数理解析研究所講究録
第1186巻 2001年 151-163

比例的遅れを持つ微分方程式に対する選点法

東邦大学理学部　石渡 恵美子 (Emiko Ishiwata)

1 はじめに

ここではパンタグラフ方程式と呼ばれる比例的遅れを持つ微分方程式に対し、選点法を用いた際の第1区間での誤差の達成精度について言及する。

遅れのある関数微分方程式に対する漸近安定性を Fox 他 [9], Kato&McLeod[17] 等が調べ始め、Iserles[10], Iserles&Terjéki[15] 等がパンタグラフ方程式 (由来は [9,10] 参照) と名付けられた $y'(t) = ay(t) + by(qt) + cy'(pt)$ という比例的遅れのある中立型関数微分方程式に対して研究している。遅れが無限加算個の場合、つまり (5.1)、(5.2) の場合は Iserles&Liu[11,12,13] 等の結果がある (関連するものとして [6,7,8,20] 等も参照)。

これに対して有界な変数遅れを持つ非線形微分方程式について、Bellen[2] は Gauss-Legendre 点を選点にとって陰的 m-段階 Runge-Kutta 法を用いたときの刻み幅 h に対する誤差は $O(h^{2m})$ となることを示し、定数遅れのある Volterra 積分方程式に対しては、Baddour&Brunner[1] 及び Brunner[4] が選点解 u の誤差は選点によらず $O(h^m)$ であることを示した。しかしながら、選点を Gauss-Legendre 点にとれば、反復選点解 u_{it} の誤差が再び $O(h^{2m})$ となることがわかっている (Blom&Brunner[3] も参照)。

近年、Brunner[5] は任意の複素数 a, b に対する比例的遅れのある微分方程式 (delay differential equation; DDE)

$$y'(t) = ay(t) + by(qt), \quad y(0) = y_0, \qquad 0 < q < 1 \tag{1.1}$$

及び遅れのある Volterra 積分方程式 (delay Volterra integral equation; DVIE)

$$y(t) = y_0 + a\int_0^t y(s)ds + \frac{b}{q}\int_0^{qt} y(s)ds, \quad y(0) = y_0, \qquad 0 < q < 1 \tag{1.2}$$

について、特に $a = 0$ とおいた (4.1) 及び (4.2) 式に対して選点法を用いた際の、第1区間での分点 $t = h$ の誤差の達成精度に関して次の結果を得ている。$\bar{c}_1, \bar{c}_2, \cdots, \bar{c}_m$ を DDE に対する選点、$\hat{c}_1, \hat{c}_2, \cdots, \hat{c}_m$ を DVIE に対する反復選点解とするとき、$v(t) = u_{it}(t)$ となる必要十分条件は $q\bar{c}_j = \hat{c}_j,\ j = 1, 2, \cdots, m$ であるが、$\{\bar{c}_j\}$ が Gauss-Legendre 点で与えられ、$q \in (0, 1]$ に対し $\{\hat{c}_j\} = \{q\bar{c}_j\}$ となるときは、$|v(h) - y(h)| = |u_{it}(h) - y(h)|$ は高々 $O(h^{m+2})$ にしかならない。ただし、$m = 2$ での選点解 $v(t)$ が $v(h) = R_{2,2}(h)$ ($R_{2,2}(t)$ は $y(t)$ に対する (2,2)-Padé 近似) を満たすとき、この場合、$|v(h) - y(h)| = O(h^5) = O(h^{2m+1})$ となるが、必要十分条件は $\bar{c}_j(q),\ j = 1, 2$ が $M_2(t; q) = P_2(2s-1) + r_1(q)P_1(2s-1),\ r_1(q) = \frac{3(1-q)^2}{3-2q}$ の零点になることを見つけた。ここで $P_n(t)$ は n 次の Legendre 多項式である。

そこで彼は次の問題を提起した。それは「$m \geq 3$ のときに [0,1] 区間で、選点解の点 h における値 $v(h)$ が $y(h)$ の (m, m)-Padé 近似となる選点 $c_i = c_i(q),\ i = 1, 2, \cdots, m$ は存在するのか? 存在するとき $|v(h) - y(h)| = O(h^{2m+1})$ となるが、$v(th),\ t \in [0, 1]$ の選点多項式 $M_m(t; q) = K\Pi_{i=1}^m (t - c_i)$ はどういうものか？」ということである。

この [5] で H.Brunner が提起した問題に対して、本稿では2節で Pade 近似と等しくなる選点解と反復選点解の存在性を調べ、3 節では選点解 $v(t)$ の選点多項式 $M_m(t)$ と反復

選点解 $u_{it}(h)$ の選点多項式 $\hat{M}_m(t)$ に対し、$v(t) = u_{it}(t)$ となる必要十分条件を具体的に提示し、4 節で具体的に H.Brunner の問題への解答を示した。さらに 5 節では、無限加算個の遅れのある中立型関数微分方程式 (5.1) と Volterra 積分微分方程式 (5.2) に対して、3 節までの結果を拡張している (本稿の詳細は Takama 他 [20] 及び Ishiwata[16] を参照)。

2 選点解と Pade 近似

2.1 選点解

DDE(1.1) 及び DVIE(1.2) の解析解は $y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n t^n$ で表される。ただし $\psi_0 = 1$, $\psi_n = \frac{\prod_{j=1}^{n}(a+bq^{j-1})}{n!}$, $n = 1, 2, \cdots$ である。

ここで第 1 区間での近似誤差の達成精度に着目する。区間 $[0,1]$ 内で選点解 $v(t)$ は、$t = hc_1, hc_2, \cdots, hc_m$ 上で (1.1) を満たすとする。選点 $c_1, c_2, \cdots, c_m$ は $[0,1]$ 内にあるとし、$\tilde{v}(t) = v(ht)$, $t \in [0,1]$ とおいて、$\tilde{v}(0) = 1$ とすると

$$\tilde{v}'(t) = hv'(ht) = h(av(ht) + bv(qht)) + KM_m(t) = h(a\tilde{v}(t) + b\tilde{v}(qt)) + KM_m(t)$$

となる。ただし、$K \neq 0$ は定数で、選点多項式は次のようになる。

$$M_m(t) = \sum_{i=0}^{m} \frac{M_m^{(i)}(0)}{i!} t^i = \frac{M_m^{(m)}(0)}{m!} \prod_{j=1}^{m} (t - c_j), \qquad M_m^{(m)}(0) \neq 0$$

補題 2.1 十分小さい $h > 0$ に対し、選点解 $v(t)$ が存在する。ただし $v(ht) = \tilde{v}(t) = \sum_{n=0}^{m} \frac{\tilde{v}^{(n)}(0)}{n!} t^n$, $\tilde{v}(0) = 1$ かつ

$$\begin{aligned} K &= -\frac{(a+b)(a+bq)\cdots(a+bq^m)h^{m+1}}{M_m^{(m)}(0) + (a+bq^m)M_m^{(m-1)}(0)h + \cdots + (a+bq^m)\cdots(a+bq)M_m(0)h^m} \\ \tilde{v}^{(n)}(0) &= K\left\{M_m^{(n-1)}(0) + h(a+bq^{n-1})M_m^{(n-2)}(0) + \cdots + h^{n-1}(a+bq^{n-1})\cdots(a+bq)M_m(0)\right\} \\ &\quad + h^n(a+bq^{n-1})(a+bq^{n-2})\cdots(a+bq)(a+b), \qquad n = 1, 2, \cdots, m. \end{aligned}$$

