数理解析研究所講究録
第1186巻 2001年 1-14

Banach束に値をとる正値テンソル積測度の弱収束

信州大学工学部

河邊 淳* (JUN KAWABE)

概要. この小論では，ある種のBanach束に値をとる正値ベクトル測度のテンソル積は測度の弱位相に関して連続であることを報告する．その証明には，Bartle の双線形ベクトル積分の理論とベクトル測度の正値性が有効に活用されている．

§1. 序論. X と Y は局所凸線形空間，$(S,\mathcal{S})$ と $(T,\mathcal{T})$ は可測空間とする．1967年にDuchon-Kuluvánek [6] は，二つのベクトル測度 $\mu:\mathcal{S}\to X$ と $\nu:\mathcal{T}\to Y$ に対して，直積 σ-集合体 $\mathcal{S}\times\mathcal{T}$ 上で定義され，injectiveテンソル積空間 $X\widehat{\otimes}_\omega Y$ に値をとり，次の関係式

$$\mu\widehat{\otimes}_\omega\nu(A\times B)=\mu(A)\otimes\nu(B),\qquad A\in\mathcal{S},B\in\mathcal{T}$$

を満たすベクトル測度 $\mu\widehat{\otimes}_\omega\nu:\mathcal{S}\times\mathcal{T}\to X\widehat{\otimes}_\omega Y$ がただ一つ存在することを示した．このベクトル測度は μ と ν のテンソル積とよばれる．

一方，1991年にはDekeirt [4] は測度の弱収束の概念の自然な拡張としてベクトル測度の弱収束を定義し，その基本的な性質を調べた．引き続き März-Shortt は論文 [20] で，Banach 空間に値をとるベクトル測度の集合がベクトル測度の弱位相に関して(点列)コンパクトとなるための判定条件を初めて与えた．このコンパクト性判定条件は，[15] では，核型空間に値をとるベクトル測度の場合に，[16] ではある種の局所凸線形空間の場合に拡張されている．

これらベクトル測度に関する二つの概念に関連して，「ベクトル測度のテンソル積は測度の弱位相に関して連続か？」という基本的な問題が生じてくる．1999年の論文 [13] では，核型空間に値をとるベクトル測度のテンソル積の弱収束は，対応する実測度の直積測度の弱収束から導かれることを示し，上記の問題を肯定的に解決した．しかし，そこで用いられた証明の手法は，核型空間のもつ有限次

Key words and phrases. weak convergence of vector measures, tensor product of vector measures, bilinear vector integration, positivity of vector measures, ω-tensor product.

*This work has been supported by Grant-in-Aid for General Scientific Research No. 11640160, the Ministry of Education, Science, Sports and Culture, Japan

元的な性質(すなわち，有界集合上では弱位相と始位相とが一致するという性質)を本質的に用いているため，Banach 空間のような真の意味で無限次元的な空間の場合には適用できなかった．今回，Bartle による双線形ベクトル積分の理論とベクトル測度の正値性を有効に活用することにより，ある種の Banach 束に値をとる正値ベクトル測度の場合に，そのテンソル積測度が測度の弱位相に関して連続となることが示せたので報告することとする．

以下この小論を通じて，Banach 空間の係数体は実数全体 $\mathbb{R}$ とする．また，位相空間，一様空間はすべて Hausdorff の分離公理を満たしているとする．

§2. ω-テンソル積とテンソル積測度. X，Y は Banach 空間，X^*，Y^* はそれぞれ X，Y の位相的双対空間とし，$\langle x, x^* \rangle$ $(x \in X, x^* \in X^*)$ で X と X^* の双対を表す．また，X，Y，X^*，Y^*，... のノルムはすべて同じ記号 $\|\cdot\|$ で表す．

Banach 空間 X と Y の代数的テンソル積 $X \otimes Y$ の各要素 $z = \sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i$ に対して

$$\|z\|_\omega = \sup\left\{ \sum_{i=1}^n \langle x_i, x^* \rangle \langle y_i, y^* \rangle : \|x^*\| \le 1, \|y^*\| \le 1, x^* \in X^*, y^* \in Y^* \right\} \tag{2.1}$$

によって $X \otimes Y$ 上の **ω-ノルム** (injective norm，ε-ノルム，λ-ノルムなどともいう)を定義する．代数的テンソル積 $X \otimes Y$ に ω-ノルム $\|\cdot\|_\omega$ を導入して得られるノルム空間を $X \otimes_\omega Y$ で表す．このとき，$X \otimes_\omega Y$ は X^* から Y への有限階作用素で，弱位相 $\sigma(X^*, X)$ と $\sigma(Y, Y^*)$ に関して連続なものの全体に一様作用素ノルムを導入して得られるノルム空間と，自然な対応

$$\tau : z = \sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i \mapsto T_z(x^*) \equiv \sum_{i=1}^n \langle x_i, x^* \rangle y_i, \quad x^* \in X^* \tag{2.2}$$

によって等距離同型 (isometrically isomorphic) となる．このノルム空間 $X \otimes_\omega Y$ を ω-ノルムで完備化することによって得られる Banach 空間を $X \widehat{\otimes}_\omega Y$ で表し，X と Y の **ω-テンソル積**という．

