

時間遅れを含む系の関数空間への展開について

京大・工 引原隆士 (Takashi HIKIHARA)
School of Electrical and Electronic Engineering
Kyoto University

1. はじめに

物理システムにフィードバック制御が加えられたとき、システムの入力にフィードバックループによる時間遅れが生じることがある。一般にこの遅れをむだ時間と呼び、通常遅れの小さい場合が解析の対象となっている。一般に時間遅れを含むシステムは、その解は遅れ時間に対応する初期状態（関数）により支配され、その解は関数空間上にあるため、無限次元空間上で解の挙動を把握することが重要となる。

近年、機械工作機のダイナミクスと切削面の空間パターンとの関係に興味を持たれている [1, 2]。この様な工作機は切削対象全体を刃の 1 軸方向の移動に対して時間的に周期的に移動させる。この時、切削刃のダイナミクスが大きな時間遅れを含む力学系で表されることが知られている。このダイナミクスにより切削面のパターンに種々の紋様が現れ、刃のダイナミクスとどの様な関係があるかが、上に述べた無限次元空間上の解の挙動との関係で興味深いものとなっている。

Giacomelli らは時間遅れを含む系の力学的挙動を時間・空間に拡張した状態空間で議論するアイデアを提案した [3, 4]。彼らの研究は元来 GL 方程式で記述されるような分布系の実験的現象を時間遅れ系として理解することを目的として行われたが、逆に時間遅れ系を時空状態空間上で解釈することの可能性を与えた点に注目できる。その解析の方法は限られた族の方程式群にのみ有効であるが、アイデア自体は方法に限定されたものではない。

筆者らは従来より時間遅れフィードバックを用いてカオスアトラクターに埋め込まれた不安定周期解の安定化すなわちカオス制御を実験的に検討してきた [5, 6]。その大域的な安定化のプロセスを理解することを目的として、時間遅れフィードバック制御が加えられた振動子の振動の時系列を、時間および空間を状態空間とする系に展開することを試みた [7]。本報告ではその解の挙動を時空状態空間上で解釈する方法について述べ、その方法の数理的理解を試みると共に、解析法の方角性について述べる。

2. 時間遅れ系の時空間展開

Giacomelli らが提案した、ある種の時間遅れ系に対して適用可能な状態空間の時空状態空間への展開について述べる [3, 4]。

一階の時間遅れを含む系

$$\dot{y} = f(y, y_d) \quad (1)$$

を考える。この系において $y_d = y(t - \tau)$ は遅れ成分を表す。ここで、 τ は時間の遅れを表す。この系において時間変数 t は

$$t = \sigma + \theta\tau \quad (2)$$

で表すことができる。この時、時間変数 $t \in \mathbb{R}$ は遅れ $\tau = T$ で一定ならば $(\sigma, \theta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}$ で等価的に表すことができる。これは、模式的に見れば遅れ $\tau = T$ において図1のような時系列データの状態空間への展開と見ることができる。

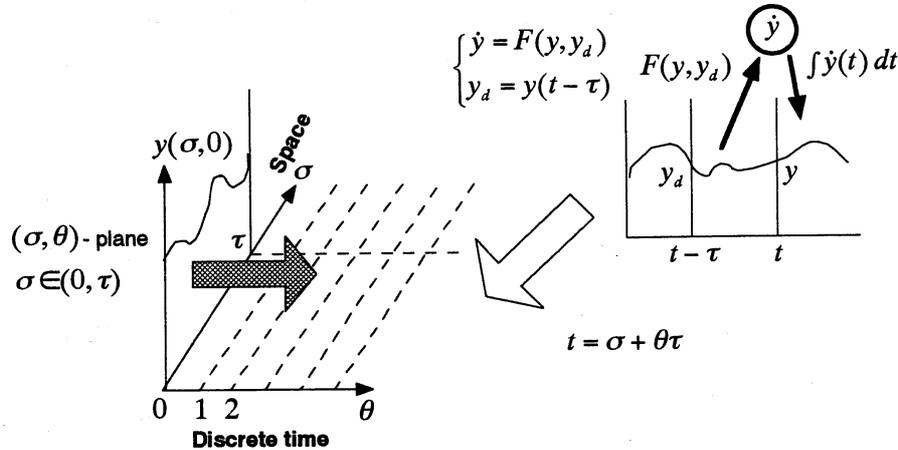


図 1: 時空状態関数平面への展開

一階の時間遅れを含む力学系について、Giacomelli らが、系が Hopf 分岐を起こす前後でこの様な時空状態空間への展開を実行し、ある種の系について Ginzburg-Landau 方程式に変形できることを示した [4]。さらにこれらにおいては移動リアプノフ指数 [8] の適用が可能であり、元の系の力学的特徴が時空状態空間でも評価できることが示された。