定理 2.1 (1.1) の選点解 $v(t)$ に対して、$v(h) = \dfrac{\Gamma_0 + \Gamma_1 h + \Gamma_2 h^2 + \cdots + \Gamma_m h^m}{\Lambda_0 + \Lambda_1 h + \Lambda_2 h^2 + \cdots + \Lambda_m h^m}$ となり、

$$\begin{cases} \Lambda_0 = M_m^{(m)}(0), \\ \Lambda_n = \left\{\displaystyle\prod_{l=m-n+2}^{m+1} (a+bq^{l-1})\right\} M_m^{(m-n)}(0), & n = 1, 2, \cdots, m, \\ \Gamma_n = \displaystyle\sum_{j=0}^{n} \frac{\prod_{k=1}^{n-j}(a+bq^{k-1})}{(n-j)!} \left\{\prod_{l=m-j+2}^{m+1} (a+bq^{l-1})\right\} M_m^{(m-j)}(0), & n = 0, 1, 2, \cdots, m \end{cases}$$

である。特に $a = 0$ かつ $b \neq 0$ であれば、係数は次のようになる。

$$\begin{cases} \Lambda_n = b^n q^{\frac{1}{2}n(2m-n+1)} M_m^{(m-n)}(0), \\ \Gamma_n = b^n \displaystyle\sum_{j=0}^{n} \frac{q^{mj + \frac{(n-1)(n-2j)}{2}}}{(n-j)!} M_m^{(m-j)}(0), & n = 0, 1, 2, \cdots, m, \\ \Gamma_m = b^m q^{\frac{m(m+1)}{2}} M_m(\frac{1}{q}). \end{cases}$$

補題2.1 及び定理2.1 の証明は[20] を参照のこと。

$\Lambda_0, \Lambda_1, \cdots, \Lambda_m$ が見つかれば、$\Gamma_0, \Gamma_1, \cdots, \Gamma_m$ は次のように決定できる。

$$\begin{pmatrix} \psi_0 & & & & \\ \psi_1 & \psi_0 & & & \\ \psi_2 & \psi_1 & \psi_0 & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ \psi_m & \psi_{m-1} & \psi_{m-2} & \cdots & \psi_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Lambda_0 \\ \Lambda_1 \\ \Lambda_2 \\ \vdots \\ \Lambda_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Gamma_0 \\ \Gamma_1 \\ \Gamma_2 \\ \vdots \\ \Gamma_m \end{pmatrix} \tag{2.1}$$

注意 2.1 定理2.1 は選点多項式 $M_m(t)$ が一度見つかれば、(1.1) の選点解 $v(t)$ が簡単に定まることを意味している。選点 $\{c_i\}_{i=1}^m$ が実数で $0 \le c_1 < c_2 < \cdots < c_m \le 1$ という条件は $M_m(t)$ に対して必ずしも成り立たない。しかしながら、$a = 0$ かつ $b \neq 0$ のときは必ず成り立つ(定理2.4 参照)。

例 2.1 ($a = 0$ のときは[5] 参照) $m = 1$ のとき $v(h) = \frac{M_1'(0)+\{(a+b)M_1'(0)+(a+bq)M_1(0)\}h}{M_1'(0)+(a+bq)M_1(0)h}$ であり、$m = 2$ のときは次のようになる。

$$\begin{aligned} v(h) \;=\; & \Big[M_2''(0) + \{(a+b)M_2''(0) + (a+bq^2)M_2'(0)\}h + \Big\{\frac{(a+b)(a+bq)}{2}M_2''(0) \\ & +(a+b)(a+bq^2)M_2'(0) + (a+bq)(a+bq^2)M_2(0)\Big\}h^2\Big] \\ & /\{M_2''(0) + (a+bq^2)M_2'(0)h + (a+bq)(a+bq^2)M_2(0)h^2\}. \end{aligned}$$

2.2 Padé 近似と解の存在性

$y(t) = \psi_0 + \psi_1 t + \psi_2 t^2 + \cdots$ の冪級数に対し、有理関数

$$\frac{\gamma_0 + \gamma_1 t + \gamma_2 t^2 + \cdots + \gamma_m t^m}{\lambda_0 + \lambda_1 t + \lambda_2 t^2 + \cdots + \lambda_n t^n} \tag{2.2}$$

が次式を満たすならば、

$$\begin{aligned} &(\lambda_0 + \lambda_1 t + \lambda_2 t^2 + \cdots + \lambda_n t^n)(\psi_0 + \psi_1 t + \psi_2 t^2 + \cdots) - (\gamma_0 + \gamma_1 t + \gamma_2 t^2 + \cdots + \gamma_m t^m) \\ &\quad = \xi_{m+n+1} t^{m+n+1} + \xi_{m+n+2} t^{m+n+2} + \cdots \end{aligned}$$

有理関数(2.2) を $y(t)$ に対する (m,n)-Padé 近似と呼び、$R_{m,n}(t)$ と表す。

補題 2.2 上記の $y(t)$ に対する (m,m)-*Padé* 近似

$$R_{m,m}(t) = \frac{\gamma_0 + \gamma_1 t + \gamma_2 t^2 + \cdots + \gamma_m t^m}{\lambda_0 + \lambda_1 t + \lambda_2 t^2 + \cdots + \lambda_m t^m}$$

が存在する必要十分条件は、$\lambda_0 \neq 0$ とするとき、係数 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$ が次の連立方程式

$$\begin{pmatrix} \psi_1 & \psi_2 & \psi_3 & \cdots & \psi_m \\ \psi_2 & \psi_3 & \psi_4 & \cdots & \psi_{m+1} \\ \psi_3 & \psi_4 & \psi_5 & \cdots & \psi_{m+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \psi_m & \psi_{m+1} & \psi_{m+2} & \cdots & \psi_{2m-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_m \\ \lambda_{m-1} \\ \lambda_{m-2} \\ \vdots \\ \lambda_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\psi_{m+1} \\ -\psi_{m+2} \\ -\psi_{m+3} \\ \vdots \\ -\psi_{2m} \end{pmatrix} \lambda_0 \tag{2.3}$$

を満たすことであり、$\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_m$ は次式より求まる。

$$\begin{pmatrix} \psi_0 & & & & \\ \psi_1 & \psi_0 & & & \\ \psi_2 & \psi_1 & \psi_0 & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ \psi_m & \psi_{m-1} & \psi_{m-2} & \cdots & \psi_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_0 \\ \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_m \end{pmatrix} \tag{2.4}$$

このとき、$|R_{m,m}(t) - y(t)| = O(t^{2m+1})$ を得る。

$a = 0$ かつ $b \neq 0$ ならば任意の $0 < q \leq 1$ に対し、(2.3) の係数行列の行列式の値は 0 ではない。一方で $a \neq 0$ ならば、(2.3) の解 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$ は存在するが、(2.3) の係数行列の行列式の値が 0 となる場合がある。ここで $y(t)$ は多項式で $R_{m,m}(t) = y(t)$ である。

定理 2.2

$$\lambda_0 = M_m^{(m)}(0) \neq 0, \quad \lambda_n = \left\{ \prod_{i=m-n+2}^{m+1} (a + bq^{i-1}) \right\} M_m^{(m-n)}(0), \qquad n = 1, 2, \cdots, m$$

が (2.3) を満たすならば、$v(h) = R_{m,m}(h)$ かつ $|v(h) - y(h)| = O(h^{2m+1})$ となる。ここで $v(h)$ は 定理 2.1 により、次の選点多項式に対して定まる。

$$M_m(t) \equiv \frac{M_m^{(m)}(0)}{m!} t^m + \frac{M_m^{(m-1)}(0)}{(m-1)!} t^{m-1} + \cdots + \frac{M_m^{(1)}(0)}{1!} t + M_m(0)$$

