数理解析研究所講究録
第1186巻 2001年 133-144

フィードバックをもつ混合型ガウス型通信路の容量について

山口大・工　柳　研二郎 (Kenjiro YANAGI)
山口大・理工　玉　基文 (Ji Wen YU)

1 はじめに

２０世紀最後の年もあとわずかとなり、世界中が新しい世紀を迎えるためのカウントダウンをするほど感動極まりない経験をしようとしている. 科学技術の進歩についてみると２０世紀はすばらしい足跡を残したといっても過言ではない。２０世紀初頭には第１次世界大戦をへて化学がすばらしい発展を遂げた. また２０世紀中旬には第２次世界大戦をへて物理学が多大なる貢献を果たした. そして２０世紀終盤から２１世紀初頭にかけては、こんどは情報科学が目を見張る勢いで人類に多大なる寄与をしつつある. 具体的には情報技術革命といわれているような、様々な技術革新である. インターネット、携帯電話、BSデジタル通信等々である. これからますます全く新しい技術が我々の家庭に入り込んできて、今まで予想だにしなかった生活を我々に与えてくれるであろう. ところが情報技術革命に基礎的役割を果たしているのが数学、その中でも特に情報数理であることをどれほどご存知であろうか. 情報通信に関するセキュリティーを保証するための暗号理論、効率的に通信を行うための符号理論、また量子コンピューターの基礎理論を担う量子情報理論等々である. よく数学は何の役にも立たない学問で、貴族の暇つぶしのためにする碁や将棋に似たゲームのようなもので、そんなものには税金をかけてまでやる価値がないというような声をマスコミを通して目や耳にすることが多いが、これは全くナンセンスな言い草である. もし数学は何の役にも立たない学問であるので、そんな学部や学科を取り潰してもっと役に立つものをやるべきだという間違った判断をすれば、日本は致命的なミスを犯してしまったといっても言い過ぎではない. そのことにより日本は他の先進国から大きな差をつけられ、ひいては二流国へと転落していくことになるであろう. 現在、国立大学を独立法人化する方針を文部省は決めたそ

うであるが、その一環として役に立たない、あるいは外部資金を取れないような学問分野として数学をおろそかにするようなことが万が一にでもあれば、もう国の破滅につながることは目に見えている. 文部省の役人や政治家の中にもう少し数学に理解のある人物がいればよいのだが $\cdots$. 前述の通り、過去の例から見ても化学を制した国家が第1次世界大戦を勝利し、物理学を制した国家が第2次世界大戦を勝利し、今また数学を含む情報科学を制した国家が第3次世界大戦を勝利しようとしていることに目を見開くべきである. 数学を大事にしない国家は滅亡するであろう.

前回の講究録 (No.1100) においてはガウス型通信路の容量に関する不等式に言及したが、今回の講究録では関連して混合型ガウス型通信路の容量について、その性質を明らかにすることを目的にしている. まず第2章では $C_{n,FB,Z}(\cdot)$ の凹性を示す. 次に第3章では $C_{n,FB,\cdot}(P)$ のある意味での凸性を示す. 関連して open problem を提起する. また第4章においては $C_{n,FB,Z}(P)$ ($R_Z^{(n)} = \alpha R_{Z_1}^{(n)} + \beta R_{Z_2}^{(n)}$ で定義される雑音 Z をもつときの容量) と $C_{n,FB,\alpha Z_1+\beta Z_2}(P)$ ($\alpha Z_1 + \beta Z_2$ で定義される雑音をもつときの容量) の違いについて考察する. 最後に第5章では $C_{n,FB,Z}(P)$ と $C_{n+1,FB,Z}(P)$ の違いについても言及する.

今まで何度もフィードバックをもつガウス型通信路の容量について報告しているのでその詳細な定義は省略する. もし厳密な定義を必要とする場合は他の報告書を参照していただきたい. フィードバックをもつ有限ブロック長容量は次のように定義される.

$$C_{n,FB,Z}(P) = \max \frac{1}{2n} \log \frac{|R_X^{(n)} + R_Z^{(n)}|}{|R_Z^{(n)}|},$$

ただし $|\cdot|$ は行列式を表し、最大値は

$$Tr[(I+B)R_X^{(n)}(I+B)^t + BR_Z^{(n)}B^t] \leq nP$$

を満たす狭義下三角行列 B と非負対称行列 $R_X^{(n)}$ についてとる. 同様にフィードバックがないときには容量 $C_{n,Z}(P)$ は $B=0$ としたときの最大値である. これらの条件の下で Cover and Pombra [5] は次を得た.