3. 時間遅れフィードバック制御によるカオス制御と状態空間の時空間展開

従来より実験的に検討してきた、磁気弾性振動系の時間遅れフィードバック制御による不安定周期解の安定化の実験結果について述べる [5, 6]。実験システムの概要を図 2 に示す。このシステムはカオスを発生する周期外力磁気弾性システムに、現在のシステムの状態とメモリーに記憶した安定化したい不安定周期解の周期だけ前の状態との偏差を取り、それを負帰還させる連続時間フィードバック制御則 [9] を実現したものである。現在ではこの制御則の拡張法も提案されている [10]。さらにその安定化についても理論的検討がなされている [11, 12, 13]。しかしながら、解の安定性についての議論は可能であるが、安定に至る、あるいは安定性を失うメカニズムについては現時点でも明快な説明が与えられているとは言い難い。

図 2 に示したシステムを厳密に時空状態空間上でモデル化することは困難であるので、ここでは実験データを遅れ時間 $\tau = T$ を用いて (σ, θ) に直接展開し、その時空的变化を観察する方法を取る。図 2 に示したシステムにおいて、制御を開始すると、カオス状態にあるシステムが安定化される。図 3(a) に変位の変化の時系列データを示す。この時系列データを前述の (σ, θ) に展開し、その等高線分布を取ったものが図 3(b) である。さらに、これらを 3D プロットしたものを図 3(c) に示す。これらから、制御入力の有無に係わらず位相間で伝搬していく波動状の変化があることがわかる。カオス制御の結果、カオスアトラクタに内在する不安定周期解の安定化が達成されると状態は周期 T の周期状態になるため、振幅の等高線は時間的にほとんど変化しない。安定化後に見られる等高線の変化はその振

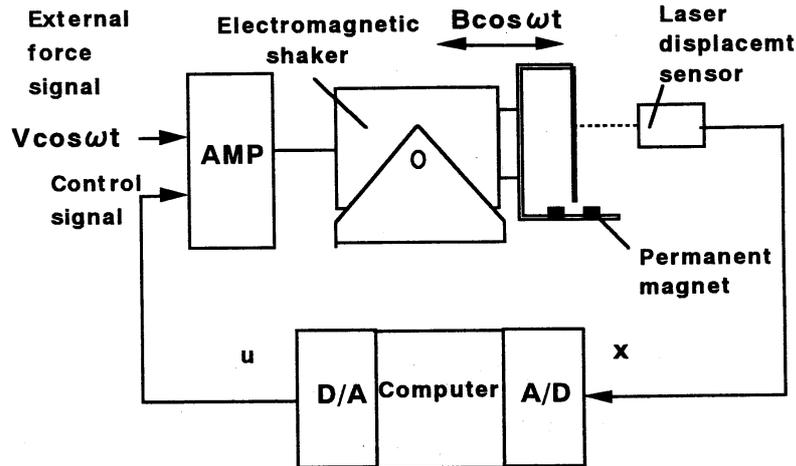


図 2: 磁気弾性系カオスの時間遅れフィードバックシステム (実験システム)

幅の微小な変化があるためである。これらから考えると、安定化の達成は位相 σ 軸に対して波形が定在する状態であり、波動状の変化が残存している状態では安定化されない。

図 4 は同じシステムで、カオス状態が一度安定化されたように見受けられた後再びカオス状態となる場合の変化を示している。一度収束した状態は時間波形で分かるように 2 周期の波形である。この場合制御入力も消滅しておらず、等高線、3D プロットでは、ゆっくりとした波の伝搬が残っている。この波は節のある定在波に近い状態にあるが、時間と共に状態が不安定となり、再度カオスの波動伝搬に至っていることがわかる。

以上の結果から分かるように、時間遅れフィードバックによるカオスアトラクターに埋め込まれた不安定周期軌道の安定化の問題は、 (σ, θ) 時空状態空間では振動による波動の発生・消滅と関係あるように見受けられる。安定性を示す指数などを用いた定量的な検討は今後の課題となるが、これまで平衡点近傍での議論しかできなかった時間遅れ系の挙動を、振動の伝搬およびその安定性という観点で大域的に検討できる可能性を示している。著者らは波動の安定性に関する議論を Duffing 振子が空間的に結合された系に対して行っており、その波動の空間的な引き込み関数の議論がこの問題にも適用できる [7, 14, 15]。