注意 2.2 任意の複素数 a, b と $0 < q \leq 1$ に対し、$v(h) = R_{m,m}(h)$ は、(2.3) の解 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$ が見つかれば、定理 2.1 から簡単に求まる（例 2.3 参照）。

例 2.2 ($a = 0$ の場合は [5] 参照) $\lambda_0 = 1$ とする。このとき、$m = 1$ では $R_{1,1}(t) = \frac{1 + \{(a+b) - \frac{a+bq}{2}\} t}{1 - \frac{a+bq}{2} t}$ であり、特に $a + b = 0$ ならば $R_{1,1}(t) = y(t) \equiv 1$ となる。

$m = 2$ のとき $a \neq -(3 - 2q)qb$ ならば、$R_{2,2}(t) = \dfrac{1 + \gamma_1 t + \gamma_2 t^2}{1 + \lambda_1 t + \lambda_2 t^2}$ が存在し、

$$\begin{cases} \lambda_1 = -\frac{(a+bq^2)(a+2bq-bq^3)}{2(a+3bq-2bq^2)}, & \lambda_2 = \frac{(a+bq)(a+bq^2)(a-3bq^3+4bq^2)}{12(a+3bq-2bq^2)} \\ \gamma_1 = (a+b) + \lambda_1, & \gamma_2 = \frac{(a+b)(a+bq)}{2} + (a+b)\lambda_1 + \lambda_2 \end{cases}$$

である。特に $a + b = 0$ ならば $R_{2,2}(t) = y(t) \equiv 1$ であり、$a + bq = 0$ ならば $R_{2,2}(t) = y(t) = 1 + (a + b)t$ となる。

例 2.3 $a = -(3 - 2q)qb$ で $q \neq 1$ ならば、Padé 近似は $m = 2$ のとき存在しない。

定理 2.3 $M_{m,n}(t)$ が

$$\begin{cases} M_{m,1}(t) = \int_0^t M_m(x)dx \\ M_{m,n}(t) = a \int_0^t M_{m,n-1}(x)dx + \frac{b}{q} \int_0^{qt} M_{m,n-1}(x)dx, \qquad n = 2, 3, \cdots, m \end{cases}$$

と定義されるとき、

$$\left. \begin{array}{l} M_{m,n}(0) = 0, \quad n = 1, 2, \cdots, m, \\ M'_{m,1}(t) = M_m(t), \quad M'_{m,n}(t) = aM_{m,n-1}(t) + bM_{m,n-1}(qt), \quad n = 2, 3, \cdots, m \end{array} \right\} \tag{2.5}$$

である。さらに (2.3) 式は $M_{m,n}(1) = 0, \ \ n = 1, 2, \cdots, m$ と同等である。

系 2.1　定理2.3 で $a=0$ かつ $b\neq 0$ のとき、

$$M'_{m,1}(t)=M_m(t),\qquad M'_{m,n}(t)=bM_{m,n-1}(qt),\qquad n=2,3,\cdots,m \tag{2.6}$$

から、 $M_{m,n}(t)=\dfrac{b^{n-1}}{q^{\frac{(n-1)n}{2}}(n-1)!}\displaystyle\int_0^{q^{n-1}t}(q^{n-1}t-t_0)^{n-1}M_m(t_0)dt_0,\qquad n=1,2,\cdots,m$

を得る。また (2.3) は

$$\int_0^{q^{n-1}}(q^{n-1}-t_0)^{n-1}M_m(t_0)dt_0=0,\qquad n=1,2,\cdots,m$$

と同等である。

$y(t)$ に対する (m,m)-Padé 近似 $R_{m,m}(t)$ の存在性に関する次の定理を得る。

定理 2.4　$a=0$ かつ $b\neq 0$ を仮定する。このとき任意の $0<q\leq 1$ に対して、(2.3) の係数行列の行列式の値は 0 でない。よって (2.3) は唯一解を持ち、$y(t)$ に対する (m,m)-*Padé* 近似 $R_{m,m}(t)$ が存在する。

さらに $(0,1)$ 区間で $0<c_1<c_2<\cdots<c_m<1$ となる $M_m(t)$ の解 $c_1,c_2,\cdots,c_m$ は m 個の単根として存在し、$M_{m,n}(t)$, $n=1,2,\cdots,m$ については $m-n$ 個の単根が存在する。ここで、$M_m(t)$ と $M_{m,n}(t)$ は定理2.2 と定理2.3 で定義されたものである。

注意2.3　定理2.4 の証明より、$t=0$ は $M_{m,n}(t)=0$ の n 重根 $(n=1,2,\cdots,m)$ となり、$0<q<1$ に対し、1つの単根 $t=1$ と $(\frac{1}{q},+\infty)$ において $n-1$ 個の単根を持つことがわかる。さらに、$0<c_1<q^{m-1}\xi_1^m$, $c_2<q^{m-2}\xi_2^{m-1},\cdots,c_{m-1}<q\xi_{m-1}^2$ となる。

定理2.4 は $a=0$ かつ $b\neq 0$ の場合に任意の $0<q\leq 1$ に対し、定理2.2 の選点解 $v(t)$ に対する選点 $\{c_i\}_{i=1}^m$ は唯一つ決まり、かつ $0<c_1<c_2<\cdots<c_m<1$ を満たしていることを示すものである。

これらの選点 $\{c_i\}_{i=1}^m$ と選点多項式 $M_m(t)=\frac{M_m^{(0)}(0)}{m!}\prod_{j=1}^m(t-c_j)$ に対し、提起された問題を完全に解くための残る課題は (4.3) の $r_k(q)$, $k=0,1,\cdots,m-1$ の決め方である。

3　$v(t)$ と $u_{it}(t)$ の関係

定理 3.1　(1.1) の選点解 $v(t)$ に対して、選点多項式を

$$M_m(t)\equiv\sum_{k=0}^m\frac{M_m^{(k)}(0)}{k!}t^k=\frac{M_m^{(m)}(0)}{m!}(t-c_1)(t-c_2)\cdots(t-c_m)=0,\qquad M_m^{(m)}(0)\neq 0,$$

(1.2) の反復選点解 $u_{it}(t)$ に対して、選点多項式を

$$\hat{M}_m(t)\equiv\sum_{k=0}^m\frac{\hat{M}_m^{(k)}(0)}{k!}t^k=\frac{\hat{M}_m^{(m)}(0)}{m!}(t-\hat{c}_1)(t-\hat{c}_2)\cdots(t-\hat{c}_m)=0,\qquad \hat{M}_m^{(m)}(0)\neq 0$$

とする。このとき $v(t)=u_{it}(t)$ となるための必要十分条件は

$$\kappa M_m(t)=a\hat{M}_m(t)+b\hat{M}_m(qt),\qquad \text{ただし } \kappa \text{ は定数} \tag{3.1}$$

である。$a=0$ かつ $b\neq 0$ の場合、$u_{it}(t)=v(t)$ となる必要十分条件は $\hat{c}_i=qc_i$, $i=1,2,\cdots,m$ となることである (cf.[5])。

例 3.1 $a+b\neq 0$ と $a+bq\neq 0$ を仮定する。
i) $m=1$ ならば、$\kappa M_1(t)=a\hat{M}_1(t)+b\hat{M}_1(qt)$ より、
$\kappa \hat{M}_1^{(1)}(0)(t-c_1)=a\hat{M}_1^{(1)}(0)(t-\hat{c}_1)+b\hat{M}_1^{(1)}(0)(qt-\hat{c}_1)=(a+bq)\hat{M}_1^{(1)}(0)(t-\frac{a+b}{a+bq}\hat{c}_1)$
を得る。よって $\hat{c}_1=\frac{a+bq}{a+b}c_1$ となる。
ii) $q=1$ ならば $\kappa M_m(t)=(a+b)\hat{M}_m(t)$ であり、$\hat{c}_i=c_i,\ i=1,2,\cdots,m$ となる。
iii) $a=0$ かつ $b\neq 0$ ならば $\kappa M_m(t)=b\hat{M}_m(qt)$ より、$\hat{c}_i=qc_i,\ i=1,2,\cdots,m$ である。

