:$\mathfrak{g}$ の root lattice,
$U_q(\mathfrak{g})$:$\mathfrak{g}$ に付随する量子群.

2 Crystals

この節ではKashiwaraによって導入されたcrystalの概念を定義する。crystal baseは量子群の $q=0$ における基底であるが、crystalはその性質のみに着目しより抽象的に定義された概念である。詳しくは[K1],[K2],[K3],[K4],[KS]等を参照されたい。

2.1 crystals

まずcrystalを定義しよう。

Definition 2.1.1 集合 B と次の写像たち

(2.1.1) $$wt: B \to P,\ \varepsilon_i : B \to \mathbf{Z} \sqcup \{-\infty\}\ ,\ \varphi_i : B \to \mathbf{Z} \sqcup \{-\infty\},$$

(2.1.2) $$\tilde{e}_i : B \to B \sqcup \{0\},\ \tilde{f}_i : B \to B \sqcup \{0\}.$$

の組が以下の性質を満たす時 *crystal* であるという。

(C 1) $\varphi_i(b) = \varepsilon_i(b) + \langle h_i, wt(b)\rangle$.

(C 2) $b \in B$ かつ $\tilde{e}_i b \in B$ ならば、
$wt(\tilde{e}_i b) = wt(b) + \alpha_i$, $\varepsilon_i(\tilde{e}_i b) = \varepsilon_i(b) - 1$, $\varphi_i(\tilde{e}_i b) = \varphi_i(b) + 1$.

(C 2') $b \in B$ かつ $\tilde{f}_i b \in B$ ならば、
$wt(\tilde{f}_i b) = wt(b) - \alpha_i$, $\varepsilon_i(\tilde{f}_i b) = \varepsilon_i(b) + 1$, $\varphi_i(\tilde{f}_i b) = \varphi_i(b) - 1$.

(C 3) $b, b' \in B$ かつ $i \in I$ とする。このとき $b' = \tilde{e}_i b$ と $b = \tilde{f}_i b'$ は同値。

(C 4) $b \in B$ に対して $\varphi_i(b) = -\infty$ ならば $\tilde{e}_i b = \tilde{f}_i b = 0$ である。

B_1,B_2 を crystal とする。B_1 から B_2 への morphism ψ とは、写像 $B_1 \to B_2 \sqcup \{0\}$ であって以下の性質を満たすものである。

(2.1.3) $b \in B_1$ かつ $\psi(b) \in B_2$ ならば $\mathrm{wt}(\psi(b)) = \mathrm{wt}(b)$, $\varepsilon_i(\psi(b)) = \varepsilon_i(b)$, $\varphi_i(\psi(b)) = \varphi_i(b)$,

(2.1.4) $b \in B_1$ に対し、$\psi(\tilde{e}_i b) = \tilde{e}_i \psi(b)$ ならば $\psi(b)$ かつ $\psi(\tilde{e}_i b) \in B_2$,

(2.1.5) $b \in B_1$ に対し、 $\psi(\tilde{f}_i b) = \tilde{f}_i \psi(b)$ ならば $\psi(b)$ かつ $\psi(\tilde{f}_i b) \in B_2$.

morphism $\psi : B_1 \to B_2$ が全ての $\tilde{e}_i$, $\tilde{f}_i$ と可換であるとき、ψ は strict であるという。

crystalB_1, B_2 に対して tensor product $B_1 \otimes B_2$ を次のように定義する。

$$B_1 \otimes B_2 = \{b_1 \otimes b_2 \mid b_1 \in B_1\ ,\ b_2 \in B_2\}$$

$$\varepsilon_i(b_1 \otimes b_2) = \max\{\varepsilon_i(b_1),\ \varepsilon_i(b_2) - \mathrm{wt}_i(b_1)\}$$

$$\varphi_i(b_1 \otimes b_2) = \max\{\varphi_i(b_1) + \mathrm{wt}_i(b_2),\ \varphi_i(b_2)\}$$

$$\mathrm{wt}(b_1 \otimes b_2) = \mathrm{wt}(b_1) + \mathrm{wt}(b_2).$$

$$\tilde{e}_i(b_1 \otimes b_2) = \begin{cases} \tilde{e}_i b_1 \otimes b_2, & (\varphi_i(b_1) \geq \varepsilon_i(b_2)) \\ b_1 \otimes \tilde{e}_i b_2, & (\varphi_i(b_1) < \varepsilon_i(b_2)) \end{cases}$$

$$\tilde{f}_i(b_1 \otimes b_2) = \begin{cases} \tilde{f}_i b_1 \otimes b_2, & (\varphi_i(b_1) > \varepsilon_i(b_2)) \\ b_1 \otimes \tilde{f}_i b_2, & (\varphi_i(b_1) \leq \varepsilon_i(b_2)). \end{cases}$$

ただし $\mathrm{wt}_i(b) = \langle h_i, \mathrm{wt}(b)\rangle$.