このテンソル積空間 $X \widehat{\otimes}_\omega Y$ は具体的な空間の中に等距離的に埋め込み可能であるとともに，その双対空間 $(X \widehat{\otimes}_\omega Y)^*$ の構造も明解である．これらは双線形ベクトル積分の性質を調べる際に活用されるので，以下で簡単に解説しておくこととする．

$B(X^*, Y^*)$ で $X^* \times Y^*$ 上の連続双線形汎関数全体の作る Banach 空間 with $\|\Phi\| \equiv \sup\{|\Phi(x^*, y^*)| : \|x^*\| \le 1, \|y^*\| \le 1\}$ を表す．また，$L(X^*, Y)$ で X^* から Y への連続線形作用素全体の作る Banach 空間 with $\|T\| \equiv \sup\{\|Tx\| : \|x^*\| \le 1\}$ を表す．このとき，以下が成り立つ．証明は例えば，Jarchow [12], Schaefer [21], Schatten [22] などを見よ．

(1) $X\widehat{\otimes}_\omega Y$ は $B(X^*,Y^*)$ の中に自然な対応

$$\theta: z=\sum_{i=1}^{n} x_i\otimes y_i \mapsto \varPhi_z(x^*,y^*)\equiv \sum_{i=1}^{n} \langle x_i,x^*\rangle \langle y_i,y^*\rangle, (x^*,y^*)\in X^*\times Y^* \quad (2.3)$$

によって等距離線形的に埋め込まれる.

(2) $X\widehat{\otimes}_\omega Y$ は $L(X^*,Y)$ の中に (2.2) で定義される自然な対応 τ によって等距離線形的に埋め込まれる.

一方，各 $x^*\in X^*$，$y^*\in Y^*$ に対して

$$(x^*\widehat{\otimes}_\omega y^*)(x\otimes y)=\langle x,x^*\rangle \langle y,y^*\rangle, \quad x\in X, y\in Y$$

を満たす $X\widehat{\otimes}_\omega Y$ 上の連続線形汎関数 $x^*\widehat{\otimes}_\omega y^*$ が一意的に存在して

$$\left\|x^*\widehat{\otimes}_\omega y^*\right\|=\|x^*\|\cdot\|y^*\|$$

が成り立つ．この $x^*\widehat{\otimes}_\omega y^*$ のことを x^* と y^* の **ω-テンソル積**とよぶ．このとき以下が成り立つ:

(3) 上で述べた埋め込み θ と τ は

$$\theta(z)(x^*,y^*)=(x^*\widehat{\otimes}_\omega y^*)(z)=\langle \tau(z)(x^*),y^*\rangle, \quad x^*\in X^*, y^*\in Y^*, z\in X\widehat{\otimes}_\omega Y$$

と表される.

(4) 任意の $\varPhi\in(X\widehat{\otimes}_\omega Y)^*$ に対して，X^*，Y^* の閉単位球 B_{X^*}，B_{Y^*} の直積空間 $B_{X^*}\times B_{Y^*}$ (これは直積位相 $\sigma(X^*,X)\times\sigma(Y^*,Y)$ に関してコンパクト) 上の正値有限 Radon 測度 $m_\varPhi$ が存在して

$$\varPhi(z)=\int_{B_{X^*}\times B_{Y^*}} (x^*\widehat{\otimes}_\omega y^*)(z) m_\varPhi(dx^*,dy^*), \quad z\in X\widehat{\otimes}_\omega Y$$

と表され，$\|\varPhi\|=m_\varPhi(B_{X^*}\times B_{Y^*})$ となる.

この ω-テンソル積の概念は，一般の局所凸空間に対しても定義できる．詳しくは，Jarchow [12]，Schaefer [21] を見よ.

$(S,\mathcal{S})$，$(T,\mathcal{T})$ は可測空間で，$\mu:\mathcal{S}\to X$ と $\nu:\mathcal{T}\to Y$ は**ベクトル測度**とする．この小論を通じて，ベクトル測度はすべて可算加法的であるとし，そうでない場合はその旨を断ることにする．互いに素な可測長方形の有限和

$$C=\bigcup_{i=1}^{n} A_i\times B_i, \quad A_i\in\mathcal{S}, B_i\in\mathcal{T} \quad (2.4)$$

に対して，その値を

$$\mu \otimes \nu(C) \equiv \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i) \otimes \nu(B_i) \tag{2.5}$$

で定義すると，$\mu \otimes \nu$ は (2.4) の形の集合全体からなる集合体上で定義され，代数的テンソル積 $X \otimes Y$ に値をとる有限加法的ベクトル測度となる．

1967 年に Duchon-Kluvánek [6] は，(2.5) で定義された有限加法的ベクトル測度は，そのとる値の空間を ω-テンソル積 $X \widehat{\otimes}_\omega Y$ とすると，直積 σ-集合体 $\mathcal{S} \times \mathcal{T}$ 上の (可算加法的) ベクトル測度 $\mu \widehat{\otimes}_\omega \nu : \mathcal{S} \times \mathcal{T} \to X \widehat{\otimes}_\omega Y$ に一意的に拡張できることを示した．このベクトル測度 $\mu \widehat{\otimes}_\omega \nu$ のことを，μ と ν の **ω-テンソル積測度**という．テンソル積測度の存在性に関するより一般的な結果については，Swartz [23] を見よ．