4 H. Brunner の提起した問題への解答

(1.1) と (1.2) 式で $a=0$ かつ $b\neq 0$ の場合、

$$y'(t) = by(qt), \qquad y(0)=1, \qquad 0<q\leq 1 \tag{4.1}$$

$$y(t) = 1+\int_0^{qt}\frac{b}{q}y(s)ds, \qquad y(0)=1, \qquad 0<q\leq 1 \tag{4.2}$$

における Brunner の提起した問題への解答をここで与えよう。

$m\geq 1$ で $0<q\leq 1$ と仮定する。選点 $c_1,c_2,\cdots,c_m$ が定理2.4 の m 次多項式 $M_m(t)\equiv K_2M_m(t;q)$ の解として与えられるとき、$K_2\neq 0$ は定数であり、

$$M_m(t;q)=\sum_{k=0}^{m}r_k(q)P_k(2t-1), \quad r_m(q)=1 \tag{4.3}$$

となる。この $r_k(q)$ が決定できれば、解答が与えられたことになる。

補題 4.1 $r_0(q)=0$ である。

定理 4.1 $t=h$ で $y(t)$ に対する (m,m)-*Padé* 近似 $R_{m,m}(t)$ と一致する選点解 $v(t)$ が存在する. このとき、$|v(h)-y(h)|=O(h^{2m+1})$ である。$r_1(q),r_2(q),\cdots,r_{m-1}(q)$ は

$$\begin{pmatrix} \tilde{P}_{1,1} & \tilde{P}_{1,2} & \cdots & \tilde{P}_{1,m-1} \\ \tilde{P}_{2,1} & \tilde{P}_{2,2} & \cdots & \tilde{P}_{2,m-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{P}_{m-1,1} & \tilde{P}_{m-1,2} & \cdots & \tilde{P}_{m-1,m-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_1(q) \\ r_2(q) \\ \vdots \\ r_{m-1}(q) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\tilde{P}_{1,m} \\ -\tilde{P}_{2,m} \\ \vdots \\ -\tilde{P}_{m-1,m} \end{pmatrix} \tag{4.4}$$

より定まる。ただし $\tilde{P}_{i,j}=\int_0^{q^i}(q^i-t)^iP_j(2t-1)dt$ であり、(4.3) で $r_0(q)=0$ である。

(4.4) は唯一解を持ち、$v(t)$ は $M_m(t)\equiv K_2M_m(t;q)=\sum_{i=0}^{m}\frac{M_m^{(i)}(0)}{i!}t^i$ に対して決定される。ここで、選点 $c_1,c_2,\cdots,c_m$ は $0<c_1<\cdots<c_m<1$ となる。

$q\to +0$ ならば、$c_1,c_2,\cdots,c_{m-1}\to 0$ かつ $c_m\to\frac{m}{m+1}$ となる。

$t=h$ において、さらに (4.2) の $y(t)$ に対する (m,m)-*Padé* 近似 $R_{m,m}(t)$ と一致する反復選点解 $u_{it}(t)$ が存在し、このとき $|u_{it}(h)-y(h)|=O(^{2m+1})$ となる。$u_{it}(t)$ は定理 3.1 の $\hat{M}_m(t)$ により決められ、その選点 $\hat{c}_1,\hat{c}_2,\cdots,\hat{c}_m$ は $\hat{c}_i=qc_i,\ i=1,2,\cdots,m$ かつ $0<\hat{c}_1<\hat{c}_2<\cdots<\hat{c}_m<1$ である。もし、$q\to +0$ ならば $\hat{c}_1,\hat{c}_2,\cdots,\hat{c}_m\to 0$ となる。

例 4.1 $m=2$ に対して $r_1(q)=\frac{3(1-q)^2}{3-2q}$ であり、$m=3$ に対しては

$$M_3(t;q)=P_3(2t-1)+r_2(q)P_2(2t-1)+r_1(q)P_1(2t-1)=0, \quad 0<q\leq 1$$

ただし、

$r_1(q)=\frac{3(1-q)^2(20-15q-30q^2+24q^3+12q^4-10q^5)}{40-60q+33q^3-12q^4}$,

$r_2(q)=\frac{5(1-q)^2(20-5q-18q^2+2q^3+4q^4)}{40-60q+33q^3-12q^4}$

である。

選点解 c_1, c_2, c_3 は右のグラフの通り。

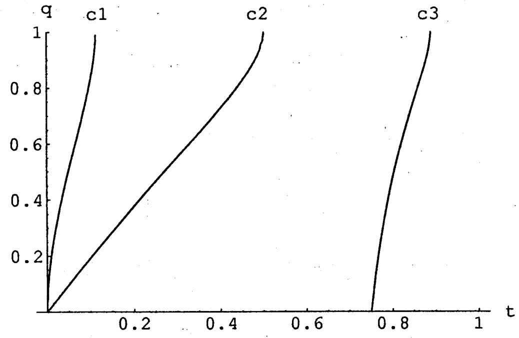

図 4.1 c_1, c_2, c_3 **の解のグラフ**

例 4.2 $q=1$ で $b=1$ もしくは $b=-1$ の場合の $h=2^{-n}$ に対する誤差 $e(h)=v(h)-y(h)$ を表 4.1 に、

また $m=2,3$ のとき、$q=0.75, 0.5, 0.25$ で $b=1$ の場合を表 4.2 に、$b=-1$ の場合を表 4.3 に示す。尚、各表中の数値についた $*$ 印は丸め等計算上の誤差を含んでいることを表す。参考のため、$\frac{1}{2^5}=0.03125$, $\frac{1}{2^7}=0.0078125$ である。

表 4.1 $q=1$ **かつ** $h=2^{-n}$ **の誤差** $e(h)$

		$b=1$		$b=-1$	
m	n	$e(h)$	$\frac{e(h)}{e(2h)}$	$e(h)$	$\frac{e(h)}{e(2h)}$
2	1	7.26220515E-05		2.67173365E-05	
	2	1.74804869E-06	0.0240..	1.06024657E-06	0.0396..
	3	4.8073761E-08	0.0275..	3.7439884E-08	0.0353..
	4	1.410301..E-09	0.0293..	1.244586..E-09	0.0332..
	5	4.2708..E-11	0.0302..	4.0121..E-11	0.0322..
	6	1.314..E-12	0.0307..	1.273..E-12	0.0317..
	7	4.0..E-14	0.0309..	4.0..E-14	0.0316..
3	1	1.29030693E-07		4.7467735..E-08	
	2	7.79378..E-10	0.00604..	4.72716..E-10	0.00995..
	3	5.363..E-12	0.00688..	4.176..E-12	0.00883..
	4	3.9..E-14	0.00732..	3.4..E-14	0.00831..