4. 遅れ時間時系列の時空展開の数理的理解

時間遅れ系の関数空間への展開を現象論で議論することは、現象の直感的理解を助けるが、それ以上の発展を求めることは難しい。そこで、上述した議論を数理的に考える道具立てについて以下に述べる。

4.1 遅れ時間時系列の関数空間への展開

時間遅れ τ を含む系の状態空間は次のように与えられる。

$$C = C([- \tau, 0], \mathbb{R}^n) \rightarrow L[0, \infty) \in X \quad (3)$$

ここで X は Banach 空間である。このとき、時空展開は次のように定義できる。

$$l_X = \{ \{f_i\}, f_i \in X, \forall i, i \in N \} \quad (4)$$

ここで、 $l_X \in X$: Banach 空間である。

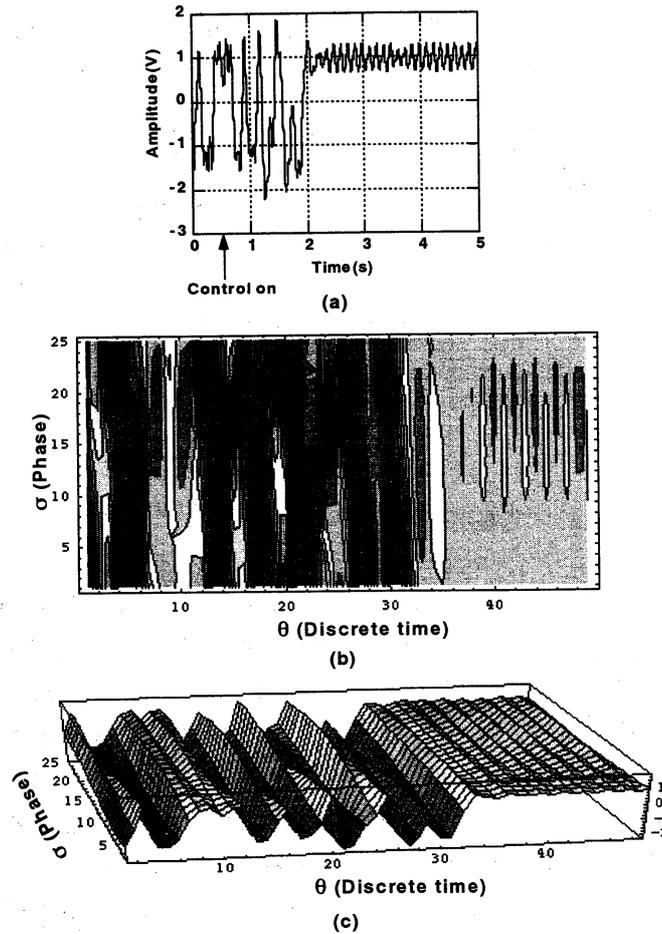


図 3: 時間遅れフィードバック制御された磁気弾性体の挙動とその時空状態空間への展開 (1)

このとき、 p -ノルムが有限、すなわち

$$\left(\sum_{i=0}^{\infty} \|f_i\|_X^p \right)^{1/p} < \infty \quad (5)$$

ならば、

$$l_X^p \iff L^p[0, \infty) \in X \quad (6)$$

の対応関係が得られる。

一方、制御理論にリフティングという概念がある [16, 17, 18]。これは連続時間信号を $l_{L^p[0, \tau]}$ 上の離散関数列 $\{f_i\}$ と見なしてシステムの記述および制御を実現する理論で、連続時間系に対するサンプル値制御理論の理論的裏付けを与えている。本稿で述べた時空展開の理解にはこの理論が助けとなる。