§3. Bartle-Dunford-Schwartz 積分と Bartle の双線形ベクトル積分． この § では，スカラー関数のベクトル測度による積分である Bartle-Dunford-Schwartz 積分と，ベクトル関数のベクトル測度による積分である Bartle の双線形ベクトル積分の定義を復習し，その特別な場合について両者の間の関係をまとめておく．

$(S, \mathcal{S})$ は可測空間，X は Banach 空間，$\mu : \mathcal{S} \to X$ はベクトル測度とする．各 $x^* \in X^*$ に対して

$$(x^*\mu)(A) \equiv \langle \mu(A), x^* \rangle, \quad A \in \mathcal{S}$$

によって実測度 $x^*\mu : \mathcal{S} \to \mathbb{R}$ が対応するが，この $x^*\mu$ の全変動 $|x^*\mu|$ を用いて定義される

$$\|\mu\|(A) \equiv \sup\{|x^*\mu|(A) : \|x^*\| \leq 1, x^* \in X^*\}$$

のことを μ の**半変動** (semivariation) という．

半変動は単調増加 (i.e., $A \subset B$ ならば $\|\mu\|(A) \leq \|\mu\|(B)$)，可算劣加法的 (i.e., 任意の集合列 $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{S}$ に対して，$\|\mu\|(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \|\mu\|(A_i)$) な非負値集合関数となる．また，$\mu$ の可算加法性により，半変動は常に有限な値をとる (i.e., $\|\mu\|(S) < \infty$)．このとき，μ は**有界半変動** (of bounded semivariation) であるという．実際には，ベクトル測度 μ の値域 $\{\mu(A) : A \in \mathcal{S}\}$ は有界で，各 $A \in \mathcal{S}$ に対して

$$\sup\{\|\mu(B)\| : B \in \mathcal{S}, B \subset A\} \leq \|\mu\|(A) \leq 2\sup\{\|\mu(B)\| : B \in \mathcal{S}, B \subset A\} < \infty$$

が成り立つ．また，μ の**全変動** (total variation) を

$$|\mu|(A) \equiv \sup\left\{\sum_{i=1}^{n} \|\mu(A_i)\| : \{A_i\}_{i=1}^{n} \text{は} A \text{の有限可測分割}\right\}$$

と定義すると

$$\|\mu(A)\| \leq \|\mu\|(A) \leq |\mu|(A), \quad A \in \mathcal{S}$$

となる．全変動は半変動と異なり，μ が可算加法的であっても必ずしも有限な値になるとは限らない．特に，$|\mu|(S) < \infty$ のとき，μ は**有界変動** (of bounded variation) であるという．

ベクトル測度の半変動はかなり取り扱い易い性質をもってはいるが，全変動と異なり可算加法的ではない．ところが，Bartle-Dunford-Schwartz [2] によれば，ベクトル測度 $\mu : \mathcal{S} \to X$ に対して

$$\lim_{\sigma(A)\to 0} \|\mu\|(A) = 0 \quad \text{かつ} \quad \sigma(A) \leq \|\mu\|(A), \quad \forall A \in \mathcal{S}$$

を満たす正値有限測度 $\sigma : \mathcal{S} \to [0, \infty)$ が常に存在する．この σ のことを μ の**コントロール測度** (control measure) といい，ベクトル測度の研究を行う際には必要不可欠なものとなっている．以上の内容の証明については，Diestel-Uhr [5] を見よ．

以上の準備のもとで，まず Bartle-Dunford-Schwarz [2] によるスカラー関数のベクトル測度による積分の定義を復習する．以下では，χ_A で集合 A の定義関数を表す．

Bartle-Dunford-Schwartz 積分: 実数値関数 $f : S \to \mathbb{R}$ のベクトル測度 $\mu : \mathcal{S} \to X$ による積分を段階を分けて定義する．関数 f が**単関数** (simple function)

$$f = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i}, \quad \text{各 } a_i \in \mathbb{R}, A_i \in \mathcal{S} \tag{3.1}$$

のとき，集合 $E \in \mathcal{S}$ 上での f の μ による積分を

$$\int_E f d\mu \equiv \sum_{i=1}^{n} a_i \mu(E \cap A_i) \tag{3.2}$$

で定義する．この積分は単関数を (3.1) の形で表現する仕方によらずに一意的に定まる．さらに，積分 (3.2) は f および μ に関して線形で

$$\left\| \int_E f d\mu \right\| \leq \sup_{s \in E} |f(s)| \cdot \|\mu\|(E), \quad E \in \mathcal{S} \tag{3.3}$$

が成り立つ．

次に，関数 $f : S \to \mathbb{R}$ は次の (a), (b) を満たす単関数列 $\{f_n\}$ が存在するとき，**μ-可積分** (μ-integrable) であるという:

(a) $f_n(s) \to f(s)$ ($\|\mu\|$-a.e. $s \in S$).