表 4.2 $b=1$ **かつ** $h=2^{-n}$ **のときの誤差** $e(h)$

		$q=0.75$		$q=0.5$		$q=0.25$	
m	n	$e(h)$	$\frac{e(h)}{e(2h)}$	$e(h)$	$\frac{e(h)}{e(2h)}$	$e(h)$ x	$\frac{e(h)}{e(2h)}$
2	1	2.49184698E-05		2.45103885E-06		2.7380625E-08	
	2	6.93968178E-07	0.0278..	7.3678776E-08	0.0300..	8.49489..E-10	0.0310..
	3	2.04739..E-08	0.0295..	2.258078..E-09	0.0306..	2.6450..E-11	0.0311..
	4	6.21685..E-10	0.0303..	6.9880..E-11	0.0309..	8.25..E-13	0.0311..
	5	1.9150..E-11	0.0308..	2.173..E-12	0.0310..	2.5..E-14	0.0314..
	6	5.93..E-13	0.0310..	6.7..E-14	0.0310..	0.0	*
3	1	1.22118184E-08		6.79862..E-11		3.3..E-15	
	2	8.80486..E-11	0.00721..	5.224..E-13	0.00768..	0.0	*
	3	6.610..E-13	0.00750..	3.9..E-15	0.00764..*	0.0	*

表4.3　$b=-1$ かつ $h=2^{-n}$ のときの誤差 $e(h)$

m	n	$q=0.75$ $e(h)$	$\frac{e(h)}{e(2h)}$	$q=0.5$ $e(h)$	$\frac{e(h)}{e(2h)}$	$q=0.25$ $e(h)$	$\frac{e(h)}{e(2h)}$
2	1	1.57487645E-05		2.09692114E-06		2.6598504E-08	
	2	5.51607836E-07	0.0350..	6.8147278E-08	0.0324..	8.37268..E-10	0.0314..
	3	1.8253196E-08	0.0330..	2.171654..E-09	0.0318..	2.6259..E-11	0.0313..
	4	5.86999..E-10	0.0321..	6.8530..E-11	0.0315..	8.22..E-13	0.0313..
	5	1.8608..E-11	0.0317..	2.152..E-12	0.0314..	2.5..E-14	0.0311..
	6	5.85..E-13	0.0314..	6.7..E-14	0.0313..	0.0	*
3	1	8.848373..E-09		6.3592..E-11		3.3..E-15	
	2	7.4947..E-11	0.00847..	5.05..E-13	0.00794..	0.0	*
	3	6.09..E-13	0.00813..	4.1..E-15	0.00813..*	0.0	*

5　中立型関数微分方程式への応用

無限加算個の遅れを持つ中立型関数微分方程式 (neutral functional-differential eq.; NFDE)

$$y'(t) = ay(t) + \sum_{i=1}^{\infty} b_i y(q_i t) + \sum_{i=1}^{\infty} c_i y'(p_i t), \quad y(0) = 1, \quad 0 < p_i, q_i < 1 \tag{5.1}$$

と Volterra 積分微分方程式 (delay Volterra integro-differential eq.; DVIDE)

$$y(t) = 1 + \int_0^t ay(s)ds + \sum_{i=1}^{\infty} \int_0^t b_i y(q_i s)ds + \sum_{i=1}^{\infty} \int_0^t c_i y'(p_i \tau)d\tau, \quad 0 < p_i, q_i \le 1 \tag{5.2}$$

に2節の結果を拡張する(詳細はFox 他[9], Kato&McLeod[17], Liu[19] とその文献を参照)。

級数 $\sum_{i=1}^{\infty} b_i q_i^{j-1}$ と $\sum_{i=1}^{\infty} c_i p_i^{j-1}$ が収束し、複素数 a, b_i, c_i に対して $\sum_{i=1}^{\infty} c_i p_i^{j-1} \neq 1,\ j = 1, 2, \cdots$ が成り立つと仮定すると、NFDE(5.1) と DVIDE(5.2) の解析解は $y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \psi_k t^k$ で与えられる。ここで $\psi_0 = 1,\ \ \psi_k = \left(\prod_{j=1}^{k} \frac{a + \sum_{i=1}^{\infty} b_i q_i^{j-1}}{1 - \sum_{i=1}^{\infty} c_i p_i^{j-1}}\right) \frac{1}{k!},\ \ k = 1, 2, \cdots$ である。

5.1　中立型関数微分方程式の選点解

DDE, DVIE の場合と同様、NFDE(5.1) の選点解 $v(t)$ と DVIDE(5.2) の反復選点解 $u_{it}(t)$ を定義する。用いる選点法は $\Pi_N = \{t_n = nh : n = 0, 1, \cdots, N\}$ 上で計算されるとし、$(Nm+1)$-次元空間 $S_m^{(0)}(\Pi_N)$ 上で $m \ge 1$ 次の連続区分的多項式の選点は

$$X_N = \{t_{n,j} = t_n + \bar{c}_j h : 0 \le \bar{c}_1 < \cdots < \bar{c}_m \le 1;\ \ n = 0, 1, \cdots, N-1\}$$

により与えられる。v を集合 X_N 上の (5.1) を満たす選点解とし、

$$q_{n,j} = [q(n + \bar{c}_j)] \in N_0, \qquad \gamma_{n,j} = q(n + \bar{c}_j) - q_{n,j} \in [0, 1), \quad j = 1, 2, \cdots, m$$

と定義する。ここで $[x]$ は $x \in R$ を超えない最大整数のこと。上記の定義より、$qt_{n,j} = h(q_{n,j} + \gamma_{n,j}) = t_{q_{n,j}} + \gamma_{n,j}h$ となり、区間 $[t_n, t_{n+1}]$ では、(5.1) に対する選点の方程式は

$$v'(t_{n,j}) = av(t_{n,j}) + \sum_{i=1}^{\infty} b_i v(q_i t_{n,j}) + \sum_{i=1}^{\infty} c_i v'(p_i t_{n,j}), \quad j = 1, 2, \cdots, m \tag{5.3}$$

と与えられ、同様にDVIDE (5.2) に対する反復選点解 $u_{it}(t)$ は (1.2) の選点解 $u \in S_{m-1}^{(-1)}(\Pi_N)$ に対し、次式で与えられる。

$$u_{it}(t) = 1 + \int_0^t au(s)ds + \sum_{i=1}^{\infty} \int_0^t b_i u(q_i s)ds + \sum_{i=1}^{\infty} \int_0^t c_i u'(p_i \tau)d\tau, \quad t \in [0, T] \tag{5.4}$$

5.2 選点解 $v(t)$

(5.1) と (5.2) に対して、2 節と同様に第 1 区間 $t=h$ に着目する。$0 \le t \le h$ 上での (5.1) の選点解 $v(t)$ に対して、$\tilde{v}(t)=v(ht),\ 0 \le t \le 1$ を考える。このとき $\tilde{v}(0)=1$ かつ

$$\tilde{v}'(t) = hv'(ht) = h\{av(ht) + \sum_{i=1}^{\infty} b_i v(q_i ht) + \sum_{i=1}^{\infty} c_i v'(p_i ht)\} + KM_m(t), \qquad 0 \le t \le 1$$

であり、

$$\tilde{v}'(t) - \sum_{i=1}^{\infty} c_i \tilde{v}'(p_i t) = h\{a\tilde{v}(t) + \sum_{i=1}^{\infty} b_i \tilde{v}(q_i t)\} + KM_m(t) \tag{5.5}$$

となる。ここで $K \ne 0$ は定数であり、選点多項式は次のようになる。

$$M_m(t) = \sum_{i=0}^{m} \frac{M_m^{(i)}(0)}{i!} t^i, \quad 0 \le t \le 1, \quad M_m^{(m)}(0) \ne 0.$$

