数理解析研究所講究録
第1186巻 2001年 36-48

Fixed Point Theorems for Nonexpansive Mappings and Their Applications (非拡大写像の不動点定理とその応用)

WATARU TAKAHASHI(高橋　渉)

Tokyo Institute of Technology
Department of Mathematical and Computing Sciences
(東京工業大学大学院情報理工学研究科)

1　はじめに

H を Hilbert 空間とし，$f, f_1, f_2, \ldots, f_n$ を H から $\boldsymbol{R}$ への連続な凸関数とする．このとき，凸最小化問題は次の形で与えられる．

$$f(z) = \min\{f(x) : x \in C\}$$

となる $z \in C$ を求めよ．ただし，

$$C = \{x \in H : f_i(x) \leq 0, i = 1, 2, \ldots, n\}$$

である．この問題で g を

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & x \in C, \\ \infty, & x \notin C \end{cases}$$

であると定義すると，g は H から $(-\infty, \infty]$ の中に値をとる proper で凸な下半連続関数となる．そこで我々は

$$\min\{g(x) : x \in H\} \tag{1}$$

という凸最小化問題を考えることができる．このような g に対して，H 上の集合値写像 ∂g を，$x \in H$ に対して

$$\partial g(x) = \{x^* \in H : g(y) \geqq g(x) + (x^*, y - x), y \in H\}$$

で定義し，これを g の劣微分と呼ぶ．H 上の集合値写像 $A \subset H \times H$ は、$(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in A$ に対して $(x_1 - x_2, y_1 - y_2) \geqq 0$ を満たすならば，増大であるといわれ，$\lambda > 0$ に対して，A の resolvent が $J_\lambda = (I + \lambda A)^{-1}$ で定義される．増大写像 A が，すべての $\lambda > 0$ に対して，$R(I + \lambda A) = H$ を満たすならば，$m-$ 増大といわれる．ただし，$R(I + \lambda A)$ は $I + \lambda A$ の値域を表す．proper で凸な下半連続関数 $g : H \to (-\infty, \infty]$ に対して，その劣微分 ∂g は $m-$ 増大になることが知られている．このような $m-$ 増大作用素に対して，つぎの初期値問題

$$\frac{du(t)}{dt} + \partial g(u(t)) \ni 0, \quad t > 0,$$
$$u(0) = x \tag{2}$$

を考えることができる．ただし，x は $\overline{D(\partial g)}$ の元である．このとき，(2) は一意の解 u : $[0,\infty) \to H$ をもつ．ここで $S(t)x = u(t)$ とおくと，$\{S(t) : t \in [0,\infty)\}$ は $\overline{D(\partial g)}$ 上の one-parameter の非拡大半群となる [7]．我々はまた

$$\begin{aligned} 0 \in \partial g(x_0) \Leftrightarrow \quad & g(x_0) = \min\{g(x) : x \in H\} \\ \Leftrightarrow \quad & x_0 \in \bigcap_{t \geqq 0} F(S(t)) \end{aligned}$$

であることも知っている．ただし，$F(S(t))$ は $S(t)$ の不動点全体の集合である．さらに，すべての $\lambda > 0$ に対して

$$0 \in \partial g(z) \Leftrightarrow J_\lambda z = z$$

となることも知っている．また (1) の解を求めるよく知られた方法として，Martinet [24] によって導入された proximal point algorithm というものがある．このアルゴリズムは，resolvent J_λ に関係がある．すなわち，

$$J_\lambda x = \operatorname{argmin}\left\{ f(z) + \frac{1}{2\lambda}\|z - x\|^2 : z \in H \right\}$$

である (Moreau[26] を参照せよ)．proximal point algorithm とは，$\{\lambda_n\} \subset (0,\infty)$ とするとき，$x_0 \in H$ を初期点とし，

$$x_{n+1} = J_{\lambda_n} x_n \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

で帰納的に点列 $\{x_n\}$ を生成し，(1) の解を求める点列的構成法のことである (Rockafellar[30] を参照せよ)．また，つぎの問題も知っている．H を Hilbert 空間とし，$C_1, C_2, \dots, C_r$ をその共通部分 C_0 が空でない H の閉凸集合とする．距離射影 $P_i : H \to C_i$ $(i = 1, 2, \dots, r)$ のみが与えられて，ある点列的近似法によって C_0 の元を求めよ，という問題がある．このような問題は制約可能性問題と関係がある．実際，$\{g_1, g_2, \dots, g_r\}$ を H 上で定義された r 個の連続凸関数とする．このとき，凸制約可能性問題とは，凸不等式のシステム

$$C_0 = \{x \in H : \ g_i(x) \leq 0, \ i = 1, 2, \dots, r\}$$

に対して，C_0 の元 x を見つけよ，というものである．

一方，我々は非拡大写像の 3 つの不動点近似法を知っている．1 つは，$x \in H$ とするとき，

$$x_n = \sum_{k=0}^{n-1} T^k x$$

で T の不動点と求める Baillon[6] の方法である．後の 2 つは，Halpern [14] によって導入された点列的近似法

$$x_0 = x \in H, \ x_{n+1} = \alpha_n x + (1 - \alpha_n) T x_n \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

と，Mann [23] によって導入された

$$x_0 = x \in H, \ x_{n+1} = \alpha_n x_n + (1 - \alpha_n) T x_n \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

の近似法である．ただし，$\{\alpha_n\} \subset [0,1]$ であり，T は Hilbert 空間 H から H への非拡大写像である．

ここでは，まず非線形エルゴード定理を弱収束と強収束の場合で紹介する (第3節)．1975年，Baillon[6] によって初めて証明された非線形エルゴード定理 (弱収束定理) は，1999年，Lau-塩路-高橋 [21] によって非可換の場合まで拡張された．また最近，厚芝-高橋 [4,5] によって，強収束する非線形エルゴード定理が狭義凸な Banach 空間で証明された．第 4 節では Halpern と Mann タイプの点列的近似法を紹介する．特に，塩路-高橋 [34] は Halpern 近似法のアイディアを用いて，非可換 nonexpansive 半群の強収束定理を得ている．また，厚芝-塩路-高橋 [2] は Mann 近似法のアイディアを用いて，上の半群の弱収束定理を得ている．第 5 節は応用である．そこでは第 4 節で得られた定理または証明の方法を用いて，制約可能性問題と proximal point algorithm が議論されている．非拡大写像の不動点定理の面白さと応用の広さを味わっていただければ幸いである．