Example 2.1.2 λ を dominant integral weight とする。このとき highest weight λ の既約 integrable 表現の crystal base $B(\lambda)$ は crystal である。ただし $b \in B(\lambda)$ に対して $\varepsilon_i(b) = \max\{k \geq 0 \mid \tilde{e}_i{}^k b \neq 0\}$, $\varphi_i(b) = \max\{k \geq 0 \mid \tilde{f}_i{}^k b \neq 0\}$, $\mathrm{wt}(b)$ は b の weight と定義する。また highest weight vector に対応する $B(\lambda)$ の元を $b(\lambda)$ と書くことにする。$b(\lambda)$ は $B(\lambda)$ のなかで weight λ を持つ元として unique に characterize できる。

Example 2.1.3 $U_q(\mathfrak{g})$ の巾零部分 $U_q^-(\mathfrak{g})$ の crystal base $B(\infty)$ は crystal である。ただし $b \in B(\infty)$ に対して $\varepsilon_i(b) = \max\{k \geq 0 \mid \tilde{e}_i{}^k b \neq 0\}$, $\varphi_i(b) = \varepsilon_i(b) + \langle h_i, \mathrm{wt}(b)\rangle$ と定義する。また $U_q^-(\mathfrak{g})$ の 1 に対応する $B(\infty)$ の元を b_0 と書く。b_0 は $B(\infty)$ のなかで weight が 0 の元として unique に characterize できる。

以上の例は全て crystal base に付随した crystal であった。しかし crystal には "crystal base から来ない crytal" もある。以下そのような例を挙げる。

Example 2.1.4 $\lambda \in P_+$ を dominant integral weight とし、1 個の元からなる集合 $T_\lambda = \{t_\lambda\}$ を考える。$\mathrm{wt}(t_\lambda) = \lambda$, $\varepsilon_i(t_\lambda) = \varphi_i(t_\lambda) = -\infty$, $\tilde{e}_i(t_\lambda) = \tilde{f}_i(t_\lambda) = 0$ $(\forall i \in I)$ とする。このとき T_λ は crystal である。

Example 2.1.5 $\in I$ に対して $B_i = \{b_i(n) \mid n \in \mathbb{Z}\}$ とし、$\mathrm{wt}(b_i(n)) = n\alpha_i$, $\varepsilon_i(b_i(n)) = -n$, $\varphi_i(b_i(n)) = n$, $\varepsilon_j(b_i(n)) = \varphi_j(b_i(n)) = -\infty$ $(i \neq j)$, $\tilde{e}_i(b_i(n)) = b_i(n+1)$, $\tilde{f}_i(b_i(n)) = b_i(n-1)$, $\tilde{e}_j(b_i(n)) = \tilde{f}_j(b_i(n)) = 0$ $(i \neq j)$ とする。このとき B_i は crystal である。

2.2

この節では $B(\lambda)$ の crystal としての特徴づけを行う。この特徴づけは後に quiver variety を使って幾何学的に構成される crystal が、crystal として $B(\lambda)$ と同型であることを証明する際に用いられる。このような特徴づけは category を crystal base から crystal へ広げて始めて可能になることに注意されたい。

Proposition 2.2.1 *λ を dominant integral weght, B を weight λ を持つ元 b_λ を含む crytsal とする。このとき B が以下の 4 条件を満たせば B は crystal として $B(\lambda)$ と同型である。*

(1) *B の元であって weight λ を持つものは b_λ 以外には存在しない。*

(2) *strict morphism $\Phi : B(\infty) \otimes T_\lambda \to B$ であって $\Phi(b_0 \otimes t_\lambda) = b_\lambda$ かつ $Im\Phi = B \sqcup \{0\}$ となるようなものが存在する。*

(3) *Φ を集合 $B' := \{b \in B(\infty) \otimes T_\lambda | \Phi(b) \neq 0\}$ の上に制限すると Φ は B' から B への全単射を導く。*