4.2 時空展開写像 W_τ

時空展開に関わる関数空間は次のように定義される。いま、

$$t = \sigma + \theta\tau \quad 0 \leq \sigma < \tau \quad (7)$$

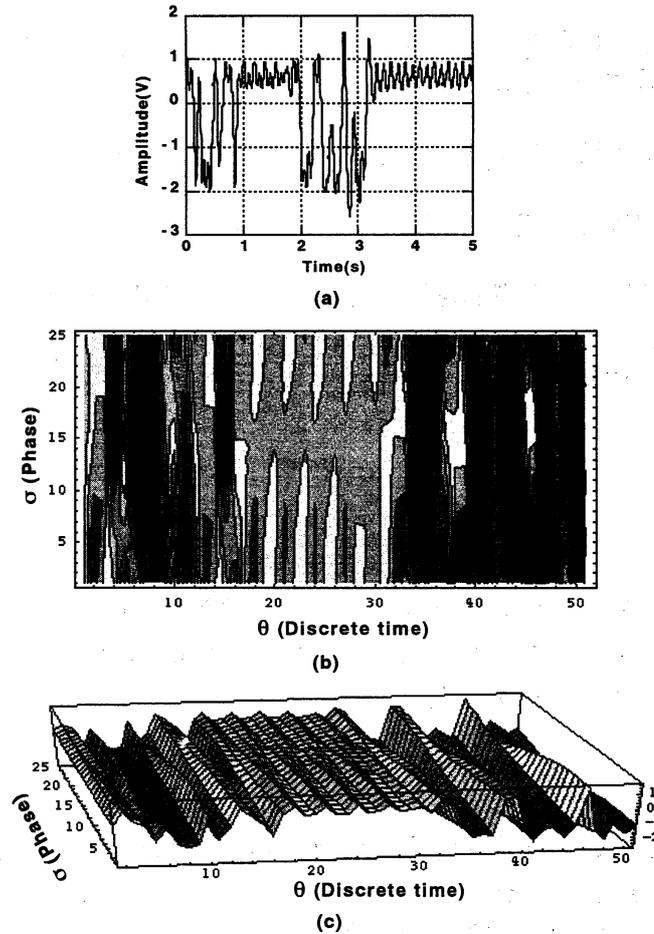


図 4: 時間遅れフィードバック制御された磁気弾性体の挙動とその時空状態空間への展開 (2)

とする。ここで、 $\theta \in \mathbb{N}$ である。さらに、

$$\hat{f}_i(\sigma) = f(\sigma + \theta\tau) \quad (8)$$

で与えると、 f は $L^p[0, \infty)$ で定義される連続関数、 \hat{f} は $l_{L^p[0, \tau]}$ で定義される無限離散関数列となる。この時、両空間でノルムの定義が同一ならば二つの Banach 空間の間に位相同形な写像が定義できる。すなわち、

$$\hat{f} = W_\tau f \quad (9)$$

が与えられ、もし、システムが遅れ τ に対して線形ならば、 W_τ は逆写像 W_τ^{-1} を有する。

4.3 システムダイナミクスと時空展開

$L^p[0, \infty)$, $l_{L^p[0, \tau]}$ における解の収束および安定性を考える。すなわち、 W_τ が時不変性を有すれば安定解が存在することになる。時不変性を有するための条件は以下のようになることが前出の論文で示されている。

- 遅れ作用素を D_τ , システムダイナミクスを $G : L^p \rightarrow L^p$ とするとき, G が時不変ならば D_τ が可換で $D_\tau G = G D_\tau$
- シフト作用素 S に関して $W_\tau D_\tau = S W_\tau$ が成立する.
- Convolution が定義できる.

一般に, 実験で検討している時間遅れ系は $p = 2$ の Hilbert 空間であると考えてなんら支障は無い. 従って, $L^2[0, \infty)$, $l_{L^2[0, \tau]}$ におけるダイナミクスは, \hat{f} を Fourier 展開した無限次元ベクトルで表現できる. すなわち

$$\hat{f}(\sigma) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m e^{jm\sigma/\tau}, \quad \sigma \in [0, \tau) \quad (10)$$

と与えられる.

ここで, 無限次元ベクトルを $[\dots a_{-1} \ a_0 \ a_1 \ \dots]$ で与え, $G : L^p \rightarrow L^p$ に W_τ を作用させる. さらに, システムダイナミクス G を作用素と見なすとき, その作用は G が線形ならば $\omega_m = \omega + 2\pi m/\tau$ でブロック対角化可能となり,

$$\text{diag}[\dots \hat{G}(j\omega_{-1}) \ \hat{G}(j\omega) \ \hat{G}(j\omega_1) \ \dots]$$

と表現できる. これは, システムの応答を遅れの各成分が存在する空間の間の写像として独立に扱うことができることを示している. 一方, システムが非線形ならば, ブロック対角化ができない. そのため, 関数空間の間の写像をいかに把握するかが重要な課題となる.

これまで時間遅れを有する非線形なシステムに関して, 平衡点近傍における局所線形領域での議論に限って, Floquet 解の安定性を用いた議論があった. しかしながら, これは大域的な写像のダイナミクスを理解することはできないことは言うまでもない. 本報告で述べている関数空間の写像として \hat{G} を扱うことができれば, 時間遅れ系のダイナミクスがより理解しやすいものとなると考えられる.