(b) 各 $E \in \mathcal{S}$ に対して，$\left\{\int_E f_n d\mu\right\}$ は X でノルム収束する．

このとき $\left\{\int_E f_n d\mu\right\}$ の極限は，f に $\|\mu\|$-概収束する単関数列の選び方によらずに一意に定まるので，それを $\int_E f d\mu$ で表し，集合 $E \in \mathcal{S}$ 上での f の μ による**積分**という，すなわち

$$\int_E f d\mu \equiv \lim_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu.$$

すべての $\mathcal{S}$-可測な有界関数 $f : S \to \mathbb{R}$ は μ-可積分であり，(3.3) が成り立つ．この積分は Lebesgue 積分や Bochner 積分と同様の多くの性質をもつが，それらについては Bartle-Dunford-Schwartz [2] や Dunford-Schwartz [8] を見よ．また，局所凸線形空間に値をとるベクトル測度に対するこのタイプの積分については，Lewis [19] や Kluvánek-Knowles [18] を見よ．

次に，ベクトル関数のベクトル測度による積分である Bartle の双線形ベクトル積分について簡単に復習しておく．X，Y，Z は Banach 空間で，$b : X \times Y \to Z$ は連続な双線形写像とする．このとき，4 つ組 $(X, Y, Z; b)$ のことを**双線形系**とよぶ．また，$\nu : \mathcal{S} \to Y$ をベクトル測度とする．このとき

$$\|\nu\|_b(A) \equiv \sup\left\{\left\|\sum_{i=1}^n b(x_i, \nu(A_i))\right\| : \|x_i\| \le 1, \{A_i\}_{i=1}^n \text{は} A \text{の有限可測分割}\right\}$$

のことを，双線形系 $(X, Y, Z; b)$ に関する ν の**Bartle 半変動** (Bartle semivariation) という．この Bartle 半変動は，通常の半変動と同様に単調増加かつ可算劣加法的な非負値集合関数となるが，半変動の場合と異なり，一般には ν が可算加法的であっても $\|\nu\|_b(S)$ は必ずしも有限とはならない．そこで，双線形ベクトル積分の理論を展開するために，Bartle 半変動に対して次の条件 (*) を仮定する:

(*): 正値有限測度 $\sigma : \mathcal{S} \to [0, \infty)$ が存在して，$\lim_{\sigma(A)\to 0} \|\nu\|_b(A) = 0$ が成り立つ．

この条件は Bartle の論文 [1] では，***-property** とよばれている．条件 (*) より，実際には $\sigma(A) \to 0 \Leftrightarrow \|\nu\|_b(A) \to 0$ となる正値有限測度 $\sigma : \mathcal{S} \to [0, \infty)$ が存在することが，いわゆる exhaustion 法によって導かれる (Halmos [10] を見よ)．条件 (*) を仮定すると，半変動と同様に ν の Bartle 半変動は常に有限な値となる, i.e., $\|\nu\|_b(S) < \infty$，となるとともに，σ が ν のコントロール測度としての役割を果たす．

条件 (*) は，ν が有界変動であれば自動的に成り立つ．また，双線形系 $(X, Y, Z; b)$ において，$Z = X \widehat{\otimes}_\omega Y$，双線形写像 $b_\omega : X \times Y \to Z$ が $b_\omega(x, y) = x \otimes y$ で与えられているときは

$$\|\nu\|_{b_\omega}(A) = \|\nu\|(A), \quad \forall A \in \mathcal{S}$$

となるので，双線形系 $(X,Y,X\widehat{\otimes}_\omega Y;b_\omega)$ に関する ν の Bartle 半変動は条件 (*) を満たす (Swartz [23] を見よ)．以上の準備のもとで双線形ベクトル積分の Bartle による定義を復習する．

Bartle の双線形ベクトル積分: ベクトル関数 $\varphi : S \to X$ のベクトル測度 $\nu : \mathcal{S} \to Y$ による積分を段階を分けて定義する．ベクトル関数 φ が**単関数** (simple function)

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} x_i \chi_{A_i}, \quad \text{各 } x_i \in X, A_i \in \mathcal{S} \tag{3.4}$$

のとき，集合 $E \in \mathcal{S}$ 上での φ の ν による積分を

$$\int_E b(f, d\nu) \equiv \sum_{i=1}^{n} b(x_i, \nu(E \cap A_i)) \tag{3.5}$$

で定義する．この積分は単関数を (3.4) の形で表現する仕方によらずに一意的に定まる．さらに，積分 (3.5) は φ および ν に関して線形で

$$\left\| \int_E b(\varphi, d\nu) \right\| \leq \sup_{s \in E} \|\varphi(s)\| \cdot \|\nu\|_b (E), \quad E \in \mathcal{S}$$

が成り立つ．

次に，ベクトル関数 $\varphi : S \to X$ は次の (a)，(b) を満たすベクトル単関数列 $\{\varphi_n\}$ が存在するとき，双線形系 $(X,Y,Z;b)$ に関して**ν-Bartle 可積分** (ν-Bartle integrable) であるという:

(a) $\varphi_n(s) \to \varphi(s)$ ($\|\nu\|_b$-a.e. $s \in S$).

(b) 各 $E \in \mathcal{S}$ に対して，$\left\{\int_E b(\varphi_n, d\nu)\right\}$ は X でノルム収束する．

このとき $\left\{\int_E b(\varphi_n, d\nu)\right\}$ の極限は，φ に $\|\nu\|_b$-概収束する単関数列の選び方によらずに一意に定まるので，それを $\int_E b(\varphi, d\nu)$ で表し，集合 $E \in \mathcal{S}$ 上でのベクトル関数 φ のベクトル測度 ν による双線形系 $(X,Y,Z;b)$ に関する**Bartle 積分**という，すなわち

$$\int_E b(\varphi, d\nu) \equiv \lim_{n\to\infty} \int_E b(\varphi_n, d\nu).$$

また，ベクトル関数 $\varphi : S \to X$ は，(a) を満たす単関数列 $\{\varphi_n\}$ が存在するとき，**ν-可測** (ν-measurable) であるという．Bartle 積分の詳細な性質については，Bartle の原著論文 [1] を見よ．