(4) *任意の $b \in B$, $i \in I$ に対して $\varepsilon_i(b) = max\{k \geq 0 | \tilde{e}_i^k(b) \neq 0\}$ かつ $\varphi_i(b) = max\{k \geq 0 | \tilde{f}_i^k(b) \neq 0\}$ が成り立つ。*

3 Quivers and associated varieties

3.1

$A=(a_{ij})$ を $\mathfrak{g}$ の Cartan matrix とする。いま $\mathfrak{g}$ は symmetric Kac-Moody Lie algebra なので A は対称行列であることに注意する。

一般に quiver (I,H) とは、頂点の有限集合 I と向きの付いた辺 (矢印) の集合 H の組であって、矢印の始点と終点を対応させる写像 out : $H\to I$, in$H\to I$ が与えられているもののことである。特に、各 i に対して i から i に向かう矢印が一本もなく、$i\neq j$ に対して i から j へ向かう矢印の本数が $|a_{ij}|$ で与えられる時、quiver (I,H) は $A=(a_{ij})$ に付随しているという。$A=(a_{ij})$ は対称行列であるので i から j へ向かう矢印と j から i へ向かう矢印の本数は同じである。以下 $A=(a_{ij})$ に付随した quiver のみ考えることにする。

$^{-}: H\to H$ を矢印の向きをひっくり返す写像とする。また H の部分集合 Ω が $\Omega\cup\bar{\Omega}=H$, $\Omega\cap\bar{\Omega}=\phi$ を満たす時、Ω を quiver の orientation という。

$V=\oplus_{i\in I}V_i$ を $\mathbb{C}$ 上の I-graded vector space とし、$\dim V=(\dim_{\mathbb{C}}V_i)_{i\in I}\in\mathbb{Z}^I_{\geq 0}$ とする。一方別の $\mathbb{C}$ 上の I-graded vector space W を考える。dimension vector $\dim V=\nu$, $\dim W=\lambda$ を以下のように P の元と同一視する。

$$\nu\mapsto -\sum_{i=1}^n \dim_{\mathbb{C}} V_i\alpha_i,\qquad \lambda\mapsto\sum_{i=1}^n\dim_{\mathbb{C}}W_i\Lambda_i.$$

ただし Λ_i は $\mathfrak{g}$ の fundamental weight。

$\mathbb{C}$ 上の vector space $X(W;\nu)$ を

$$X(W;\nu)=(\bigoplus_{\tau\in H}\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V_{\mathrm{out}(\tau)},V_{\mathrm{in}(\tau)}))\oplus(\bigoplus_{i\in I}\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V_i,W_i))\oplus(\bigoplus_{i\in I}\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(W_i,V_i))$$

とする。$X(W;\nu)$ の元を成分ごとに (B_τ,t_i,s_i) と記す。

関数 $\varepsilon: H\to\mathbb{C}^*$ であって $\varepsilon(\tau)+\varepsilon(\bar{\tau})=0$ $(\forall\tau\in H)$ を満たすものを一つ固定する。このとき $X(W;\nu)$ 上の symplectic form ω を

$$\omega((B,t,s),(B',t',s'))=\sum_{\tau\in H}tr(\varepsilon(\tau)B_{\bar{\tau}}B'_\tau)+\sum_{i=1}^n tr(s_it'_i-s'_it_i) \tag{3.2.1}$$

で定義する。

また代数群 $G(\nu)=\prod_{i=1}^n GL(V_i)$ の $X(W;\nu)$ への作用を

$$(B,t,s)\mapsto(g_{\mathrm{in}(\tau)}B_\tau g^{-1}_{\mathrm{out}(\tau)},t_ig_i^{-1},g_is_i) \tag{3.2.2}$$

によって定める。ただし $g = (g_i) \in G(\nu)$ である。$G(\nu)$ の作用は symplectic form ω を保つ。$\mu : X(W;\nu) \to \mathfrak{g}(\nu)$ を moment map とする。このとき moment map の第 i 成分 $\mu_i : X(W;\nu) \to \mathrm{End}(V_i)$ は

$$\mu_i((B,t,s)) = \sum_{\tau \in H, i=\mathrm{out}(\tau)} \varepsilon(\tau) B_{\bar{\tau}} B_\tau + s_i t_i$$

で与えられる。

3.2

この節では quiver variety を定義し、その性質を復習する。この節の結果は Nakajima によって得られたものである。詳しくは [N2],[N3] を参照されたい。