Proposition 1 (Cover and Pombra [5]) 任意の $\epsilon > 0$ に対して各 $n = 1, 2, \ldots$ でブロック長 n で $2^{n(C_{n,FB,Z}(P)-\epsilon)}$ 個の符号語が存在して $n \to \infty$ のとき $Pe^{(n)} \to 0$ とできる. 逆に任意の $\epsilon > 0$ とブロック長 n で $2^{n(C_{n,FB,Z}(P)+\epsilon)}$ 個の符号語からなる任意の符号の列に対しても $Pe^{(n)} \to 0$ $(n \to \infty)$ が成り立たない. これはフィードバックをもたない場合も成り立つ.

$C_{n,Z}(P)$ は正確に得られている.

Proposition 2 (Gallager [9])

$$C_{n,Z}(P) = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{k} \log \frac{nP + r_1 + \cdots + r_k}{kr_i},$$

ただし $0 < r_1 \le r_2 \le \cdots \le r_n$ は $R_Z^{(n)}$ の固有値、$k(\le n)$ は $nP + r_1 + r_2 + \cdots + r_k > kr_k$ を満たす最大整数である.

$C_{n,FB,Z}(P)$ の表現を別の形ですると次のようになる.

Proposition 3 $D = R_Z^{(n)} > 0$ とする. このとき

$$C_{n,FB,Z}(P) = \max \frac{1}{2n} \log \frac{|T + BD + DB^t + D|}{|D|}, \tag{1}$$

ただし最大値は

$$T - BDB^t > 0 \quad \text{and} \quad Tr[T] \le nP$$

を満たす $T \ge 0$ と狭義下三角行列 B についてとる.

Proof. 定義より

$$Tr[(I+B)A(I+B)^t + BDB^t] \le nP \tag{2}$$

$$C_{n,FB,Z}(P) = \frac{1}{2n} \log \frac{|A+D|}{|D|} \tag{3}$$

を満たす $A > 0$ と狭義下三角行列 B が存在する. ここで

$$T = (I+B)A(I+B^t) + BDB^t$$

とおく. (2) より $Tr[T] \le nP$ となり

$$T - BDB^t = (I+B)A(I+B)^t > 0$$

を満たす. $|I+B| = |I+B^t| = 1$ だから

$$|A+D| = |(I+B)A(I+B)^t + (I+B)D(I+B)^t| = |T + BD + DB^t + D|.$$

(3) より

$$C_{n,FB,Z}(P) \le \max \frac{1}{2n} \log \frac{|T + BD + DB^t + D|}{|D|}$$

を得る. 逆に $T - BDB^t > 0$ と

$$\max \frac{1}{2n} \log \frac{|T + BD + DB^t + D|}{|D|} = \frac{1}{2n} \log \frac{|T + BD + DB^t + D|}{|D|} \tag{4}$$

を満たす $T > 0$ と狭義下三角行列 B をとることができる. ここで

$$A = (I+B)^{-1}(T - BDB^t)(I+B^t)^{-1}$$

とおく．このとき $T-BDB^t>0$ だから $A>0$ となり

$$(I+B)A(I+B^t)+BDB^t=T$$

でかつ

$$Tr[(I+B)A(I+B^t)+BDB^t]\leq nP$$

となる．前と同じ議論より

$$|T+BD+DB^t+D|=|A+D|$$

であるので (4) より

$$\max\frac{1}{2n}\log\frac{|T+BD+DB^t+D|}{|D|}\leq C_{n,FB,Z}(P).$$

よって証明を完了する． □

ところで $C_{n,FB,Z}(P)$ は正確には得られていないので、今まで多くの人々によって様々な形の上界が得られている ([1],[2],[3], [5],[7],[8],[11],[12], [14],[15],[16])．以下計算の都合上、対数は自然対数を用いることにする．

2 $C_{n,FB,Z}(\cdot)$ の凹性

Lemma 1 $D>0$ と B_1,B_2, かつ $\alpha,\beta\geq 0(\alpha+\beta=1)$ に対して次が成り立つ．

$$\alpha B_1DB_1^t+\beta B_2DB_2^t\geq(\alpha B_1+\beta B_2)D(\alpha B_1^t+\beta B_2^t).$$