2 準備

E を Banach 空間とし，E^* をその共役空間とする．$x \in E$ における $x^* \in E^*$ の値を $x^*(x)$ または (x, x^*) で表す．E における点列 $\{x_n\}$ が x に強収束することを $x_n \to x$ で表し，弱収束することを $x_n \rightharpoonup x$ で表す．

E の凸性の modulus δ は，$0 \leqq \varepsilon \leqq 2$ となる ε に対して

$$\delta(\varepsilon) = \inf \left\{ 1 - \frac{\|x+y\|}{2} : \|x\| \leqq 1, \|y\| \leqq 1, \|x-y\| \geqq \varepsilon \right\}$$

で定義される．Banach 空間 E が一様凸であるとは，$\varepsilon > 0$ に対して，$\delta(\varepsilon) > 0$ がつねに成り立つときをいう．E の元 x に対して，

$$J(x) = \{x^* \in E^* : (x, x^*) = \|x\|^2 = \|x^*\|^2\}$$

が定義されるが，この J を E 上の duality 写像という．
$U = \{x \in E : \|x\| = 1\}$ としよう．このとき，$x, y \in U$ に対して，極限

$$\lim_{t \to 0} \frac{\|x+ty\| - \|x\|}{t} \tag{3}$$

を考えよう．E のノルムが Gâteaux 微分可能であるとは，任意のに $x, y \in U$ 対して，(3) がつねに存在するときをいう．E のノルムが一様に Gâteaux 微分可能であるとは，任意の $y \in U$ に対して，(3) が $x \in U$ に関して一様に収束するときをいう．E のノルムが Fréchet 微分可能であるとは，任意の $x \in U$ に対して，(3) が $y \in U$ に関して一様に収束するときをいう．E が Gâteaux 微分可能なノルムをもてば，E 上の duality 写像は一価写像になる．
Banach 空間 E が Opial's condition [27] を満たすとは，$x_n \rightharpoonup x$ かつ $x \neq y$ であるならば

$$\liminf_{n \to \infty} \|x_n - x\| < \liminf_{n \to \infty} \|x_n - y\|$$

となるときをいう．ただし，$\rightharpoonup$ は弱収束を表す．

E を Banach 空間とし，$A \subset E \times E$ としよう．A が増大作用素 (accretive operator) であるとは，$(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in A$ に対して，つねに $(y_1 - y_2, j) \geqq 0$ となる $j \in J(x_1 - x_2)$ が存在するときをいう．ただし，J は E の duality 写像である．E を Banach を空間とし，$A \subset E \times E$ を増大作用素とする．このとき，すべての $\lambda > 0$ に対して $\overline{D(A)} \subset R(I + \lambda A)$ が成立するならば，A は値域条件 (range condition) を満たすといわれる．このとき，$A^{-1}0 = \{x \in D(A) : 0 \in Ax\}$

と A の resolventJ_r の不動点の集合 $F(J_r)$ の間には $F(J_r)=A^{-1}0$ という関係がある．また，つぎの定理 [15] は第 4 章の定理の証明で本質的となる．

定理 2.1（$r\to\infty$ のときの J_rx の収束性） E を一様 Gâteaux 微分可能なノルムをもつ一様凸な Banach 空間とし，$A\subset E\times E$ を値域条件を満たす増大作用素とする．C を E の空でない閉凸集合で，

$$\overline{D(A)}\subset C\subset\bigcap_{r>0}R(I+rA)$$

を満たすものとする．このとき，$0\in R(A)$ ならば，任意の $x\in C$ に対して $\lim_{t\to\infty}J_tx$ が存在して，その極限は $A^{-1}0$ に属する．

S を semitopological な半群，すなわち Hausdorff 位相をもった半群で，任意の $s\in S$ に対して，S から S への 2 つの写像 $t\mapsto st$ と $t\mapsto ts$ が連続なときをいう．$B(S)$ を S 上の有界実数値関数のつくる Banach 空間とし，X を 1 を含む $B(S)$ の部分空間とする．このとき，X^* 上の元 μ が X 上の mean であるとは $\|\mu\|=\mu(1)=1$ を満たすときをいう．我々は $\mu\in X^*$ が X 上の mean である必要十分条件が

$$\inf\{f(s):\ s\in S\}\le\mu(f)\le\sup\{f(s):\ s\in S\}\quad(\forall f\in X)$$

であることを知っている．X 上の mean μ と $f\in X$ に対して，$\mu(f)$ の代わりに $\mu_t(f(t))$ を用いることもある．

$s\in S$ と $f\in B(S)$ に対して，$B(S)$ の元 ℓ_sf と r_sf は $(\ell_sf)(t)=f(st)$ と $(r_sf)(t)=f(ts)$ $(\forall t\in S)$ で定義される．X を $B(S)$ の部分空間で 1 を含みかつ $\ell_s, s\in S$ (または $r_s, s\in S$) のもとで不変であるとする．このとき，X 上の mean μ が left invariant （または right invariant）であるとは $\mu(f)=\mu(\ell_sf)$(または $\mu(f)=\mu(r_sf)$)$(\forall f\in X,\ s\in S)$ を満たすときをいう．invariant mean とは left かつ right invariant mean であるときをいう．S を semitopological 半群とし，C を Banach 空間 E の空でない集合とする．このとき C から C への写像の族 $\mathcal{S}=\{T_s:\ s\in S\}$ が C 上の nonexpansive 半群であるとは，つぎの (i),(ii),(iii) を満たすときをいう．(i) $T_{st}x=T_sT_tx$ $(\forall s,t\in S, x\in C)$；(ii) 任意の $x\in C$ に対して，写像 $s\mapsto T_sx$ は連続である；(iii) 任意の $s\in S$ に対して，T_s は C 上の nonexpansive 写像である．C 上の nonexpansive 半群 $\mathcal{S}=\{T_s:\ s\in S\}$ に対して，我々は $F(\mathcal{S})$ によって $T_s, s\in S$ の共通不動点の集合を表す．$C(S)$ はまた，S 上の有界連続関数全体の Banach 空間を表す．