Definition 3.2.1 $(B,t,s) \in X(W;\nu)$ が次の性質を満たす時 *stable point* であるという。

$V = \oplus_{i\in I} V_i$ の *I-graded subspace* $V' = \oplus_{i \in I} V'_i$ であって

(1) V' は B-不変。すなわち任意の $\tau \in H$ に対し $B_\tau(V'_{out(\tau)}) \subset V'_{in(\tau)}$,

(2) 任意の $i \in I$ に対し $V'_i \subset Ker(t_i)$

を満たすものは $V' = \{0\}$ に限る。

stable point 全体からなる $X(W;\nu)$ の部分集合を $X(W;\nu)^{st}$ と記す。

定義から $X(W;\nu)^{st}$ は $X(W;\nu)$ の開集合となる。また $X(W;\nu)$ が空集合となることはないが、$\nu \in Q_-$ によっては $X(W;\nu)^{st} = \phi$ となることもありうる。

定義から $G(\nu)$ は $X(W;\nu)^{st}$ に作用するが、重要なのは以下の性質である。

Lemma 3.2.2 *[N]* $G(\nu)$ の $X(W;\nu)^{st}$ への作用は *fixed point free* である。

この lemma により、$X(W;\nu)^{st}$ 上では集合論的な意味での $G(\nu)$ による quotient が variety の構造を持ち得ることがわかる。

Definition 3.2.3

$$\mathfrak{X}(W;\nu) = (\mu^{-1}(0) \cap X(W;\nu)^{st})/G(\nu)$$

とし、$\mathfrak{X}(W;\nu)$ を *quiver variety* と呼ぶ。(B,t,s) を通る $G(\nu)$-*orbit* を $\mathfrak{X}(W;\nu)$ とみなして $[B,t,s]$ と記す。

Remark. $\mathfrak{X}(W;\nu)$ は幾何学的不変式論 (GIT) の意味での quotient と同型であることが知られている。すなわち $\mu^{-1}(0)$ 上の line bundle に $G(\nu)$ の作用を持ち上げて、line bundle のテンソル積の $G(\nu)$ 不変な切断のなす graded ring に対応する quasi-projective variety と同型になる。

Proposition 3.2.4 *[N]* $\mathfrak{X}(W;\nu) \neq \phi$ とする。

(1) $\mathfrak{X}(W;\nu)$ は *smooth quasi-projective variety* で $\dim \mathfrak{X}(W;\nu) = \| \lambda \|^2 - \| \lambda + \nu \|^2$.

(2) $\mathfrak{X}(W;\nu)$ は ω によって導かれた *symplectic structure* を持つ。

4 Lagrangian construction of crystal base

4.1

ν, $\bar{\nu} \in Q_-$ を、$\nu - \bar{\nu} \in \mathbb{Z}_{\leq 0}\alpha_i$ を満たすようにとり、 V, $\bar{V}$ を $\dim V = \nu$, $\dim V' = \bar{\nu}$ であるような I-graded vector space とする。このとき次のような図式を考える。

(4.1.1)
$$X(W;\bar{\nu}) \xleftarrow{q_1} X(W;\bar{\nu},\nu) \xrightarrow{q_2} X(W;\nu).$$

ここで $X(W;\bar{\nu},\nu)$ は4つ組 (B,t,s,ϕ) からなる variety である。ただし (B,t,s) は $X(W;\nu)$ の元、$\phi = (\phi_i) : \bar{V} \to V$ は I-graded vector space の injective morphism であって、条件「$\mathrm{Im}\phi = (\mathrm{Im}\phi_i)$ は B-不変かつ $\mathrm{Im}s = (\mathrm{Im}s_i)$ に含まれる」を満たすものとする。 このとき B,t,s は $\bar{B} : \bar{V} \to \bar{V}$, $\bar{t_i} : \bar{V_i} \to W_i$, $\bar{s_i} : W_i \to \bar{V_i}$ を導く。また $q_1(B,t,s,\phi) = (\bar{B},\bar{t},\bar{s})$, $q_2(B,t,s,\phi) = (B,t,s)$ である。

図式 (4.1.1) を $\mu^{-1}(0) \cap \{\text{stable points}\}$ に制限し代数群の作用でわることにより、新たな図式