補題 5.1　十分小さい $h>0$ に対し、選点解 $v(t),\ 0 \le t \le h$ が存在する。ここで

$$v(ht) = \tilde{v}(t) = \sum_{n=0}^{m} \frac{\tilde{v}^{(n)}(0)}{n!} t^n, \quad 0 \le t \le 1, \quad \tilde{v}(0)=1$$

$$K = -\frac{(1-\sum_{i=1}^{\infty} c_i p_i^m)\left(\prod_{j=0}^{m} \frac{a+\sum_{i=1}^{\infty} b_i q_i^j}{1-\sum_{i=1}^{\infty} c_i p_i^j}\right) h^{m+1}}{M_m^{(m)}(0) + \frac{a+\sum_{i=1}^{\infty} b_i q_i^m}{1-\sum_{i=1}^{\infty} c_i p_i^{m-1}} M_m^{(m-1)}(0) h + \cdots + \left(\prod_{j=1}^{m} \frac{a+\sum_{i=1}^{\infty} b_i q_i^j}{1-\sum_{i=1}^{\infty} c_i p_i^{j-1}}\right) M_m(0) h^m}$$

かつ、$l=1,2,\cdots,m$ に対して、次の関係が得られる。

$$\begin{aligned}\tilde{v}^{(l)}(0) &= K\Bigg\{\frac{1}{1-\sum_{i=1}^{\infty} c_i p_i^{l-1}} M_m^{(l-1)}(0) + h\frac{a+\sum_{i=1}^{\infty} b_i q_i^{l-1}}{(1-\sum_{i=1}^{\infty} c_i p_i^{l-1})(1-\sum_{i=1}^{\infty} c_i p_i^{l-2})} M_m^{(l-2)}(0) \\ &\quad + \cdots + h^{l-1}\frac{(a+\sum_{i=1}^{\infty} b_i q_i^{l-1})\cdots(a+\sum_{i=1}^{\infty} b_i q_i)}{(1-\sum_{i=1}^{\infty} c_i p_i^{l-1})\cdots(1-\sum_{i=1}^{\infty} c_i)} M_m(0)\Bigg\} + h^l \prod_{j=0}^{l-1} \frac{a+\sum_{i=1}^{\infty} b_i q_i^j}{1-\sum_{i=1}^{\infty} c_i p_i^j}.\end{aligned}$$

定理 5.1　$0 \le t \le h$ 上での (5.1) に対する選点解 $v(t)$ に対して、

$$v(h) = \frac{\Gamma_0 + \Gamma_1 h + \Gamma_2 h^2 + \cdots + \Gamma_m h^m}{\Lambda_0 + \Lambda_1 h + \Lambda_2 h^2 + \cdots + \Lambda_m h^m}$$

$$\begin{cases} \Lambda_0 = M_m^{(m)}(0), \\ \Lambda_l = \left(\displaystyle\prod_{j=m-l+1}^{m} \frac{a+\sum_{i=1}^{\infty} b_i q_i^j}{1-\sum_{i=1}^{\infty} c_i p_i^{j-1}}\right) M_m^{(m-l)}(0), \quad l=1,2,\cdots,m, \\ \Gamma_l = \displaystyle\sum_{k=0}^{l} \frac{1}{(l-k)!}\left(\prod_{j=1}^{l-k} \frac{a+\sum_{i=1}^{\infty} b_i q_i^{j-1}}{1-\sum_{i=1}^{\infty} c_i p_i^{j-1}}\right)\left(\prod_{j=m-k+1}^{m} \frac{a+\sum_{i=1}^{\infty} b_i q_i^j}{1-\sum_{i=1}^{\infty} c_i p_i^{j-1}}\right) M_m^{(m-k)}(0), \\ \qquad l=0,1,2,\cdots,m. \end{cases}$$

2 節と同様に $\Lambda_0, \Lambda_1, \cdots, \Lambda_m$ が見つかれば、$\Gamma_0, \Gamma_1, \cdots, \Gamma_m$ は (2.1) より求まる。

注意 5.1　定理 5.1 は (5.1) の選点解 $v(t)$ は選点多項式 $M_m(t)$ が求まれば、簡単に決まることを意味している。しかしながら、$M_m(t)$ の $\{\bar{c}_j\}_{j=1}^m$ は実で $0 \le \bar{c}_1 < \bar{c}_2 < \cdots < \bar{c}_m \le 1$ は必ずしも成り立つとは限らない。

5.3 Padé 近似

補題2.2 により (5.1) 及び (5.2) に対して 2 節と同様な次の結果を得る。

定理 5.2 次式が (2.3) を満たすとき $v(h)=R_{m,m}(h)$ で $|v(h)-y(h)|=O(h^{2m+1})$ となる。

$$\lambda_0=M_m^{(m)}(0)\neq 0,\quad \lambda_l=\Big(\prod_{j=m-l+1}^{m}\frac{a+\sum_{i=1}^{\infty}b_iq_i^j}{1-\sum_{i=1}^{\infty}c_ip_i^{j-1}}\Big)M_m^{(m-l)}(0),\qquad l=1,2,\cdots,m$$

ここで $v(h)$ は定理 5.1 より、次の選点多項式で決定される。

$$M_m(t)\equiv\frac{M_m^{(m)}(0)}{m!}t^m+\frac{M_m^{(m-1)}(0)}{(m-1)!}t^{m-1}+\cdots+\frac{M_m^{(1)}(0)}{1!}t+M_m(0).$$

注意 5.2 (2.3) の解 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$ が複素数 a,b_i,c_i と $0<p_i,q_i\le 1$ に対して求まるならば、$v(h)=R_{m,m}(h)$ は定理5.1 より簡単に決まる。

定理2.3 を拡張した結果を次に示す。

定理 5.3 (2.3) 式が $M_{m,n}(1)=0,\ n=1,2,\cdots,m$ となるとすると、$\{M_{m,n}(t)\}_{n=1}^m$ は

$$\begin{cases} M_{m,1}(t)-\sum_{i=1}^{\infty}\int_0^t c_iM'_{m,1}(p_i\tau)d\tau=\int_0^t M_m(x)dx\\ M_{m,n}(t)-\sum_{i=1}^{\infty}\int_0^t c_iM'_{m,n}(p_i\tau)d\tau=\int_0^t\{aM_{m,n-1}(x)+\sum_{i=1}^{\infty}b_iM_{m,n-1}(q_ix)\}dx,\\ \qquad\qquad n=2,3,\cdots,m.\end{cases}$$

より求められる。よって $k=0,1,2,\cdots,m,\ n=1,2,\cdots,m$ に対し、次を得る。

$$M_{m,n}(t)=\sum_{k=0}^{m}\gamma_{k,n}t^{k+n},\qquad \gamma_{k,n}=\frac{M_m^{(k)}(0)}{(k+n)!\{1-\sum_{i=1}^{\infty}c_ip_i^k\}}\Big(\prod_{j=1}^{n-1}\frac{a+\sum_{i=1}^{\infty}b_iq_i^{k+j}}{1-\sum_{i=1}^{\infty}c_ip_i^{k+j}}\Big).$$

(5.1) の有限個の多くの遅れを持つ特別な場合について、すなわち、$c_i=0,\ i\ge l+1$ の場合に対しては $\{M_{m,n}(t)\}_{n=1}^m$ は具体的に次のように表される。

$$\begin{cases} M_{m,1}(t)&=\int_0^t\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{r_1=0}^{k}\binom{k}{r_1}c_1^{k-r_1}\sum_{r_2=0}^{r_1}\binom{r_1}{r_2}c_2^{r_1-r_2}\cdots\times\sum_{r_{l-1}=0}^{r_{l-2}}\binom{r_{l-2}}{r_{l-1}}c_{l-1}^{r_{l-2}-r_{l-1}}c_l^{r_{l-1}}\\ &\quad\times M_m(p_1^{k-r_1}p_2^{r_1-r_2}\cdots p_{l-1}^{r_{l-2}-r_{l-1}}p_l^{r_{l-1}}x)dx\\ M_{m,n}(t)&=\int_0^t\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{r_1=0}^{k}\binom{k}{r_1}c_1^{k-r_1}\sum_{r_2=0}^{r_1}\binom{r_1}{r_2}c_2^{r_1-r_2}\cdots\times\sum_{r_{l-1}=0}^{r_{l-2}}\binom{r_{l-2}}{r_{l-1}}c_{l-1}^{r_{l-2}-r_{l-1}}c_l^{r_{l-1}}\\ &\quad\times\{aM_{m,n-1}(p_1^{k-r_1}p_2^{r_1-r_2}\cdots p_{l-1}^{r_{l-2}-r_{l-1}}p_l^{r_{l-1}}x)\\ &\quad+\sum_{i=1}^{\infty}b_iM_{m,n-1}(q_ip_1^{k-r_1}p_2^{r_1-r_2}\cdots p_{l-1}^{r_{l-2}-r_{l-1}}p_l^{r_{l-1}}x)\}dx,\quad n=2,3,\cdots,m.\end{cases}$$