この小論では，双線形系 $(X,Y,X\widehat{\otimes}_\omega Y;b_\omega)$ に関する Bartle 積分が中心的な役割を果たす．そこで，一般の Bartle 積分と区別して，ベクトル関数 $\varphi : S \to X$ が双線形系 $(X,Y,X\widehat{\otimes}_\omega Y;b_\omega)$ に関して Bartle 積分可能であるとき，**ω-テンソル積分可能**であるといい，$\int_E b_\omega(\varphi, d\nu)$ のことを $\int_E \varphi \widehat{\otimes}_\omega d\nu$ とかき，**ω-テンソル積分**という．このタイプの Bartle 積分は取り扱いやすいとともに，多くの重要な性質を持つ．以下では，この小論の中で必要なものに限ってまとめておくことにする．

ω-テンソル積分の性質:

(5) すべての有界なν-可測ベクトル関数$\varphi : S \to X$はω-テンソル積分可能で

$$\left\| \int_E \varphi \widehat{\otimes}_\omega d\nu \right\|_\omega \leq \sup_{s \in E} \|\varphi(s)\| \cdot \|\nu\|_{b_\omega}(E), \quad E \in \mathcal{S}$$

が成り立つ.

(6) ベクトル関数$\varphi : S \to X$がνに関してω-テンソル積分可能ならば，任意の$x^* \in X^*$，$y^* \in Y^*$，$E \in \mathcal{S}$に対して，$x^*\varphi$は集合E上でν-可積分かつ$y^*\nu$-可積分で

$$\theta\left(\int_E \varphi \widehat{\otimes}_\omega d\nu\right) = \left\langle \int_E x^*\varphi d\nu, y^* \right\rangle = \int_E x^*\varphi d y^*\nu$$

と表され

$$\begin{aligned}\left\| \int_E \varphi \widehat{\otimes}_\omega d\nu \right\|_\omega &= \sup\left\{ \int_E x^*\varphi d\nu : \|x^*\| \leq 1 \right\} \\ &= \sup\left\{ \int_E x^*\varphi d y^*\nu : \|x^*\| \leq 1, \|y^*\| \leq 1 \right\}\end{aligned}$$

が成り立つ．ただし，$\theta : X \widehat{\otimes}_\omega Y \to B(X^*, Y^*)$は(2.3)で定義された自然な埋め込みとする.

(7) (原始的なFubiniの定理) 関数$h : S \times T \to \mathbb{R}$は$\mathcal{S} \times \mathcal{T}$-可測かつ有界で，$\mu : \mathcal{S} \to X$，$\nu : \mathcal{T} \to Y$はベクトル測度とする．このとき

(a) すべての$t \in T$に対して$h(\cdot, t)$は$\mathcal{S}$-可測かつμ-可積分で,

(b) ベクトル関数$\varphi : t \in T \to \int_S h(s,t)\mu(ds) \in X$は$\nu$に関して$\omega$-テンソル積分可能となり,

(c) 累次積分の公式

$$\int_{S \times T} h d\mu \widehat{\otimes}_\omega \nu = \int_T \varphi \widehat{\otimes}_\omega d\nu$$

が成り立つ.

より一般的なFubiniの定理に関しては，Chivukula-Sastry [3]，Huneycutt [11]，Swartz [24]，Freniche and Garía-Vázquez [9]などを見よ.

§4. 正値ベクトル測度の弱収束. 位相空間Sに対して，$\mathcal{B}(S)$でSのBorel集合からなるσ-集合体，$C(S)$でS上の有界連続な実数値関数全体からなるBanach空間

with $\|f\|_\infty \equiv \sup_{s\in S}|f(s)|$ を表す．また，X をBanach空間とし，$\mathcal{M}(S;X)$ でベクトル測度 $\mu : \mathcal{B}(S) \to X$ の全体を表す．

位相空間上のベクトル測度に対しても，実測度の場合と同様に種々の正則性を定義することができる．例えば，ベクトル測度 $\mu : \mathcal{B}(S) \to X$ は，任意の $\varepsilon > 0$ と $A \in \mathcal{B}(S)$ に対して，コンパクト集合 $K \subset A$ が存在して $\|\mu\|(A-K) < \varepsilon$ となるとき，**Radon** であるという．特に，この条件が $A = S$ の場合に成り立つとき，μ は**緊密** (tight) であるという．また，開集合からなる任意の単調増大ネット $\{G_\alpha\}$ with $G = \bigcup_\alpha G_\alpha$ に対して，$\lim_\alpha \|\mu\|(G - G_\alpha) = 0$ となるとき，μ は**τ-正則** (τ-smooth) であるという．これらの正則性は，実際には，各 $x^* \in X^*$ に対して，対応する実測度 $x^*\mu$ が同じ正則性をもつことと同値である (例えば，[14] を見よ)．

1991年にDekiertは彼女の学位論文 [4] で，実測度の弱収束の概念の自然な拡張として，ベクトル測度に対しも測度の弱収束の概念を導入した: ベクトル測度からなるネット $\{\mu_\alpha\} \subset \mathcal{M}(S;X)$ と $\mu \in \mathcal{M}(S;X)$ に対して

$$\left\| \int_S f d\mu_\alpha - \int_S f d\mu \right\| \to 0 \quad \text{for } \forall f \in C(S) \tag{4.1}$$