(4.1.2)
$$\mathfrak{X}(W;\bar{\nu}) \xleftarrow{\varpi_1} \mathfrak{X}(W;\bar{\nu},\nu) \xrightarrow{\varpi_2} \mathfrak{X}(W;\nu)$$

を得る。このとき ϖ_1 はsmooth、ϖ_2 はproper な morphism になっている。以下 ϖ_1 および ϖ_2 のより詳細な性質を調べる。

4.2

ϖ_1 および ϖ_2 は複雑でこのままではわかりにくいので、$\mathfrak{X}(W;\nu)$ 上に stratification を入れて、各 stratum の上に写像を制限することを考える。$i \in I$ および $c \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して

$$\mathfrak{X}(W;\nu)_{i,c} = \{[B,t,s] \in \mathfrak{X}(W;\nu) | \varepsilon_i((B,t,s)) = c\}$$

と定義する。ただし

$$\varepsilon_i((B,t,s)) = \dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Coker}(\bigoplus_{\tau;\mathrm{in}(\tau)=i} V_{\mathrm{out}(\tau)} \oplus W_i \xrightarrow{(B_\tau, s_i)} V_i)$$

とする。このとき定義から $\mathfrak{X}(W;\nu)_{i,c}$ が $\mathfrak{X}(W;\nu)$ の locally closed subvariety である。また次の lemma は容易である。

Lemma 4.2.1 $\nu = \bar{\nu} - c\alpha_i$ $(c \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$ ならば

$$\varpi_1^{-1}(\mathfrak{X}(W;\bar{\nu})_{i,p}) = \varpi_2^{-1}(\mathfrak{X}(W;\nu)_{i,p+c})$$

が $p \geq 0$ に対して成り立つ。

そこで

$$\mathfrak{X}(W;\bar{\nu},\nu)_{i,p} = \varpi_1^{-1}(\mathfrak{X}(W;\bar{\nu})_{i,0}) = \varpi_2^{-1}(\mathfrak{X}(W;\nu)_{i,c})$$

とおくことで次の図式を得る。

$$(4.2.1). \qquad \mathfrak{X}(W;\bar{\nu})_{i,p} \xleftarrow{\varpi_1} \mathfrak{X}(W;\bar{\nu},\nu)_{i,p} \xrightarrow{\varpi_2} \mathfrak{X}(W;\nu)_{i,p+c}$$

p を一般にしてしまうと ϖ_1 および ϖ_2 は複雑になってしまうが、特に $p = 0$ とすると次の補題が成り立つ。

Lemma 4.2.2 図式 *(4.2.1)* において $p = 0$ とする。この時以下が成立する。

(1) $\mathfrak{X}(W;\bar{\nu})_{i,0}$ は $\mathfrak{X}(W;\bar{\nu})$ の *open subvariety* である。

(2) ϖ_1 の *fiber* は *Grassman* 多様体 $Grass_c(\mathbb{C}^{\langle h_i, \lambda+\bar{\nu}\rangle})$ と同型である。

(3) ϖ_2 は同型写像である。

系として次を得る。

Corollary 4.2.3 $\mathfrak{X}(W;\bar{\nu})_{i,0}$ の既約成分と $\mathfrak{X}(W;\nu)_{i,c}$ の既約成分は 1 対 1 に対応する。

4.3

まず巾零元の概念を定義しよう。そのために少し言葉の準備をする。H の元の列 $\sigma = (\tau_1, \tau_2, \cdots, \tau_N)$ が $\mathrm{out}(\tau_{i+1}) = \mathrm{in}(\tau_i)$ $(1 \leq i \leq N-1)$ を満たす時 path であるといい、N を path の長さという。$B = (B_\tau)$ の成分を path $\sigma = (\tau_1, \tau_2, \cdots, \tau_N)$ に沿って合成してできる写像を $B_\sigma : V_{\mathrm{out}(\tau_N)} \to V_{\mathrm{out}(\tau_1)}$ と書く。$B = (B_\tau)$ に対しある $N \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ が存在して長さが N 以上の任意の path σ に対し $B_\sigma = 0$ が成り立つ時、B は巾零 (nilpotent) であるという。

$\mathfrak{X}(W;\nu)$ の subvariety $\Lambda(W;\nu)$ を

$$\Lambda(W;\nu) = \{[B,t,s] \in \mathfrak{X}(W;\nu) | s = 0 \text{ かつ } B \text{ は nilpotent}\}$$