3 非線形エルゴード定理

最初の非線形エルゴード定理は 1975 年 Baillon[6] によって Hilbert 空間の場合で証明された．

定理 3.1([6]) C を Hilbert 空間 H の閉凸集合とし，T を C 上の nonexpansive 写像とする．このとき，T の不動点の集合 $F(T)$ が空でないならば，任意の $x\in C$ に対して，Cesàro mean

$$S_n(x)=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}T^kx$$

は $y\in F(T)$ に弱収束する．

この定理は一様凸な Banach 空間の場合に Bruck[8] によって証明された．

定理 3.2([8]) C を一様凸で，Fréchet 微分可能なノルムをもつ Banach 空間とする．$T:\ C \to C$ を不動点をもつ nonexpansive 写像とするならば $\{T^n x\}$ の Cesàro mean は T の不動点に弱収束する．

Baillon と Bruck の非線形エルゴード定理のあと，沢山の非線形エルゴード定理が証明されている．ここでは nonexpansive 半群に対する非線形エルゴード定理を紹介することにする．

$\{\mu_\alpha :\ \alpha \in A\}$ を $C(S)$ 上の mean の net とする．このとき，$\{\mu_\alpha \in A\}$ が asymptotically invariant であるとは，任意の $f \in C(S)$ と $s \in S$ に対して

$$\mu_\alpha(f) - \mu_\alpha(\ell_s f) \to 0 \text{ かつ } \quad \mu_\alpha(f) - \mu_\alpha(r_s f) \to 0$$

が満たされるときをいう．

C を回帰的な Banach 空間 E の閉凸集合とし，$\mathcal{S} = \{T_s :\ s \in S\}$ を C 上の nonexpansive 半群で，ある $x \in C$ に対して，$\{T_s x :\ s \in S\}$ が有界であると仮定する．μ を $C(S)$ 上の mean とする．このとき，$x \in C$ と $y^* \in E^*$ に対して，関数 $t \mapsto (T_t x, y^*)$ は $C(S)$ の中に入る．そこでこの関数の μ における値を $\mu_t(T_t x, y^*)$ とする．

Riesz の定理によって，ある $x_0 \in E$ が存在し，$\mu_t(T_t x, y^*) = (x_0, y^*)$ $(\forall y^* \in E^*)$ となる．我々はこの x_0 を $T_\mu x$ または $\int T_t x d\mu(t)$ によって表す [35,37].

今や，Banach 空間における nonexpansive 半群のエルゴード定理を述べることができる．その前に定理を 1 つ与えておく．$\{\mu_\alpha\}$ を $C(S)$ 上の連続線形汎関数の net とする．このとき $\{\mu_\alpha\}$ が strongly regular であるとはつぎの (i),(ii),(iii) の条件を満たすときをいう．

$$\text{(i)}\ \sup_\alpha \|\mu_\alpha\| < +\infty; \quad \text{(ii)}\ \lim_\alpha \mu_\alpha(1) = 1; \quad \text{(iii)}\ \lim_\alpha \|\mu_\alpha - r_s^* \mu_\alpha\| = 0\ (\forall s \in S).$$

定理 3.3([15]) S を可換な semitopological 半群とし，E を一様凸で Fréchet 微分可能なノルムをもつ Banach 空間とする．C を E の閉凸集合とし，$\mathcal{S} = \{T_t :\ t \in S\}$ を C 上の nonexpansive 半群で $F(\mathcal{S})$ が空でないとする．このとき C から $F(\mathcal{S})$ の上への nonexpansive retraction P で $PT_t = T_t P = P$ $(\forall t \in S)$ かつ $Px \in \overline{co}\{T_t x :\ t \in S\}$ $(\forall x \in C)$ を満たすものが存在する．さらに，$\{\mu_\alpha\}$ が $C(S)$ 上の連続線形汎関数の net とする．このとき，$x \in C$ に対して，$T_{\mu_\alpha} T_t x$ は $t \in S$ に関して一様に Px に収束する．

S が非可換であるとき，定理 3.3 が成り立つかどうかはこれまでわからなかった [39]．最近 Lau-塩路-高橋 [21] はつぎの形でこの問題を解いた．

定理 3.4 ([21]) C を一様凸な Banach 空間 E の閉凸集合とし，S を semitopological 半群で，$C(S)$ が invariant mean をもつとする．また $\mathcal{S} = \{T_t : t \in S\}$ を C 上の nonexpansive 半群で，$F(\mathcal{S}) \neq 0$ であるとする．このとき，C から $F(\mathcal{S})$ の上への nonexpansive retraction P で $PT_t = T_t P = P$ $(\forall t \in \mathcal{S})$ かつ $Px \in \overline{co}\{T_t x : t \in S\}$ $(\forall x \in C)$ を満たすものが存在する．

これは高橋の結果 [35] の一般化である．さらに Lau-塩路-高橋 [21] は Rodé' の結果 [31] をつぎの形にまで一般化した．

定理 3.5 ([21]) E を一様凸な Banach 空間とし Fréchet 微分可能なノルムをもつとする．S を semitopological 半群とし，C を E の閉凸集合とする．また $\mathcal{S} = \{T_t : t \in S\}$ を C 上の nonexpansive 半群とし， $F(\mathcal{S}) \neq \phi$ とする．$C(S)$ は invariant mean をもつとする．このとき，C から $F(\mathcal{S})$ の上への nonexpansive retraction P で $PT_t = T_t P = P$ $(\forall t \in S)$ かつ $Px \in \overline{co}\{T_t x : t \in S\}$ $(\forall x \in C)$ を満たすものが一意に存在する．さらに，$\{\mu_\alpha\}$ が $C(S)$ 上