Proof. 次の式から明らかである．

$$\begin{aligned}&\{\alpha B_1DB_1^t+\beta B_2DB_2^t\}-(\alpha B_1+\beta B_2)D(\alpha B_1^t+\beta B_2^t)\\ =\ &\alpha\beta(B_1-B_2)D(B_1^t-B_2^t)\geq 0.\end{aligned}$$

□

Lemma 2 $\log t$ は $(0,\infty)$ 上の作用素凹函数である．すなわち $T_1,T_2>0$ と $\alpha,\beta\geq 0(\alpha+\beta=1)$ に対して

$$\log(\alpha T_1+\beta T_2)\geq\alpha\log(T_1)+\beta\log(T_2).$$

Proof. Lemma 1 より

$$(\alpha T_1 + \beta T_2) \geq (\alpha T_1^{1/2} + \beta T_2^{1/2})^2.$$

Löwner の定理より

$$(\alpha T_1 + \beta T_2)^{1/2} \geq \alpha T_1^{1/2} + \beta T_2^{1/2}.$$

この議論を繰り返していくと

$$(\alpha T_1 + \beta T_2)^{1/(2^k)} \geq \alpha T_1^{1/(2^k)} + \beta T_2^{1/(2^k)} \ (k = 1, 2, \ldots).$$

したがって

$$\begin{aligned} \log(\alpha T_1 + \beta T_2) &= \lim_{k\to\infty} 2^k\{(\alpha T_1 + \beta T_2)^{1/(2^k)} - I\} \\ &\geq \alpha \lim_{k\to\infty} 2^k(T_1^{1/(2^k)} - I) + \beta \lim_{k\to\infty} 2^k(T_2^{1/(2^k)} - I) \\ &= \alpha \log(T_1) + \beta \log(T_2). \end{aligned}$$

□

Theorem 1 Z を固定する．このとき $C_{n,FB,Z}(P)$ は P の函数として作用素凹である．すなわち任意の $P_1, P_2 \geq 0$ と任意の $\alpha, \beta \geq 0 (\alpha + \beta = 1)$ に対して

$$C_{n,FB,Z}(\alpha P_1 + \beta P_2) \geq \alpha C_{n,FB,Z}(P_1) + \beta C_{n,FB,Z}(P_2).$$

Proof. Proposition 3 より

$$C_{n,FB,Z}(P_i) = \frac{1}{2n} \log \frac{|T_i + B_i D + D B_i^t + D|}{|D|} \quad (i = 1, 2),$$

かつ

$$T_i - B_i D B_i^t > 0, \quad \text{and} \quad Tr(T_i) \leq nP_i \ \ (i = 1, 2)$$

を満たす $T_1, T_2 > 0$ と狭義下三角行列 B_1, B_2 が存在する．ここで

$$T = \alpha T_1 + \beta T_2, \qquad B = \alpha B_1 + \beta B_2$$

とする．このとき明らかに $Tr(T) \leq n(\alpha P_1 + \beta P_2)$ かつ B は狭義下三角行列となる．Lemma 1 より

$$BDB^t = (\alpha B_1 + \beta B_2) D (\alpha B_1^t + \beta B_2^t) \leq \alpha B_1 D B_1^t + \beta B_2 D B_2^t$$

だから

$$T - BDB^t \geq \alpha(T_1 - B_1DB_1^t) + \beta(T_2 - B_2DB_2^t) > 0$$

を得る．再び Proposition 2 より

$$C_{n,FB,Z}(\alpha P_1 + \beta P_2) \geq \frac{1}{2n}\log\frac{|T + BD + DB^t + D|}{|D|}.$$

$$T + BD + DB^t + D = \alpha(T_1 + B_1D + DB_1^t + D) + \beta(T_2 + B_2D + DB_2^t + D),$$

だから Lemma 2 より

$$\log(T+BD+DB^t+D) \geq \alpha\log(T_1+B_1D+DB_1^t+D)+\beta\log(T_2+B_2D+DB_2^t+D)$$

を得る．したがって

$$\begin{aligned} & Tr[\log(T + BD + DB^t + D)] \\ \geq\ & \alpha Tr[\log(T_1 + B_1D + DB_1^t + D)] + \beta Tr[\log(T_2 + B_2D + DB_2^t + D)]. \end{aligned}$$