特に、$l=1$ ならば

$$\begin{cases} M_{m,1}(t)=\int_0^t\sum_{k=0}^{\infty}c_1^kM_m(p_1^kx)dx\\ M_{m,n}(t)=\int_0^t\sum_{k=0}^{\infty}c_1^k\{aM_{m,n-1}(p_1^kx)+\sum_{i=1}^{\infty}b_iM_{m,n-1}(q_ip_1^kx)\}dx,\qquad n=2,3,\cdots,m\end{cases}$$

$$M_{m,n}(t)=\sum_{k=0}^{m}\frac{M_m^{(k)}(0)}{(k+n)!(1-c_1p_1^k)}\left(\prod_{j=1}^{n-1}\frac{a+\sum_{i=1}^{\infty}b_iq_i^{k+j}}{1-c_1p_1^{k+j}}\right)t^{k+n},\qquad n=1,2,\cdots,m$$

となる。また $l=2$ ならば、次の通りである。

$$\begin{cases} M_{m,1}(t)=\int_0^t\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{k}\binom{k}{r}c_1^{k-r}c_2^rM_m(p_1^{k-r}p_2^rx)dx \\ M_{m,n}(t)=\int_0^t\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{k}\binom{k}{r}c_1^{k-r}c_2^r\{aM_{m,n-1}(p_1^{k-r}p_2^rx)+\sum_{i=1}^{\infty}b_iM_{m,n-1}(q_ip_1^{k-r}p_2^rx)\}dx, \\ \qquad\qquad n=2,3,\cdots,m \end{cases}$$

$$M_{m,n}(t)=\sum_{k=0}^{m}\frac{M_m^{(k)}(0)}{(k+n)!(1-c_1p_1^k-c_2p_2^k)}\left(\prod_{j=1}^{n-1}\frac{a+\sum_{i=1}^{\infty}b_iq_i^{k+j}}{1-c_1p_1^{k+j}-c_2p_2^{k+j}}\right)t^{k+n},\quad n=1,2,\cdots,m.$$

例 5.1 $m=2$ について、$3(\frac{a+\sum_{i=1}^{\infty}b_iq_i}{1-\sum_{i=1}^{\infty}c_ip_i})\neq 2(\frac{a+\sum_{i=1}^{\infty}b_iq_i^2}{1-\sum_{i=1}^{\infty}c_ip_i})$ ならば、定理 2.3 より、$M_2(t)=\frac{M_2^{(2)}(0)}{2}t^2+M_2^{(1)}(0)t+M_2^{(0)}(0)$ を得る。ここで $M_2^{(2)}(0)\neq 0$ かつ

$$\begin{cases} \frac{M_2^{(0)}(0)}{M_2^{(2)}(0)}=\frac{1}{12}\left(\frac{1-\sum_{i=1}^{\infty}c_i}{1-\sum_{i=1}^{\infty}c_ip_i^2}\right)A_0, \qquad A_0=\dfrac{4(\frac{a+\sum_{i=1}^{\infty}b_iq_i^2}{1-\sum_{i=1}^{\infty}c_ip_i^2})-3(\frac{a+\sum_{i=1}^{\infty}b_iq_i^3}{1-\sum_{i=1}^{\infty}c_ip_i^3})}{3(\frac{a+\sum_{i=1}^{\infty}b_iq_i}{1-\sum_{i=1}^{\infty}c_ip_i})-2(\frac{a+\sum_{i=1}^{\infty}b_iq_i^2}{1-\sum_{i=1}^{\infty}c_ip_i^2})}, \\ \frac{M_2^{(1)}(0)}{M_2^{(2)}(0)}=-\frac{1}{2}\left(\frac{1-\sum_{i=1}^{\infty}c_ip_i}{1-\sum_{i=1}^{\infty}c_ip_i^2}\right)A_1, \qquad A_1=\dfrac{2(\frac{a+\sum_{i=1}^{\infty}b_iq_i}{1-\sum_{i=1}^{\infty}c_ip_i})-(\frac{a+\sum_{i=1}^{\infty}b_iq_i^3}{1-\sum_{i=1}^{\infty}c_ip_i^3})}{3(\frac{a+\sum_{i=1}^{\infty}b_iq_i}{1-\sum_{i=1}^{\infty}c_ip_i})-2(\frac{a+\sum_{i=1}^{\infty}b_iq_i^2}{1-\sum_{i=1}^{\infty}c_ip_i^2})} \end{cases}$$

である。よって定理 2.1 より $v(h)=R_{2,2}(h)=\dfrac{\Gamma_0+\Gamma_1h+\Gamma_2h^2}{\Lambda_0+\Lambda_1h+\Lambda_2h^2}$ となる。ただし $\Lambda_0=1$, $\Gamma_0=1$ かつ

$$\begin{cases} \Lambda_1=-\frac{1}{2}\left(\frac{a+\sum_{i=1}^{\infty}b_iq_i^2}{1-\sum_{i=1}^{\infty}c_ip_i^2}\right)A_1, \quad \Lambda_2=\frac{1}{12}\left(\frac{a+\sum_{i=1}^{\infty}b_iq_i}{1-\sum_{i=1}^{\infty}c_ip_i}\right)\left(\frac{a+\sum_{i=1}^{\infty}b_iq_i^2}{1-\sum_{i=1}^{\infty}c_ip_i^2}\right)A_0, \\ \Gamma_1=\left(\frac{a+\sum_{i=1}^{\infty}b_iq_i}{1-\sum_{i=1}^{\infty}c_i}\right)+\Lambda_1, \quad \Gamma_2=\frac{1}{2}\left(\frac{a+\sum_{i=1}^{\infty}b_iq_i}{1-\sum_{i=1}^{\infty}c_i}\right)\left(\frac{a+\sum_{i=1}^{\infty}b_iq_i}{1-\sum_{i=1}^{\infty}c_ip_i}\right)+\Lambda_2 \end{cases}$$

である。$\frac{12}{M_2^{(2)}(0)}M_2(t)=P_2(2t-1)+r_1P_1(2t-1)+r_0P_0(2t-1)$ が成り立つとき、

$$\begin{cases} r_0=2\{1+3\frac{M_2^{(1)}(0)}{M_2^{(2)}(0)}+6\frac{M_2^{(0)}(0)}{M_2^{(2)}(0)}\}=2\left\{1-\left(\frac{1-\sum_{i=1}^{\infty}c_i}{1-\sum_{i=1}^{\infty}c_ip_i^2}\right)\right\}-3\left(\frac{\sum_{i=1}^{\infty}c_i(1-p_i)}{1-\sum_{i=1}^{\infty}c_ip_i^2}\right)A_1 \\ r_1=3\{1+2\frac{M_2^{(1)}(0)}{M_2^{(2)}(0)}\}=3\{1-\left(\frac{1-\sum_{i=1}^{\infty}c_ip_i}{1-\sum_{i=1}^{\infty}c_ip_i^2}\right)A_1\} \end{cases}$$