の mean の asymptotically invariant net であるならば，任意の $x \in C$ に対して，$\{T_{\mu_\alpha}x\}$ は Px に弱収束する．

また，最近，狭義凸な Banach 空間上で非線形エルゴード定理が厚芝-高橋に [4,5] よって強収束の形で証明された．この 2 つの定理は Edelstein [13] と Dafermos –Slemrod [10] に関係がある．

定理 3.6 ([4]) E を狭義凸な Banach 空間とし，C を E のコンパクトな凸集合とする．T を C 上の nonexpansive 写像とし，$x \in C$ とする．このとき $(1/n)\sum_{i=0}^{n-1} T^{i+h}x$ は T の不動点に $h \in N \cup \{0\}$ に関して一様に収束する．また，$Qx = \lim_{n\to\infty}(1/n)\sum_{i=0}^{n-1} T^i x$ $(\forall x \in C)$ とおくと，Q は C から $F(T)$ の上への nonexpansive retraction で，かつ $QT^k = T^kQ = Q$ $(\forall k \in N)$ かつ $Qx \in \overline{\mathrm{co}}\{T^kx : k \in N\}$ $(\forall x \in C)$ を満たす．

定理 3.7 ([5]) E を狭義凸な Banach 空間とし，C を E のコンパクトな凸集合とする．$\mathcal{S} = \{S(t) : 0 \leqq t < \infty\}$ を C 上の one-parameter nonexpansive 半群とし，$x \in C$ とする．このとき $(1/t)\int_0^t S(\tau + h)x d\tau$ は $\mathcal{S}$ の共通不動点に弱収束する．

4 Hilbert 空間での不動点近似法

この節では，Halpern と Mann タイプの点列的不動点近似法を紹介する．つぎの定理は Halpern による点列的不動点近似法である．証明は Wittmann[46] による．

定理 4.1([46]) H を Hilbert 空間とし，C を H の空でない閉凸集合とする．T を C から C への非拡大写像とし，$F(T) \neq \phi$ とする．また P を H から $F(T)$ の上への metric projection とする．$\{\alpha_n\} \subset [0,1)$ は $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n = \infty$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|\alpha_{n+1} - \alpha_n| < \infty$ を満たすとする．このとき，$x_1 = x \in C$,

$$x_{n+1} = \alpha_n x + (1-\alpha_n)Tx_n \quad (n = 1, 2, \dots)$$

で定義される点列 $\{x_n\}$ は Px に強収束する．

つぎに，Mann による点列的不動点近似法に関する定理を紹介する．証明は [40] を見よ．

定理 4.2([40]) H を Hilbert 空間とし，C を H の空でない閉凸集合とする．T を C から C への非拡大写像とし，$F(T) \neq \phi$ とする．$\{\alpha_n\} \subset [0,1]$ は $0 \leqq \alpha_n < 1$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n(1-\alpha_n) = \infty$ を満たすとする．このとき

$$x_1 = x \in C,\ x_{n+1} = \alpha_n x_n + (1-\alpha_n)Tx_n \quad (n = 1, 2, \dots)$$

で定義される点列 $\{x_n\}$ は $F(T)$ の元 z に弱収束する．

上の 2 つの結果（定理 4.1，定理 4.2）を Banach 空間の場合まで拡張する．その前に塩路-高橋 [33] によって証明された Banach limit に関する 2 つの補助定理を述べておく．

補助定理 4.3 a を実数とし，$(a_1, a_2, \dots) \in \ell^\infty$ とする．このとき，すべての Banach limit μ に対して，$\mu_n(a_n) \leqq a$ が成り立つための必要十分条件は，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，

ある $m \in N$ が存在して，

$$\frac{a_n + a_{n+1} + \cdots + a_{n+p-1}}{p} < a + \varepsilon \quad ({}^{\forall}p \geqq m,\ {}^{\forall}n \in N)$$

が成り立つことである．

補助定理 4.4 a を実数とし，$(a_1, a_2, \ldots) \in \ell^\infty$ とする．すべての Banach limit μ に対して，$\mu_n(a_n) \leqq a$ が成り立ち，かつ

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}(a_{n+1} - a_n) \leqq 0$$

であれば，$\overline{\lim_{n\to\infty}} a_n \leqq a$ が成り立つ．

塩路-高橋 [33] によって証明されたつぎの定理は，定理 4.1 を Banach 空間の場合に拡張するものである．

定理 4.5([33]) E を一様 Gâteaux 微分可能なノルムをもつ一様凸 Banach 空間とし，C を E の閉凸集合とする．T を C から C への非拡大写像とし，$F(T) \neq \phi$ とする．$\{\alpha_n\} \subset [0,1]$ は $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$，$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty$，$\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_{n+1} - \alpha_n| < \infty$ を満たすものとする．このとき，$x_1 = x \in C$,

$$x_{n+1} = \alpha_n x + (1 - \alpha_n) T x_n \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

で定義される点列は $F(T)$ の元に強収束する．

Reich[28] によって証明されたつぎの定理は，定理 4.2 を Banach 空間の場合に拡張するものである．その前に，補助定理を 1 つ述べておく．

補助定理 4.6 E を Fréchet 微分可能なノルムをもつ一様な凸 Banach 空間とし，C を E の閉凸集合とする．$\{T_1, T_2, T_3, \ldots\}$ を C から C への非拡大写像の列とし，$\bigcap_{n=1}^{\infty} F(T_n) \neq \phi$ を仮定する．$x \in C$ とし，$S_n = T_n T_{n-1} \ldots T_1$ $(n \in N)$ とする．このとき，集合

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{co}\{S_m x : m \geqq n\} \cap U$$

は高々一点からなる．ただし，$U = \bigcap_{n=1}^{\infty} F(T_n)$ である．

定理 4.7([28]) E を Fréchet 微分可能なノルムをもつ一様凸 Banach 空間とし，C を E の閉凸集合とする．T を C から C への非拡大写像とし，$F(T) \neq \phi$ とする．$\{\alpha_n\} \subset [0,1]$ は $0 \leqq \alpha_n < 1$，$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(1 - \alpha_n) = \infty$ を満たすものとする．このとき $x_1 = x \in C$,

$$x_{n+1} = \alpha_n x_n + (1 - \alpha_n) T x_n \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