が成り立つとき，$\{\mu_\alpha\}$ は μ に**弱収束**するといい，$\mu_\alpha \xrightarrow{w} \mu$ とかく．ここで，(4.1) の中の積分はBartle-Dunford-Schwartz積分である．また，ノルムでの収束の代わりに弱収束，すなわち，各 $x^* \in X^*$ に対して

$$\left\langle \int_S f d\mu_\alpha - \int_S f d\mu, x^* \right\rangle \to 0 \quad \text{for } \forall f \in C(S)$$

が成り立つとき，$\{\mu_\alpha\}$ は μ に σ-弱収束するといい，$\mu_\alpha \xrightarrow{\sigma w} \mu$ とかくことにする．これらベクトル測度の弱収束，σ-弱収束によって定まる $\mathcal{M}(S;X)$ 上の位相をそれぞれ，**ベクトル測度の弱位相**，**σ-弱位相**という．

März-Shortt [20] は，S が距離空間の場合に，ベクトル測度の集合がベクトル測度の σ-弱位相に関して (点列) コンパクトとなるための判定条件を与えた．この判定条件は [15] では核型空間に値をとる場合に，[16] ではある種の局所凸空間に値をとる場合に拡張されている．

測度の弱収束に関する研究は，実測度の場合ですら，測度に対して正値性を仮定しないと実りある理論展開を期待できない．実際，測度の弱収束を研究する際に中心的な役割を果たすPortmanteau Theorem (例えば，Dudley [7] などを見よ) は，正値でない測度に対しては一般に成立しない．そこで，以下ではベクトル測度に正値性を導入することを試みる．

$(X,\le)$ はBanach束，すなわち，$(X,\le)$ はRiesz空間かつBanach空間で，順序とノルムが

$$|x| \le |y| \text{ ならば } \|x\| \le \|y\|$$

で結びつけられているとする．Banach束の詳細な性質については，Zaanen [25] を見よ．X の正の要素の全体を X^+ で表す．このとき，ベクトル測度 $\mu : \mathcal{B}(S) \to X$ は，すべての $A \in \mathcal{B}(S)$ に対して，$\mu(A) \in X^+$ となるとき，**正値** (positive) であるという．正値ベクトル測度の全体を $\mathcal{M}^+(S;X)$ で表す．正値ベクトル測度 $\mu : \mathcal{B}(S) \to X$ の半変動 $\|\mu\|$ に対しては

$$\|\mu\|(A) = \|\mu(A)\|, \quad \forall A \in \mathcal{B}(S)$$

が成り立つ．また，μ-可積分な実数値関数 $f,g : S \to \mathbb{R}$ が $|f| \le g$ ($\|\mu\|$-a.e.) を満たしていれば，

$$\left|\int_S f d\mu\right| \le \int_S |f| d\mu \le \int_S g d\mu \quad \text{かつ} \quad \left\|\int_S f d\mu\right\| \le \left\|\int_S g d\mu\right\|$$

が成り立つ．これらの性質は，正値ベクトル測度の理論を展開する際に大いに役立ち，証明のいたるところで活用される．

この§を終えるにあたって，関連する話題を一つあげておく．(S,d) は距離空間とする．このとき，正値Radonベクトル測度の全体 $\mathcal{M}_t^+(S;X)$ 上のベクトル測度の弱位相は，距離

$$\beta(\mu,\nu) \equiv \sup\left\{\left\|\int_S f d(\mu-\nu)\right\| : f \in BL(S,d), \|f\|_{BL} \le 1\right\}$$

に関して距離付け可能となる．ただし，$BL(S,d)$ で S 上の有界Lipchitz連続関数全体の作るBanach空間 with

$$\|f\|_{BL} \equiv \|f\|_L + \|f\|_\infty = \sup_{s\ne t} \frac{|f(s)-f(t)|}{d(s,t)} + \|f\|_\infty$$

を表す ([17] を見よ).

§5. テンソル積測度の連続性. この§では，ベクトル測度の ω-テンソル積がベクトル測度の弱位相に関して連続となることを報告する．この結果の証明にはBartleの双線形ベクトル積分の理論とベクトル測度の正値性が本質的な役割を果たすが，その辺の事情を明確にするために，結果の紹介だけではなく，証明の概略も与えることとする．

S，T は一様空間，X，Y はBanach束とし，$\mu \in \mathcal{M}^+(S;X)$，$\nu \in \mathcal{M}^+(T;Y)$ を正値ベクトル測度とする．以下では次の2つの条件を仮定する:

(A1) 一様空間SとTは$\mathcal{B}(S \times T) = \mathcal{B}(S) \times \mathcal{B}(T)$を満たす.

(A2) XとYのω-テンソル積$X \widehat{\otimes}_\omega Y$はBanach束で

$$x \otimes y \geq 0 \quad \text{for } \forall x \in X^+, \forall y \in Y^+$$

が成り立つ.

(A1)と(A2)により，μとνのω-テンソル積$\mu \widehat{\otimes}_\omega \nu$は$\mathcal{B}(S \times T)$上の正値ベクトル測度となるので，それらの弱収束性を議論することができる．(A1)は，位相空間S，Tが第2可算公理を満たすとき，例えばS，Tが可分な距離空間であれば自動的に満たされる．一方，(A2)を満たすBanach束の例は以下のようである.