が定まるが、$3(\frac{a+\sum_{i=1}^{\infty}b_iq_i}{1-\sum_{i=1}^{\infty}c_ip_i})=2(\frac{a+\sum_{i=1}^{\infty}b_iq_i^2}{1-\sum_{i=1}^{\infty}c_ip_i^2})$ ならば、$y(t)$ に対する $(2,2)$-Padé 近似は存在しない。これは [5] の定理と例 2.2 の拡張になっている。

5.4 $v(t)$ と $u_{it}(t)$ の関連性について

3 節と同様に (5.1) に対する $v(t)$ と (5.2) に対する $u_{it}(t)$ の関連をここで示す。

定理 5.4 (5.1) の選点解 $v(t)$ についての選点多項式を

$$M_m(t) \equiv \sum_{k=0}^{m} \frac{M_m^{(k)}(0)}{k!} t^k, \qquad 0 \le t \le 1, \qquad M_m^{(m)}(0) \ne 0$$

とし、また (5.2) の反復選点解 $u_{it}(t)$ についての選点多項式を

$$\hat{M}_m(t) \equiv \sum_{k=0}^{m} \frac{\hat{M}_m^{(k)}(0)}{k!} t^k, \quad 0 \le t \le 1, \quad \hat{M}_m^{(m)}(0) \ne 0$$

とする。$v(t) = u_{it}(t),\ 0 \le t \le h$ となる必要十分条件は

$$M_m(t) = K_1(a\hat{M}_m(t) + \sum_{i=1}^{\infty} b_i \hat{M}_m(q_i t) + \sum_{i=1}^{\infty} c_i \hat{M}'_m(p_i t)) \tag{5.6}$$

となること(ただし K_1 は定数)、すなわち、

$$M_m^{(k)}(0) = K_1(a + \sum_{i=1}^{\infty} b_i q_i^k)\hat{M}_m^{(k)}(0) + \sum_{i=1}^{\infty} c_i p_i^{k+1} \hat{M}_m^{(k+1)}(0), \quad k = 0, 1, 2, \cdots, m$$

である。$R_{m,m}(t)$ が (5.2) の $y(t)$ に対する (m,m)-*Padé* 近似であり、$v(t)$ と $M_m(t)$ が定理5.2 により定義され、$u_{it}(t)$ に対する $\hat{M}_m(t)$ が (5.6) を満たすならば、$u_{it}(h) = R_{m,m}(h)$ かつ $|u_{it}(h) - y(h)| = O(h^{2m+1})$ が成立つ。

例 5.2 $m = 3$ で $h = 2^{-n}$ に対して、誤差 $e(h) = v(h) - y(h)$ を示したものが表 5.1 である。参考までに $\frac{1}{2^7} = 0.0078125$ である。

表 5.1 $m = 3$ かつ $h = 2^{-n}$ の場合の誤差 $e(h)$

		$a=-1.1,\ b=1.0,\ c=0.55$		$a=-0.7,\ b=0.49,\ c=0.35$	
	n	$e(h)$	$\frac{e(h)}{e(2h)}$	$e(h)$	$\frac{e(h)}{e(2h)}$
$p=1$ $q=1$	1	1.55561943E-05		4.12830686E-06	
	2	3.66137508E-07	0.0235..	7.8897329E-08	0.0191..
	3	5.422264..E-09	0.0148..	1.032746..E-09	0.0130..
	4	6.0367..E-11	0.0111..	1.0678..E-11	0.0103..
	5	5.68..E-13	0.00942..	9.6..E-14	0.00904..
$p=0.5$ $q=0.25$	1	1.17592008E-06		2.67331934E-07	
	2	9.520699..E-09	0.00809..	2.468446..E-09	0.00923..
	3	7.7527..E-11	0.00814..	2.1263..E-11	0.00861..
	4	6.25..E-13	0.00806..	1.75..E-13	0.00824..
	5	4.9..E-15	0.00799..	1.4..E-15	0.00823..
p=0.75 q=0.25	1	2.446569..E-09		4.27549..E-10	
	2	1.9487..E-11	0.00796..	3.383..E-12	0.00791..
	3	1.53..E-13	0.00789..	2.6..E-14	0.00790..
$p=1$ $q=0.25$	1	2.9167..E-11		4.462..E-12	
	2	2.29..E-13	0.00786..	3.5..E-14	0.00791..

参考文献

[1] Baddour, N. and Brunner, H.: Continuous Volterra-Runge-Kutta methods for integral equations with pure delay. Computing *50*, 213-227 (1993).

[2] Bellen, A.: One-step collocation for delay differential equations. J. Comput. Appl. Math. *10*, 275-283 (1984).

[3] Blom, J. G., Brunner, H.: The numerical solution of nonlinear Volterra integral equations of the second kind by collocation and iterated collocation methods. SIAM J. Sci. Statist. Comput. *8*, 806-830 (1987).

[4] Brunner, H.: Iterated collocation methods for Volterra integral equations with delay arguments. Math. Comp. *62*, 581-599 (1994).

[5] Brunner, H.: On the discretization of differential and Volterra integral equations with variable delay. BIT *37:1*, 1-12 (1997).

[6] Buhmann, M. D., Iserles, A.: On the dynamics of a discretized neutral equation. IMA J. Numer. Anal. *12*, 339-363 (1992).

[7] Buhmann, M. D., Iserles, A., Nørsett, S. P.: Runge-Kutta methods for neutral differential equations. Contributions in Numerical Mathematics, World Sci. Ser. Appl. Anal., 2, World Sci. Publishing, River Edge NJ, 85-98 (1993).

[8] Feldstein, A., Jackiewicz, Z.: Unstable neutral functional differential equations, Canad. Math. Bull. *33*, 428-433 (1990).

[9] Fox, L., Mayers, D. F., Ockendon J. R., Tayler, A. B.: On a functional differential equation. J. Inst. Math. Appl. *8*, 271-307 (1971).

[10] Iserles, A.: On the generalized pantograph functional-differential equation. European J. Appl. Math. *4*, 1-38 (1993).

[11] Iserles, A., Liu, Y.: On pantograph integro-differential equations. J. Integral Equations Appl. *6*, 213-237 (1994).

[12] Iserles, A., Liu, Y.: Integro-differential equations and generalized hypergeometric functions. J. Math. Anal. Appl. *208*, 404-424 (1997).

[13] Iserles, A., Liu, Y.: On neutral functional-differential equations with proportional delays. J. Math. Anal. Appl. *207*, 73-95 (1997).

[14] Iserles, A., Nørsett, S. P.: Order Stars. London: Chapman & Hall 1991.

[15] Iserles, A., Terjéki, J.: Stability and asymptotic stability of functional-differential equations. J. London Math. Soc. *51*, 559-572 (1995).

[16] Ishiwata, E.: On the attainable order of collocation methods for the neutral functional-differential differential equation with proportional delay. to appear in Computing (2000).

[17] Kato, T., McLEOD, J. B.: The functional-differential equation $y'(x) = ay(\lambda x) + by(x)$. Bull. Amer. Math. Soc. *77*, 891-937 (1971).

[18] Kuang, Y., Feldstein, A.: Monotonic and oscillatory solution of a linear neutral delay equation with infinite lag. SIAM. J. Math. Anal. *21*, 1633-1641 (1990).

[19] Liu, Y.: Asymptotic behaviour of functional-differential equations with proportional time delays. European J. Appl. Math. *7*, 11-30 (1996).

[20] Takama, N., Muroya, Y., Ishiwata, E.: On the attainable order of collocation methods for the delay differential equation with proportional delay. BIT *40*, 374-394 (2000).