と定義する。次の propsition はこれ以降用いいないが $\Lambda(W;\nu)$ の特徴づけとして重要な意味を持つ。

Proposition 4.3.1 *[N] $\Lambda(W;\nu)$ は $\mathfrak{X}(W;\nu)$ は Lagrangian subvariety である。*

$B(W;\nu)$ を $\Lambda(W;\nu)$ の既約成分全体からなる集合とする。また $\Lambda \in B(W;\nu)$ に対し generic point $[B,t,s]$ をとり、$\varepsilon_i(\Lambda) = \varepsilon_i((B,t,s))$ と定義する。さらに $c \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対し $B(W;\nu)$ の元であって $\varepsilon_i(\Lambda) = c$ を満たすもの全体のなす集合とする。このとき Corollary 4.2.3 から次が成立する。

Proposition 4.3.2

$$B(W;\bar{\nu})_{i,0} \cong B(W;\nu)_{i,c}.$$

4.4

前節までの結果を使って集合 $\bigsqcup_\nu B(W;\nu)$ に crystal の構造を入れる。

Proposition 4.3.2 の同型によって $\tilde{f_i}^c : B(W;\bar{\nu})_{i,0} \to B(W;\nu)_{i,c}$ および $\tilde{e_i}^c : B(W;\nu)_{i,c} \to B(W;\bar{\nu})_{i,0}$ を定める。さらに

$$\tilde{e}_i, \tilde{f}_i : \bigsqcup_\nu B(W;\nu) \to \bigsqcup_\nu B(W;\nu) \sqcup \{0\}$$

を

$$\tilde{e}_i : B(W;\nu)_{i,c} \xrightarrow{\tilde{e_i}^c} B(W;\nu + c\alpha_i)_{i,0} \xrightarrow{\tilde{f_i}^{c-1}} B(W;\nu+\alpha_i)_{i,c-1},$$

$$\tilde{f}_i : B(W;\nu)_{i,c} \xrightarrow{\tilde{e_i}^c} B(W;\nu + c\alpha_i)_{i,0} \xrightarrow{\tilde{f_i}^{c+1}} B(W;\nu-\alpha_i)_{i,c+1}$$

で定める。
Remark. (1) 一番最初に定めた $\tilde{e}_i^c$ (resp. $\tilde{f}_i^c$) は $\tilde{e}_i$ (resp. $\tilde{f}_i$) の c 乗と見做すことができるので、この記法は意味を持つ。
(2) stability の条件のために $B(W;\nu)_{i,c}$ が空集合でなくても、$B(W;\nu+\alpha_i)_{i,c-1}$ は空集合になることがある。その場合には $\tilde{e}_i(\Lambda)=0$ と定義する。$\tilde{f}_i$ の場合も同様である。

$\Lambda \in B(W;\nu)$ に対して写像 wt, φ_i を

$$wt(\Lambda)=\lambda+\nu, \quad \varphi_i(\Lambda)=\varepsilon(\Lambda)+\langle h_i, wt(\Lambda)\rangle$$

で定める。このとき次の定理が成り立つ。

Theorem 4.4.1 $\dim W=\lambda$ は *dominant integral weight* とする。このとき
(1) $\bigsqcup_\nu B(W;\nu)$ は *crystal* である。
(2) $\bigsqcup_\nu B(W;\nu)$ は $B(\lambda)$ と *crystal* として同型である。

(1) については crystal の公理 (**C 1**)~(**C 4**) をチェックすればよい。(2) については $B(\lambda)$ の crystal としての特徴づけ (Proposition 2.2.1) の条件を確かめることで示される。strict morphism $\Phi: B(\infty)\otimes T_\lambda \to \bigsqcup_\nu B(W;\nu)$ を構成する際に $B(\infty)$ の幾何学的実現 ([KS] 参照) を用いる。個々の条件を具体的に示すには各 $B(W;\nu)$ に関するより精密な解析が必要となるが、基本的には初等的な方法で証明できる。詳しくは [KS] および [S] を参照されたい。

5 今後の課題

5.1

Introduction で述べた「crystal base を幾何学的に構成せよ」という問題は $U_q^-(\mathfrak{g})$ の場合、既約 integrable 表現の場合でともに解決されたわけであるが、canonical base(= global base) と crystal base の関係は幾何学的にどのような意味があるのであろうか？