例: 以下のBanach束XとYは(A2)を満たす:
(1) $X = C(K)$ (Kはコンパクト空間), Yは任意のBanach束: このとき，$X \widehat{\otimes}_\omega Y$は$K$上で定義され$Y$に値をとる連続なベクトル値関数全体の作るBanach束$C(K; Y)$と等距離束同型となる．特に，$Y = C(L)$ (Lはコンパクト空間)のときは，$X \widehat{\otimes}_\omega Y$は$C(K \times L)$と等距離束同型となる.
(2) $X = C_0(M)$ (Mは局所コンパクト空間), Yは任意のBanach束．ただし，M上で定義された無限遠点で消滅する実数値連続関数全体の作るBanach束を$C_0(M)$で表す: このとき，$X \widehat{\otimes}_\omega Y$は$M$上で定義され$Y$に値をとる無限遠点で消滅する連続なベクトル関数全体の作るBanach束$C_0(M; Y)$と等距離束同型となる．特に，$Y = C_0(N)$ (Nは局所コンパクト空間)のときは，$X \widehat{\otimes}_\omega Y$は$C_0(M \times N)$と等距離束同型となる.
(3) $X = L^\infty(\Omega)$, Yは任意のBanach束．ただし，$(\Omega, \mathcal{A}, \sigma)$は測度空間とし，$L^\infty(\Omega)$で$\Omega$上で定義された$\sigma$-本質的に有界な$\mathcal{A}$-可測実数値関数(の同値類)全体の作るBanach束を表す: このとき，$X \widehat{\otimes}_\omega Y$は，Banach束となる．しかし，この$\omega$-テンソル積は，$\Omega$上で定義された$\sigma$-本質的に有界な$\sigma$-可測ベクトル関数$\varphi : \Omega \to Y$(の同値類)全体の作るBanach束$L^\infty(\Omega; Y)$とは一致せず，一般には閉部分空間となる.
(4) $X = c_0$，Yは任意のBanach束．ただし，c_0で0に収束する実数列全体の作るBanach束を表す: このとき，$X \widehat{\otimes}_\omega Y$は0に収束する$Y$の要素からなるベクトル列全体の作るBanach束$c_0(Y)$と等距離束同型となる.

次の定理はベクトル測度のω-テンソル積のベクトル測度の弱収束に関する連続性を示している.

定理．$\{\mu_\alpha\} \subset \mathcal{M}^+(S;X)$ はネットで，$\mu \in \mathcal{M}^+(S;X)$，$\{\nu_\alpha\} \subset \mathcal{M}_t^+(T;Y)$ はネットで，$\nu \in \mathcal{M}_t^+(T;Y)$ とする．さらに，μ は緊密で，ν は τ-正則と仮定する．このとき，$\mu_\alpha \xrightarrow{w} \mu$ かつ $\nu_\alpha \xrightarrow{w} \nu$ ならば $\mu_\alpha \widehat{\otimes}_\omega \nu_\alpha \xrightarrow{w} \mu \widehat{\otimes}_\omega \nu$ が成り立つ．

定理の証明のどの部分で双線形ベクトル積分の理論とベクトル測度の正値性が用いられているかを明確にするために，証明の概略を与えることとする．

証明の概略. ベクトル測度の弱収束の定義より，$\forall h \in C(S \times T)$ に対して

$$\left\| \int_{S\times T} hd(\mu_\alpha \widehat{\otimes}_\omega \nu_\alpha) - \int_{S\times T} hd(\mu \widehat{\otimes}_\omega \nu) \right\|_\omega \to 0 \tag{5.1}$$

が成り立つことを示せばよい．

(Step 1) 直積一様空間 $S \times T$ 上の有界かつ一様連続な実数値関数全体の作る Banach 空間を $U(S \times T)$ で表せば，(5.1) が成り立つには，$\forall h \in U(S \times T)$ に対して (5.1) が成り立てば十分であることを示す．この部分の証明では，ω-テンソル積測度 $\mu_\alpha \widehat{\otimes}_\omega \nu_\alpha$ と $\mu \widehat{\otimes}_\omega \nu$ の正値性が本質的に用いられる．

(Step 2) §3 の (7) の Fubini の定理を用いて，ω-テンソル積測度による積分を累次積分に書き直す:

$$\int_{S\times T} hd(\mu_\alpha \widehat{\otimes}_\omega \nu_\alpha) = \int_T \varphi_\alpha \widehat{\otimes}_\omega d\nu_\alpha, \quad \int_{S\times T} hd(\mu \widehat{\otimes}_\omega \nu) = \int_T \varphi \widehat{\otimes}_\omega d\nu$$

ただし

$$\varphi_\alpha(t) \equiv \int_S h(s,t)\mu_\alpha(ds), \qquad \varphi(t) \equiv \int_S h(s,t)\mu(ds)$$

とする．この際に，ω-テンソル積分 (Bartle の双線形ベクトル積分) が用いられる．

(Step 3) 記号を簡単にするために

$$L_\alpha\varphi_\alpha \equiv \int_T \varphi_\alpha \widehat{\otimes}_\omega d\nu_\alpha, \qquad L_\alpha\varphi \equiv \int_T \varphi \widehat{\otimes}_\omega d\nu_\alpha$$
$$L\varphi_\alpha \equiv \int_T \varphi_\alpha \widehat{\otimes}_\omega d\nu, \qquad L\varphi \equiv \int_T \varphi \widehat{\otimes}_\omega d\nu$$