ここで $\log|A| = Tr[\log(A)]$ $(A > 0)$ だから

$$C_{n,FB,Z}(\alpha P_1 + \beta P_2) \geq \alpha C_{n,FB,Z}(P_1) + \beta C_{n,FB,Z}(P_2)$$

を得る． □

3 $C_{n,\cdot}(P), C_{n,FB,\cdot}(P)$ の凸性

Lemma 3

$$f(t) = \log(1 + t^{-1}) = \log(1 + t) - \log t$$

は $(0,\infty)$ 上の作用素凸函数である．すなわち任意の $T_1, T_2 > 0$ と任意の $\alpha, \beta \geq 0(\alpha + \beta = 1)$ に対して

$$\log(I + (\alpha T_1 + \beta T_2)^{-1}) \leq \alpha\log(I + T_1^{-1}) + \beta\log(I + T_2^{-1}). \tag{5}$$

Proof. 任意の $\lambda > 0$ に対して

$$f_\lambda(t) = \frac{1}{\lambda + t}$$

は $(0,\infty)$ 上の作用素凸函数である．すなわち任意の $T_1, T_2 \geq 0$ と任意の $\alpha, \beta \geq 0(\alpha+\beta=1)$ に対して

$$\{\lambda I + (\alpha T_1 + \beta T_2)\}^{-1} \leq \alpha(\lambda I + T_1)^{-1} + \beta(\lambda I + T_2)^{-1}. \tag{6}$$

ここで

$$f(t) = \log(1+t) - \log t = \int_0^1 \frac{1}{\lambda + t} d\lambda = \int_0^1 f_\lambda(t) d\lambda$$

だから (5) は (6) から得られる． □

Theorem 2 Z_1, Z_2 と $\alpha, \beta \geq 0(\alpha+\beta=1)$ を固定する．

$$R_Z^{(n)} = \alpha R_{Z_1}^{(n)} + \beta R_{Z_2}^{(n)}$$

となるように Z をとると、次が成り立つ．

$$C_{n,Z}(P) \leq \alpha C_{n,Z_1}(P) + \beta C_{n,Z_2}(P).$$

Proof.

$$D_i = R_{Z_i}^{(n)} \quad (i=1,2), \quad \text{and} \quad D = R_Z^{(n)}$$

とおく．定義より

$$D = \alpha D_1 + \beta D_2$$

かつ

$$C_{n,Z_i}(P) = \max\{\frac{1}{2n} \log \frac{|A+D_i|}{|D_i|}; A > 0, Tr(A) \leq nP\} \quad (i=1,2)$$

$$C_{n,Z}(P) = \max\{\frac{1}{2n} \log \frac{|A+D|}{|D|}; A > 0, Tr(A) \leq nP\}$$

である．ここで

$$\begin{aligned} \log \frac{|A+D|}{|D|} &= \log |AD^{-1} + I| \\ &= \log |A^{1/2} D^{-1} A^{1/2} + I| \\ &= \log |I + (A^{-1/2} D A^{-1/2})^{-1}|. \end{aligned}$$

に注意すると Lemma 3 より

$$\begin{aligned}\log\frac{|A+D|}{|D|} &= Tr[\log\{I+(\alpha(A^{-1/2}D_1A^{-1/2})+\beta(A^{-1/2}D_2A^{-1/2}))^{-1}\}]\\ &\leq \alpha Tr[\log\{I+(A^{-1/2}D_1A^{-1/2})^{-1}\}]+\beta Tr[\log\{I+(A^{-1/2}D_2A^{-1/2})^{-1}\}]\\ &\leq \alpha\log\frac{|A+D_1|}{|D_1|}+\beta\log\frac{|A+D_2|}{|D_2|}.\end{aligned}$$

これで証明を完了する. □

Theorem 3 Z_1, Z_2 と $\alpha, \beta \geq 0(\alpha+\beta=1)$ を固定する.

$$R_Z^{(n)} = \alpha R_{Z_1}^{(n)} + \beta R_{Z_2}^{(n)}$$

となるように Z をとると、次が成り立つ.

$$C_{n,FB,Z}(P) \leq \alpha C_{n,FB,Z_1}(P_1) + \beta C_{n,FB,Z_2}(P_2)$$

を満たす $P_1, P_2 \geq 0(\alpha P_1 + \beta P_2 = P)$ が存在する.