で定義される点列 $\{x_n\}$ は $F(T)$ の元 z に弱収束する．

この節の最後に，写像族に対する Halpern と Mann タイプの共通不動点近似法について紹介する．無限個の写像族に対する点列的不動点近似法は歴史も浅く，1997 年に清水–高橋 [32] によるものが最初のものである．最近，塩路–高橋 [34] は清水–高橋の結果をつぎの形にまで拡張した．

定理 4.8([34]) E を一様凸な Banach 空間で，一様 Gâteaux 微分可能なノルムをもつものとし，C を E の閉凸集合とする．$\mathcal{S} = \{T_t : t \in S\}$ を C 上の半群とし，$F(\mathcal{S}) \neq \phi$ とする．$\{\mu_n\}$ を $C(S)$ 上の mean の列とし，$\|\mu_n - \ell_s^* \mu_n\| = 0$ $(\forall s \in S)$ を満たすものとする．$x, y_1 \in C$ とし，点列 $\{y_n\}$ を

$$y_{n+1} = \beta_n x + (1 - \beta_n) T_{\mu_n} y_n \quad (n = 1, 2, \dots)$$

で与えるとしよう．ただし $\{\beta_n\} \subset [0,1]$ は $\lim_{n\to\infty} \beta_n = 0$ かつ $\Sigma_{n=1}^{\infty} \beta_n = \infty$ を満たすものとする．このとき，$\{y_n\}$ は $F(\mathcal{S})$ の元に強収束する．

この定理を用いて，one-parameter 半群に対する強収束定理を証明することができる．

定理 4.9 E を一様凸な Banach 空間で，一様 Gâteaux 微分可能なノルムをもつものとし，C を E の閉凸集合とする．$\mathcal{S} = \{S(t) : t \geqq 0\}$ を C 上の one-parameter nonexpansive 半群とし，$F(\mathcal{S}) \neq \emptyset$ とする．このとき，$x, y_1 \in C$ に対して，点列 $\{y_n\}$ を

$$y_{n+1} = \beta_n x + (1 - \beta_n) \frac{1}{\lambda_n} \int_0^{\lambda_n} S(t) y_n \, dt \quad (n = 1, 2, \dots)$$

で与えるとしよう．ただし，$\{\beta_n\} \subset [0,1]$ と $\{\lambda_n\} \subset (0, \infty)$ は $\lim_{n\to\infty} \beta_n = 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n = \infty$ および $\lambda_n \to \infty$ を満たすものとする．すると $\{y_n\}$ は $F(\mathcal{S})$ の元に強収束する．

厚芝–塩路–高橋 [2] は，写像族に対して Mann タイプの弱収束定理を証明している．

定理 4.10 ([2]) E を一様凸な Banach 空間とし，Fréchet 微分可能なノルムをもつものとする．C を E の閉凸集合とし，$\mathcal{S} = \{T_t : t \in S\}$ を C 上の nonexpansive 半群とする．また $F(\mathcal{S}) \neq \phi$ とする．$\{\mu_n\}$ を $C(S)$ 上の mean の点列で $\|\mu_n - \ell_s^* \mu_n\| = 0$ $(\forall s \in S)$ を満たすとする．このとき，$x_1 = x \in C$ に対して，点列 $\{x_n\}$ を

$$x_{n+1} = \alpha_n x_n + (1 - \alpha_n) T_{\mu_n} x_n \quad (n = 1, 2, \dots)$$

で与える．ただし $\{\alpha_n\} \subset [0,1]$ は $\alpha_n \in [0, a]$ $(0 < a < 1)$ を満たすものとする．このとき $\{x_n\}$ は $x_0 \in F(\mathcal{S})$ に弱収束する．

これを用いて one-parameter 半群に対する Mann タイプの弱収束定理が証明できる．

定理 4.11 E を一様凸な Banach 空間とし，Fréchet 微分可能なノルムをもつものとする．C を E の閉凸集合とし，$\mathcal{S} = \{S(t) : t \in [0, \infty)\}$ を C 上の one-parameter nonexpansive 半群とする．また $F(\mathcal{S}) \neq \phi$ とする．このとき，$x_1 = x \in C$ に対して，点列 $\{x_n\}$ を

$$x_{n+1} = \alpha_n x_n + (1 - \alpha_n) \frac{1}{s_n} \int_0^{s_n} S(t) x_n dt \quad (n = 1, 2, \dots)$$

で与える．ただし，$s_n \to \infty$ $(n \to \infty)$ であり，かつ $\{\alpha_n\} \subset [0,1]$ は $\alpha_n \in [0, a]$ $(0 < a < 1)$ を満たすとする．このとき，$\{x_n\}$ は $z \in F(\mathcal{S})$ に弱収束する．

5 応用

H を Hilbert 空間とし，$C_1, C_2, \dots, C_r$ を $C_0 = \bigcap_{i=1}^{r} C_i \neq \phi$ となる H の空でない閉凸集合とする．このとき，H から C_i の上への距離射影 P_i $(i = 1, 2, \dots, r)$ のみを用いて，C_0 の元を

もとめるという点列的近似法は $\{g_1, g_2, \ldots, g_r\}$ を H 上の実数値連続凸関数の r 個の族に対して，

$$C_0 = \{x \in H : g_i(x) \leqq 0,\ i = 1, 2, \ldots, r\}$$

となる C_0 の元を見つけるという制約可能性問題と関係がある．この節では，第 4 節の点列的不動点近似法を用いて，制約可能性問題を考察してみる．C を Banach 空間 E の空でない凸集合とする．$T_1, T_2, \ldots, T_r$ を C から C への r 個の写像とし，$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ を $0 \leqq \alpha_i \leqq 1$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$ となる r 個の実数とする．このとき，C から C への写像 W を

$$\begin{aligned}
U_1 &= \alpha_1 T_1 + (1 - \alpha_1) I, \\
U_2 &= \alpha_2 T_2 U_1 + (1 - \alpha_2) I, \\
&\ \ \vdots \\
U_{r-1} &= \alpha_{r-1} T_{r-1} U_{r-2} + (1 - \alpha_{r-1}) I, \\
W = U_r &= \alpha_r T_r U_{r-1} + (1 - \alpha_r) I
\end{aligned}$$