とおく．このとき

$$L_\alpha\varphi_\alpha = L_\alpha\varphi + (L_\alpha\varphi_\alpha - L_\alpha\varphi)$$

と変形し，ν の τ-正則性と幾つかの技術的な補題により

$$\|L_\alpha\varphi_\alpha - L_\alpha\varphi\|_\omega \to 0 \tag{5.2}$$

となることを示す．

(Step 4) §2の(6)で述べたω-テンソル積分の表現を用いることにより，(5.2)を示すには

$$\sup_{\|x^*\|\le 1}\left\|\int_T x^*\varphi d\nu_\alpha - \int_T x^*\varphi d\nu\right\| \to 0 \tag{5.3}$$

が成り立つことを示せばよいことがわかる．

(Step 5) 集合$\Phi \equiv \{x^*\varphi : \|x^*\| \le 1\} \subset U(T)$が同程度一様連続かつ一様有界となることにより，Arzelà-Ascoliの定理をうまく使って，(5.3)がνの緊密性と弱収束性$\nu_\alpha \xrightarrow{w} \nu$より導かれることを示し，証明が完了する． □

上記ではいちいち触れなかったが，ベクトル測度μ_α，ν_α，μ，νの正値性はこの論文のいたるところで利用されている．このように，ベクトル測度に対して正値性の概念を導入し，それを活用することにより，ベクトル測度の弱収束に関する詳細な議論の展開が可能となることがわかった．例えば，[14]では，正値ベクトル測度に対してStrassenタイプの定理が証明されている．

参考文献

[1] R. G. Bartle, *A general bilinear vector integral*, Studia Math. **15** (1956), 337-352.

[2] R. G. Bartle, N. Dunford and J. Schwartz, *Weak compactness and vector measures*, Canad. J. Math. **7** (1955), 289-305.

[3] R. R. Chivukula and A. S. Sastry, *Product vector measures via Bartle integrals*, J. Math. Anal. Appl. **96** (1983), 180-195.

[4] M. Dekiert, *Kompaktheit, Fortsetzbarkeit und Konvergenz von Vectormassen*, Dissertation, University of Essen, 1991.

[5] J. Diestel and J. J. Uhr, Jr., *Vector Measures*, Providence, R.I., 1977.

[6] M. Duchon and I. Kluvánek, *Inductive tensor product of vector-valued measures*, Mat. Časopis Sloven. Akad. Vied. **17** (1967), 108-112.

[7] R. M. Dudley, *Real Analysis and Probability*, Wadsworth & Brooks/Cole, 1989.

[8] N. Dunford and J. T. Schwartz, *Linear Operators*, Part 1: General Theory, John Wiley & Sons, New York, 1988.

[9] F. J. Freniche and J. C. García-Vázquez, *The Bartle integration and Carleman operators*, J. Math. Anal. Appl. **240** (1999), 324-339.

[10] P. R. Halmos, *Measure Theory*, Springer, New York, 1974.

[11] J. E. Huneycutt, *Products and convolutions of vector valued set functions*, Studia. Math. **41** (1972), 119-129.

[12] H. Jarchow, *Locally Convex Spaces*, B. G. Teubner, Stuttgart, 1981.

[13] J. Kawabe, *Weak convergence of tensor products of vector measures with values in nuclear spaces*, Bull. Austral. Math. Soc. **59** (1999), 449-458.

[14] ———, *A type of Strassen's theorem for positive vector measures with values in dual spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **128** (2000), 3291-3300.

[15] ———, *Sequential compactness for the weak topology of vector measures in certain nuclear spaces*, to appear in Infinite-Dimensional Probability and Related Problems of Analysis, Essays in Honour of Nicholas N. Vakhania.

[16] ———, *Compactness criteria for the weak topology of vector measures in certain locally convex spaces* (submitted).

[17] ———, *Portmanteau theorem for positive vector measures*, (in preparation).

[18] I. Kluvánek and G. Knowles, *Vector Measures and Control Systems*, North-Holland, 1976.

[19] D. R. Lewis, *Integration with respect to vector measures*, Pacific J. Math. **3** (1970), 157-165.

[20] M. März and R. M. Shortt, *Weak convergence of vector measures*, Publ. Math. Debrecen **45** (1994), 71-92.

[21] H. H. Schaefer, *Topological Vector Spaces*, Springer, New York, 1971.

[22] R. Schatten, *A Theory of Cross Spaces*, Ann. of Math. Studies **26**, Princeton, N.J., 1950.

[23] C. Swartz, *A generalization of a theorem of Duchon on products of vector measures*, J. Math. Anal. Appl. **51** (1975), 621-628.

[24] ———, *Fubini's theorem for tensor product measures*, Rev. Roum. Math. Pures et Appl. **24** (1984), 97-103.

[25] A. C. Zaanen, *Introduction to Operator Theory in Riesz Spaces*, Springer, Berlin Heidelberg, 1997.

Department of Mathematics, Faculty of Engineering, Shinshu University, 4-17-1 Wakasato, Nagano 380-8553, Japan

E-mail address: jkawabe@gipwc.shinshu-u.ac.jp