Proof. Theorem 2 と同様な記号を用いる.

$$Tr[(I+B)A(I+B^t)+BDB^t] = nP$$

かつ

$$\frac{1}{2n}\log\frac{|A+D|}{|D|} = C_{n,FB,Z}(P)$$

を満たす $A>0$ と狭義下三角行列 B をとる. このとき

$$\begin{aligned}&Tr[(I+B)A(I+B^t)+BDB^t]\\ =\ &\alpha Tr[(I+B)A(I+B^t)+BD_1B^t]+\beta Tr[(I+B)A(I+B^t)+BD_2B^t]\end{aligned}$$

だから $\alpha P_1 + \beta P_2 = P$ を得る. ただし

$$P_i = \frac{1}{n}Tr[(I+B)A(I+B^t)+BD_iB^t] \ \ (i=1,2)$$

である. Theorem 2 の証明と同様にして

$$\log\frac{|A+D|}{|D|} \leq \alpha\log\frac{|A+D_1|}{|D_1|} + \beta\log\frac{|A+D_2|}{|D_2|}$$

だから

$$
\begin{aligned}
C_{n,FB,Z}(P) &\le \frac{\alpha}{2n}\log\frac{|A+D_1|}{|D_1|}+\frac{\beta}{2n}\log\frac{|A+D_2|}{|D_2|} \\
&\le \alpha C_{n,FB,Z_1}(P_1)+\beta C_{n,FB,Z_2}(P_2).
\end{aligned}
$$

これで証明を完了する. □

ここで次のような open problem を提起することができる.

Open Problem. 任意の Z_1, Z_2 と任意の $P \ge 0$ と任意の $\alpha, \beta \ge 0 (\alpha+\beta=1)$ に対して

$$
C_{n,FB,Z}(P) \le \alpha C_{n,FB,Z_1}(P)+\beta C_{n,FB,Z_2}(P)
$$

が成り立つか.

4 $C_{n,FB,Z}(P)$ と $C_{n,FB,\alpha Z_1+\beta Z_2}(P)$ の違い

Z_1, Z_2 $(Z_1 \ne Z_2)$, $P>0$, $\alpha, \beta > 0$ $(\alpha+\beta=1)$ に対して次が成り立つ.

Theorem 4 任意の $\mu, \nu \ge 0$ $(\mu+\nu=1)$ に対して $P=\mu P_1+\nu P_2$ となる $P_1, P_2 \ge 0$ が存在して

$$
\begin{aligned}
& C_{n,FB,Z}(P) \\
\le\ & \mu C_{n,FB,\alpha Z_1+\beta Z_2}(\mu P_1)+\nu C_{n,FB,\sqrt{\alpha\beta}(Z_1-Z_2)}(\nu P_2) \\
\le\ & C_{n,FB,Z}(\mu^2 P_1+\nu^2 P_2)+\frac{1}{2n}\log\frac{|R_Z|}{|R_{\alpha Z_1+\beta Z_2}|^{\mu}|R_{\sqrt{\alpha\beta}(Z_1-Z_2)}|^{\nu}}.
\end{aligned}
$$

証明は他の機会に譲る.

Corollary 1 次の (1), (2), (3) が成り立つ.

(1) $C_{n,FB,Z}(P) \le C_{n,FB,\sqrt{\alpha\beta}(Z_1-Z_2)}(P) \le C_{n,FB,Z}(P)+\dfrac{1}{2n}\log\dfrac{|R_Z|}{|R_{\sqrt{\alpha\beta}(Z_1-Z_2)}|}.$

(2) $C_{n,FB,Z}(P) \le C_{n,FB,\alpha Z_1+\beta Z_2}(P) \le C_{n,FB,Z}(P)+\dfrac{1}{2n}\log\dfrac{|R_Z|}{|R_{\alpha Z_1+\beta Z_2}|}.$

(3) $C_{n,FB,Z}(P) \leq \frac{1}{2}C_{n,FB,\alpha Z_1+\beta Z_2}(\frac{P_1}{2}) + \frac{1}{2}C_{n,FB,\sqrt{\alpha\beta}(Z_1-Z_2)}(\frac{P_2}{2})$

$$\leq C_{n,FB,Z}(\frac{P}{2}) + \frac{1}{2n}\log\frac{|R_Z|}{|R_{\alpha Z_1+\beta Z_2}|^{1/2}|R_{\sqrt{\alpha\beta}(Z_1-Z_2)}|^{1/2}}.$$