まず $U_q^-(\mathfrak{g})$ の場合を考えてみる。この場合は Lusztig による幾何学的構成があり、canonical base は $E_\Omega(V)$ 上の G 同変な構成可能層の複体であって pure かつ既約なものであった。この時その singular support(あるいは特性多様体) は前節にあった、ある canonical な Lagrangian subvariety に含まれる。したがってもし canonical base の singular support が既約ならば

{canonical base に対応する層の複体} $\rightarrow$ {Lagrangian subvariety の既約成分}

なる写像が定義され、さらにこの対応が1対1であることがわかる。この逆対応をとることで、crystal baseからcanonical baseを作る操作(melting)に幾何学的意味が付く。

しかし事情はそう単純ではなく、一般にcanonical baseのsingular supportは既約ではない。([KS]参照) 何らかの方法でsingular supportの既約成分たちに自然なfiltrationを定義して、そのtop termを取り出すことがmeltingの幾何学的意味であろうと予想しているが今のところよくわからない。[3]この問題は特に$\mathfrak{g}$がA型の場合にはWeyl群のSpringer表現とleft cell表現との関係に深く関わっており、その意味からも興味深い。

既約integrable表現の場合はそもそも表現自体の幾何学的構成が行われていない。上に述べたように量子群の"半分"である$U_q^-(\mathfrak{g})$は幾何学的に構成されているが、量子群$U_q(\mathfrak{g})$自体は構成されていない。表現の幾何学的構成が出来ない理由もそこにあるのだが、今のところどうしたらいいのかわからない。これは今後の課題であろう。

References

[GV] V. Ginzburg and E. Vasserot, *Langlands reciprocity for affine quantum groups of type A_n*, Internat. Math. Res. Notices (1993), 67-85.

[GL] I. Grojnowski and G. Lusztig, *"A comparison of the bases of quantized enveloping algebras"*, in *Linear Algebraic Groups and their Representations (Los Angeles, CA, 1992)*, Contemp. Math. 153, Amer. Math. Soc., Providence,1993, 11-19.

[Kac] V. G. Kac, *Infinite dimensional Lie algebras*, Cambridge Univ. Press. (1990).

[K1] M. Kashiwara, *Crystallizing the q-analogue of universal enveloping algebras*, Duke Math. Journal 63 (1991), 465-516.

[K2] M. Kashiwara, *Global crystal base of quantum groups*, Duke Math. Journal 69 (1993), 455-485.

[K3] M. Kashiwara, *Crystal base and Littelmann's refined Demazure character formula*, Duke Math. Journal 71 (1993), 839-858.

[3] $\mathfrak{g}$がA型の時はどのようなfiltrationを入れたらよいかという具体的な予想もある。

[K4] M. Kashiwara, *"On crystal bases"*, in *Representations of Group, (Banff, AB, 1994)*, CMS Conf. Proc. 16, Amer. Math. Soc., Providence, 1995, 155-197.

[KS] M. Kashiwara and Y. Saito, *Geometric construction of crystal bases*, Duke Math. Journal 89 (1997), 9-36.

[L1] G. Lusztig, *Finite dimensional Hopf algebras arising from quantized enveloping algebras* J. Amer. Math. Soc. 3 (1990) 257-296.

[L2] G. Lusztig, *Canonical bases arising from quantized enveloping algebras*, J. Amer. Math. Soc. 3 (1990) 447-498.

[L3] G. Lusztig, *Canonical bases arising from quantized enveloping algebras II*, Progr. Theor. Phys. Suppl. 102 (1990) 175-201.

[L4] G. Lusztig, *Quivers, perverse sheaves and quantized enveloping algebras*, J. Amer. Math. Soc. 4 (1991) 365-421.

[L5] G. Lusztig, *Introduction to quantum groups*, Birkhäuser, (1994)

[M] D. Mumford, J. Fogarty and F. Kirwan, *Geometric invariant theory, Third Enlarged Edition*, Springer-Verlag, (1994)

[N1] H. Nakajima, *Gauge theory on resolution of simple singularities and simple Lie algebras*, Int. Math. Res. Notices (1994) 61-74.

[N2] H. Nakajima, *Instantons on ALE spaces, quiver varieties and Kac-Moody algebras*, Duke Math. Journal 76 (1994), 365-416.

[N3] H. Nakajima, *Quiver varieties and Kac-Moody algebras*, Duke Math. Journal 91(1998), 515-560.

[R] C. Ringel, *Hall algebras and quantum groups*, Invent. Math. 101 (1990), 583-591.

[S] Y. Saito, *Geometric construction of crystal bases II*, preprint.