で定義する．このような写像 W は $T_1, T_2, \ldots, T_r$ と $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ によって生成される $W-$ 写像といわれる．つぎの補助定理はこの節では大切である．

補助定理 5.1　E を狭義凸な Banach 空間とし，C を E の閉凸集合とする．$T_1, T_2, \ldots, T_r$ を $\bigcap_{i=1}^r F(T_i) \neq \phi$ となる C から C への r 個の非拡大写像とし，$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ を $0 < \alpha_i < 1$ $(i = 1, 2, \ldots, r-1)$，$0 < \alpha_r \leqq 1$ となる r 個の実数とする．また，W を $T_1, T_2, \ldots, T_r$ と $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ によって生成される $W-$ 写像とする．このとき，つぎの式が成立する．

$$F(W) = \bigcap_{i=1}^r F(T_i).$$

補助定理 5.1，定理 4.5，定理 4.7 を用いて，制約可能性問題と関係のあるつぎの 2 つの定理を得ることができる．

定理 5.2　E を一様 Gâteaux 微分可能なノルムをもつ一様凸 Banach 空間とし，C を E の閉凸集合とする．$T_1, T_2, \ldots, T_r$ を $\bigcap_{i=1}^r F(T_i) \neq \phi$ となる r 個の非拡大写像の r 個の族とし，$\alpha_1, \alpha_2 \ldots, \alpha_r$ を $0 < \alpha_i < 1$ $(i = 1, 2, \ldots, r-1)$，$0 < \alpha_r \leqq 1$ となる r 個の実数とする．W を $T_1, T_2, \ldots, T_r$ と $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ によって生成される $W-$ 写像とし，$\{\beta_n\} \subset [0, 1]$ を $\lim_{n\to\infty} \beta_n = 0$，$\sum_{n=1}^\infty \beta_n = 0$，$\sum_{n=1}^\infty |\beta_{n+1} - \beta_n| < \infty$ を満たす実数の列とする．このとき

$$x_1 = x \in C, \quad x_{n+1} = \beta_n x + (1 - \beta_n) W x_n \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

で定義される点列 $\{x_n\}$ は $F(W) = \bigcap_{i=1}^r F(T_i)$ の元に強収束する．

定理 5.3　E を Fréchet 微分可能なノルムをもつ一様凸な Banach 空間とし，C を E の閉凸集合とする．$T_1, T_2, \ldots, T_r$ を $\bigcap_{i=1}^r F(T_i) \neq \phi$ となる r 個の非拡大写像の r 個の族として，$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ を $0 < \alpha_i < 1$ $(i = 1, 2, \ldots, r-1)$，$0 < \alpha_r \leqq 1$ となる r 個の実数とする．W を $T_1, T_2, \ldots, T_r$ と $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ によって生成される $W-$ 写像とし，$\{\beta_n\} \subset [0, 1]$ を $0 \leqq \beta_n < 1$ $(n = 1, 2, \ldots)$，$\sum_{n=1}^\infty \beta_n (1 - \beta_n) = \infty$ を満たす実数とする．このとき

$$x_1 = x \in C, \quad x_{n+1} = \beta_n x_n + (1 - \beta_n) W x_n \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

で定義される点列 $\{x_n\}$ は $F(W)=\bigcap_{i=1}^{r} F(T_i)$ の元に弱収束する．

定理 5.2 と定理 5.3 を用いて，Banach 空間における制約可能性問題を考える．その前に，定義を 1 つ与えておく．C を Banach 空間 E の閉凸集合とし，D を C の部分集合とする．このとき，C から D の上への nonexpansive retraction が存在するとき，D は C の nonexpansive retract といわれる．

定理 5.4 E を一様 Gâteaux 微分可能なノルムをもつ一様凸 Banach 空間とし，C を E の閉凸集合とする．$C_1, C_2, \ldots, C_r$ を $\bigcap_{i=1}^{r} C_i \neq \phi$ となる C の r 個の nonexpansive retract とし，$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ を $0<\alpha_i<1$ $(i=1,2,\ldots,r-1)$, $0<\alpha_r \leqq 1$ となる r 個の実数とする．W を $P_1, P_2, \ldots, P_r$ と $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ によって生成される $W-$ 写像とする（ただし，P_i は C から C_i の上への nonexpansive retraction とする）．また，$\{\beta_n\} \subset [0,1]$ を $\lim_{n\to\infty} \beta_n = 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n = \infty$, $\sum_{n=1}^{\infty} |\beta_{n+1}-\beta_n| < \infty$ を満たすとする．このとき

$$x_1 = x \in C, \quad x_{n+1} = \beta_n x + (1-\beta_n) W x_n \quad (n=1,2,\ldots)$$

で定義される点列 $\{x_n\}$ は $F(W)=\bigcap_{i=1}^{r} C_i$ の元に強収束する．

定理 5.5 E を Fréchet 微分可能なノルムをもつ一様凸な Banach 空間とし，C を E の閉凸集合とする．$C_1, C_2, \ldots, C_r$ を $\bigcap_{i=1}^{r} C_i \neq \phi$ となる C の r 個の nonexpansive retract とし，$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ を $0<\alpha_i<1$ $(i=1,2,\ldots,r-1)$, $0<\alpha_r \leqq 1$ となる r 個の実数とする．W を $P_1, P_2, \ldots, P_r$ と $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ によって生成される $W-$ 写像とする（ただし，P_i は C から C_i の上への nonexpansive retraction とする）．また $\beta_n \subset [0,1]$ は $0 \leqq \beta_n < 1$ $(n=1,2,\ldots)$, $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n(1-\beta_n) = \infty$ を満たすとする．このとき

$$x_1 = x \in C, \quad x_{n+1} = \beta_n x_n + (1-\beta_n) W x_n \quad (n=1,2,\ldots)$$