Proof. (1) は Theorem 4 において $\mu = 0, \nu = 1$, (2) は $\mu = 1, \nu = 0$, (3) は $\mu = \nu = \frac{1}{2}$ とそれぞれおけば得られる. □

5 $C_{n,FB,Z}(P)$ と $C_{n+1,FB,Z}(P)$ の違い

$C_{n,FB,Z}(P)$ と $C_{n+1,FB,Z}(P)$ の関係についても考える.
ただし $z_{n+1,n+1} = E[Z_{n+1}^2]$ とする.

Theorem 5 次の (1), (2), (3) が成り立つ.

(1) $\frac{n}{n+1}C_{n,FB,Z}(\frac{n+1}{n}P) \leq C_{n+1,FB,Z}(P)$.

(2) $\frac{n}{n+1}C_{n,FB,Z}(P) + \frac{1}{2(n+1)}\log(1+\frac{P}{z_{n+1,n+1}}) \leq C_{n+1,FB,Z}(P)$.

(3) $\frac{1}{2(n+1)}\log(1+\frac{(n+1)P}{z_{n+1,n+1}}) \leq C_{n+1,FB,Z}(P)$.

この証明も他の機会に譲る.

参考文献

[1] H.W.Chen and K.Yanagi, On the Cover's conjecture on capacity of Gaussian channel with feedback, IEICE Trans. Fundamentals, vol E80-A, no 11, pp 2272-2275, November 1997.

[2] H.W.Chen and K.Yanagi, Refinements of the half-bit and factor-of-two bounds for capacity in Gaussian channels with feedback, IEEE Trans. Information Theory, vol IT-45, no 1, pp 319-325, January 1999.

[3] H.W.Chen and K.Yanagi, Upper bounds on the capacity of discrete time blockwise white Gaussian channels with feedback, IEEE Trans. Information Theory, vol IT-46, no 3, pp 1125-1131, May 2000.

[4] T.M.Cover, Conjecture: Feedback does not help much, in Open problems in communication and computation, T.Cover and B.Gopinath (Ed.), pp 70-71, Springer-Verlag, New York, 1987.

[5] T.M.Cover and S.Pombra, Gaussian feedback capacity, IEEE Trans. Information Theory, vol IT-35, no 1, pp 37-43, January 1989.

[6] T.M.Cover and J.A.Thomas, Elements of Information Theory, New York, Wiley, 1991.

[7] A.Dembo, On Gaussian feedback capacity, IEEE Trans. Information Theory, vol IT-35, no 5, pp 1072-1089, September 1989.

[8] P.Ebert, The capacity of the Gaussian channel with feedback, Bell. Syst. Tech. J., vol 49, pp 1705-1712, 1970.

[9] R.G.Gallager, Information Theory and Reliable Communication, John Wiley and Sons, New York, 1968.

[10] S.Ihara and K.Yanagi, Capacity of discrete time Gaussian channel with and without feedback, II, Japan J. Appl. Math., vol 6, pp 245-258, 1989.

[11] M.Pinsker, talk delivered at the Soviet Information Theory Meeting, (no abstract published), 1969.

[12] K.Yanagi, An upper bound to the capacity of discrete time Gaussian channel with feedback, Lecture Notes in Math., vol 1299, pp 565-570, 1988.

[13] K.Yanagi, Necessary and sufficient condition for capacity of the discrete time Gaussian channel to be increased by feedback, IEEE Trans. Information Theory, vol IT-38, no 6, pp 1788-1791, November 1992.

[14] K.Yanagi, An upper bound to the capacity of discrete time Gaussian channel with feedback, II, IEEE Trans. Information Theory, vol IT-40, no 2, pp 588-593, March 1994.

[15] K.Yanagi, An upper bound to the capacity of discrete time Gaussian channel with feedback, III, Bull. Kyushu Inst. Tech., Pure and Applied Mathematics, vol 45, pp 1-8, 1998.

[16] K.Yanagi, H.W.Chen and J.W.Yu, Operator inequality and its application to capacity of Gaussian channel, Taiwanese J. Math., vol 4, no 3, pp 407-416, 2000.