5. おわりに

本報告では, 時間遅れを含む系の無限次元ダイナミクスを連続位相・離散時間に時空状態空間に展開する方法について説明した. その結果, 時系列では理解が難しい時間遅れの影響を受けたダイナミクスを, 分布空間の波動現象として捉えることができることを, Duffing 振子のカオス軌道に埋め込まれた不安定周期軌道の時間遅れフィードバック制御による安定化の実験結果に基づいて説明した.

続いて, 時空状態空間で現象論で理解できる安定化について, 数理的に説明するための枠組みを制御理論で確立したリフティングの考え方から示した. しかしながら, 本質的に非線形なシステムに遅れが加えられている場合には, 関数空間の間の写像を表現することが重要な課題となり, 遅れに関する関数空間の力学理論をどのように適用, あるいは構築するか重要であることが示された.

参考文献

- [1] S.T.Chiriacescu, *Stability in the Dynamics of Metal Cutting* (Elsevier, 1990).
- [2] F.C.Moon, Chaotic dynamics and fractals in material removal process, *Nonlinearity and Chaos in Engineering Dynamics* (Eds. by J.M.T.Thompson & S.R.Bishop), pp. 25-37 (John Wiley, 1994).
- [3] G.Giacomelli & A.Politi, Relationship between delayed and spatially extended dynamical systems, *Phys. Rev. Letts.*, Vol. 76, No. 15, pp. 2686-2689 (1996).
- [4] F.T.Arecchi, G.Giacomelli, A.Lapucci & R.Meucci, Two-dimensional representation of a delayed dynamical system, *Phys. Rev. A*, Vol. 45, No. 7, pp. 4225-4228 (1992).
- [5] T.Hikihara and T.Kawagoshi, An experimental study on stabilization of unstable periodic motion in magneto-elastic chaos, *Phys. Letts. A*, 211, pp.29-36 (1996).
- [6] T.Hikihara, M.Touno and T.Kawagoshi, Stabilization of unstable periodic orbit in magneto-elastic chaos by delayed feedback control, *Int. J. of Bif. and Chaos*, Vo. 7, No. 12 (1997).
- [7] T.Hikihara and Y.Ueda, An expansion of system with time delay into spatio-temporal state space, *Chaos*, 9(4), pp. 887-892 (1999).
- [8] R.J.Deissler & K.Kaneko, Velocity-dependent lyapunov exponents as a measure of chaos for open-flow systems, *Phys. Letts. A*, Vol. 119, No. 8, pp. 397-402 (1987).
- [9] K.Pyragas, Continuous control of chaos by self controlling feedback, *Phys. Letts. A*, Vol 170, pp.421-428 (1992).
- [10] K.Pyraga, Control of chaos via extended delayed feedback, *Phys. Letts. A*, 206, pp. 323-330 (1995).
- [11] K.Konishi, M.Ishii & H.Kokame, Stabilizing unstable periodic points of one-dimensional nonlinear systems using delayed feedback signals, *Phys. Rev. E*54 (1996) 3455-3460.
- [12] T.Ushio, Limitation of delayed feedback control in nonlinear discrete-time systems, *IEEE Trans. Circuit Syst. I*, Vol. 43, No. 9, (1996) 815-816.
- [13] H.Nakajima & Y.Ueda, Limitation of generalized delayed feedback, *Physica D*, Vol. 111, (1998) 143-150.
- [14] T.Hikihara, K.Torii and Y.Ueda, Wave and Basin Structure in Spatially Coupled Magneto-Elastic Beam System — Transition between Coexisting Wave Solutions —, *Int. J. of Bif. and Chaos* (in press).

- [15] T.Hikihara, K.Torii and Y.Ueda, Quasi-Periodic Wave and Its Bifurcation in Magneto-Elastic Beam System, Physics Letters A (accepted).
- [16] B.A.Bamieh & J.B.Pearson, Jr., A general framework for linear periodic systems with applications to $H-\infty$ sampled-data control, IEEE Trans. on AC, Vol.37, No.4 (1992) 418-435.
- [17] Y.Yamamoto, A function space approach to sampled data control systems and tracking problems, IEEE Trans. on AC, Vol.39, No.4 (1994) 703-713.
- [18] 藤岡, サンプル値制御って?リフティングって?, システム/制御/情報, Vol.42, No.9, pp.409-510 (1998).