で定義される点列 $\{x_n\}$ は $F(W)=\bigcap_{i=1}^{r} C_i$ の元に弱収束する．

最近，上村–高橋 [17] は proximal point algorithm と関係するつぎの定理を得た．

定理 5.6 ([17]) H を Hilbert 空間とし，$A \subset H \times H$ を m-accretive 作用素とする．$x \in H$ に対して，点列 $\{x_n\}$ を $x_1 = x$ かつ

$$x_{n+1} = \alpha_n x + (1-\alpha_n) J_{r_n} x_n \quad (n=1,2,\ldots)$$

で定義する．ただし，$\{\alpha_n\} \subset [0,1]$ と $\{r_n\} \subset (0,\infty)$ は $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty$ および $\lim_{n\to\infty} r_n = \infty$ を満たすとする．このとき $A^{-1}0 \neq \phi$ ならば $\{x_n\}$ は $Px \in A^{-1}0$ に強収束する．ただし，P は H から $A^{-1}0$ の上への距離射影である．

上の定理 5.6 を Rockafellar [30] の定理と比較してみるとよい．

定理 5.7 ([17]) H を Hilbert 空間とし，$f: H \to (-\infty, \infty]$ を proper で下半連続な凸関数とする．$x \in H$ に対して，点列 $\{x_n\}$ を $x_1 = x$ および

$$x_{n+1} = \alpha_n x + (1-\alpha_n) J_{r_n} x_n \quad (n=1,2,\ldots),$$

$$J_{r_n} x_n = \arg\min \left\{ f(z) + \frac{1}{2r_n} \|z - x_n\|^2 : z \in H \right\}$$

で定義する．ただし $\{\alpha_n\} \subset [0,1]$ と $\{r_n\} \subset (0,\infty)$ は $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty$ および $\lim_{n\to\infty} r_n = \infty$ を満たすとする．もし $(\partial f)^{-1}0 \neq \phi$ ならば $\{x_n\}$ は x に一番近い f の minimizer に強収束する．さらに

$$f(x_{n+1}) - f(v) \leqq \alpha_n(f(x) - f(v)) + \frac{1-\alpha_n}{r_n}\|J_{r_n}x_n - v\|\|J_{r_n}x_n - x_n\|$$

が成り立つ．

つぎの定理は Mann タイプの proximal point algorithm と関係するものである．

定理 5.8 ([17]) H を Hilbert 空間とし，$A \subset H \times H$ を m-accretive 作用素とする．$\{\alpha_n\} \subset [0,1]$ と $\{r_n\} \subset (0,\infty)$ を $\limsup_{n\to\infty} \alpha_n < 1$ および $\liminf_{n\to\infty} r_n > 0$ を満たすとする．このとき，$x_1 = x \in H$ に対して，点列 $\{x_n\}$ を

$$x_{n+1} = \alpha_n x_n + (1-\alpha_n)J_{r_n}x_n \quad (n = 1, 2, \dots)$$

で定義する．もし $A^{-1}0 \neq \emptyset$ ならば $\{x_n\}$ は $A^{-1}0$ の元に弱収束する．

つぎは，Mann タイプの proximal point algorithm である．

定理 5.9 ([17]) H を Hilbert 空間とし，$f : H \to (-\infty, \infty]$ を proper で下半連続な凸関数とする．このとき，$x \in H$ に対して，点列 $\{x_n\}$ を $x_1 = x$ および

$$x_{n+1} = \alpha_n x_n + (1-\alpha_n)J_{r_n}x_n \quad (n = 1, 2, \dots)$$
$$J_{r_n}x_n = \arg\min\left\{f(z) + \frac{1}{2r_n}\|z - x_n\|^2 : z \in H\right\}$$

で定義する．ただし，$\{\alpha_n\} \subset [0,1]$ と $\{r_n\} \subset (0,\infty)$ は $\alpha_n \in [0,k]$ $(0 < k < 1)$ および $\lim_{n\to\infty} r_n = \infty$ を満たすとする．もし $(\partial f)^{-1}0 \neq \phi$ ならば $\{x_n\}$ は f の minimizer に弱収束する．さらに，

$$f(x_{n+1}) - f(v) \leqq \alpha_n(f(x_n) - f(v)) + \frac{1-\alpha_n}{r_n}\|J_{r_n}x_n - v\|\|J_{r_n}x_n - x_n\|$$

が成り立つ．

REFERENCES

1. S. Atsushiba, A. T. Lau and W. Takahashi, Nonlinear strong ergodic theorems for commutative nonexpansive semigroups on strictly convex Banach spaces, *J. Nonlinear and Convex Anal.*, **1** (2000), 213-231

2. S. Atsushiba, N. Shioji and W. Takahashi, Approximating common fixed points by the Mann iteration process in Banach spaces, *J. Nonlinear and Convex Anal.*, to appear.

3. S. Atsushiba and W. Takahashi, Strong convergence theorems for a finite family of nonexpansive mappings and applications, *Indian J. Math.*, to appear.

4. S. Atsushiba and W. Takahashi, A nonlinear strong ergodic theorem for nonexpansive mappings with compact domains, *Math. Japonica*, **52** (2000), 183-195.

5. S. Atsushiba and W. Takahashi, Strong convergence theorem for one-parameter nonexpansive semigroups with compact domains, *in Nonlinear Analysis and Its Applications (S.P. Singh and B. Watson, Eds.)*, Marecel Dekker Inc., to appear.

6. J. B. Baillon, Un théorème de type ergodic pour les contraction non linéaires dans un espace de Hilbert, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **280** (1975), 1511-1514.

7. H. Brèzis, *Opérateurs maximaux monotones*, Mathematics Studies No.5, North-Holland, Amsterdam, 1973.

8. R. E. Bruck, A simple proof of the mean ergodic theorem for nonlinear contractions in Banach spaces, *Israel J. Math.*, **32** (1979), 107-116.

9. G. Crombez, Image recovery by convex combinations of projections, *J. Math. Anal. Appl.*, **155** (1991), 413-419

10. C. M. Dafermos and M. Slemrod, Asymptotic behavior of nonlinear contraction semigroups, *J. Funct.* Anal., **13** (1973), 97-106.

11. M. M. Day, Amenable semigroups, *Illinois J. Math.*, **1** (1957), 509-544.

12. J. Diestel, *Geometry of Banach spaces, Selected Topics*, Lecture Notes in Mathematics 485, Springer, Berlin, 1975.

13. M. Edelstein, On non-expansive mappings of Banach spaces, *Proc. Camb. Phil. Soc.*, **60** (1964), 439-447.

14. B. Halpern, Fixed points of nonexpanding maps, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **73** (1967), 957-961.

15. N. Hirano, K. Kido and W. Takahashi, Nonexpansive retractions and nonlinear ergodic theorems in Banach spaces, *Nonlinear Analysis*, **12** (1988), 1269-1281.

16. S.Kamimura and W.Takahashi, Iterative schemes for approximating solutions of accretive operators in Banach spaces, *Scientiae Mathematicae*, **3** (2000), 107-115.

17. S. Kamimura and W. Takahashi, Approximating solutions of maximal monotone operators in Hilbert spaces, *J. Approximation Theory*, to appear.

18. S. Kamimura and W. Takahashi, Weak and strong convergence to solutions of accretive operator inclusions and applications, *Set-Valued Analysis*, to appear.

19. S. Kitahara and W. Takahashi, Image recovery by convex combinations of sunny nonexpansive retractions, *Topol. Methods Nonlinear Analysis*, **2** (1993), 333-342.

20. A. T. Lau, K. Nishiura and W. Takahashi, Nonlinear ergodic theorems for semigroups of nonexpansive mappings and left ideals, *Nonlinear Analysis*, **26** (1996), 1411-1427.

21. A. T. Lau, N. Shioji and W. Takahashi, Existence of nonexpansive retractions for amenable semigroups of nonexpansive mappings and nonlinear ergodic theorems in Banach spaces, *J. Funct. Anal.*, **161** (1999), 62-75.

22. A. T. Lau and W. Takahashi, Weak convergence and non-linear ergodic theorems for reversible semigroups of nonexpansive mappings, *Pacific J. Math.*, **126** (1987), 277-294.

23. W. R. Mann, Mean value methods in iteration, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **4** (1953), 506-510.

24. B. Martinet, Regularisation, d'inèquations variationelles par approximations succesives, *Revue Francaise d'Informatique et de Recherche Operationelle*, (1970), 154-159.

25. T. Mitchell, Topological semigroups and fixed points, *Illinois J. Math.*, **14** (1970), 630-641.

26. J. J. Moreau, Proximité et dualité dans un espace Hilbertien, *Bull. Soc. Math., France*, **93** (1965), 273-299.

27. Z. Opial, Weak convergence of the sequence of successive approximations for nonexpansive mappings, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **73** (1967), 591-597.

28. S. Reich, Weak convergence theorems for nonexpansive mappings in Banach spaces, *J. Math. Anal. Appl.*, **67** (1979), 274-276.

29. S. Reich, Strong convergence theorems for resolvents of accretive operators in Banach spaces, *J. Math. Anal. Appl.*, **75** (1980), 287-292.

30. R. T. Rockafellar, Monotone operators and the proximal point algorithm, *SIAM J. Control Optim.*, **14** (1976), 877-898.

31. G. Rodé, An ergodic theorem for semigroups of nonexpansive mappings in a Hilbert space, *J. Math. Anal. Appl.*, **85** (1982), 172-178.

32. T. Shimizu and W. Takahashi, Strong convergence to common fixed points of families of nonexpansive mappings, *J. Math. Anal. Appl.*, **211** (1997), 71-83.

33. N. Shioji and W. Takahashi, Strong convergence of approximated sequence for nonexpansive mappings in Banach spaces, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **125** (1997), 3641-3645.

34. N. Shioji and W. Takahashi, Strong convergence theorems for asymptotically nonexpansive semigroups in Banach spaces, *J. Nonlinear and Convex Anal.*, **1** (2000), 73-87.

35. W. Takahashi, A nonlinear ergodic theorem for an amenable semigroup of nonexpansive mappings in a Hilbert space, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **81** (1981), 253-256.

36. W. Takahashi, A nonlinear ergodic theorem for a reversible semigroup of nonexpansive mappings in a Hilbert space, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **97** (1986), 55-58.

37. W. Takahashi, *Nonlinear Functional Analysis (Japanese)* , Kindaikagakusha, Tokyo, 1988.

38. W. Takahashi, Fixed point theorem and nonlinear ergodic theorem for nonexpansive semigroups without convexity, *Can. J. Math.*, **44** (1992), 880-887.

39. W. Takahashi, Fixed point theorems and nonlinear ergodic theorems for nonlinear semigroups and their applications, *Nonlinear Analysis*, **30** (1997), 1283-1293.

40. W. Takahashi, *Convex Analysis and Approximation of Fixed Points(Japanese)*, Yokohama Publishers, yokohama, 2000.

41. W. Takahashi and G. E. Kim, Approximating fixed points of nonexpansive mappings in Banach spaces, *Math. Japonica*, **48** (1998), 1-9.

42. W. Takahashi and K. Shimoji, Convergence theorems for nonexpansive mappings and feasibility problems, *Mathematical and Computer Modelling*, to appear.

43. W. Takahashi and T. Tamura, Limit theorems of operators by convex combinations of nonexpansive retractions in Banach spaces, *J. Approximation Theory*, **91** (1997), 386-397.

44. W. Takahashi and T. Tamura, Convergence theorems for a pair of nonexpansive mappings, *J. Convex Analysis*, **5** (1998), 45-56.

45. W. Takahashi and Y. Ueda, On Reich's strong convergence theorems for resolvents of accretive operators, *J. Math. Anal. Appl.*, **104** (1984), 546-553.

46. R. Wittmann, Approximation of fixed points of nonexpansive mappings, *Arch. Math.*, **58** (1992), 486-491.