

非線形写像の強収束定理とその応用

東工大大学院情報理工学研究科
中條一秀 (Kazuhide Nakajo)

1 はじめに

E を狭義凸な実 Banach 空間とし、 C を E の空でないコンパクト凸集合とする。 T を C から C への nonexpansive 写像とすると、 C の元 x に対して、 ω -limit set $\omega(x)$ とは $\omega(x) = \{y \in C \mid y = \lim_{i \rightarrow \infty} T^{n_i}x \text{ with } n_i \rightarrow \infty \text{ as } i \rightarrow \infty\}$ で定義される。Edelstein [6] は、 $\omega(x)$ の閉凸包 $\overline{co}\omega(x)$ の任意の元 ξ に対して、Cesàro mean $\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} T^i \xi$ は、 T の不動点に強収束することを示した。この結果を、厚芝-高橋 [1] は C の任意の元 ξ に対して示し、拡張した。他方 $S = \{S(t) \mid t \geq 0\}$ を、 C 上の nonexpansive semigroup とするとき、 C の元 x に対して ω -limit set とは $\omega(x) = \{y \in C \mid y = \lim_{n \rightarrow \infty} S(t_n)x \text{ with } t_n \rightarrow \infty \text{ as } n \rightarrow \infty\}$ で定義される。Dafermos-Slemrod [5] は、 $\overline{co}\omega(x)$ の任意の元 ξ に対して $\frac{1}{t} \int_0^t S(\tau)\xi d\tau$ が S の共通不動点に強収束することを示した。本論文では、この結果を C 上の asymptotically nonexpansive semigroup に拡張した結果を述べる。

2 準備

本論文を通して Banach 空間は実 Banach 空間として、 \mathbf{N} は正の整数全体の集合、 R^+ は 0 以上の実数全体の集合を表すものとする。 $\Delta^n = \{\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \mid \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1\}$ (n は正の整数) とする。Banach 空間 E が狭義凸であるとは、 $\|x\| = \|y\| = 1 (x \neq y)$ ならば $\|\frac{x+y}{2}\| < 1$ となることをいう。Banach 空間 E の部分集合 C に対して coC で、 C の凸包を表すとし、さらに $r > 0$ として、 $D_r(x)$ で中心 x 、半径 r の E での開球を表すとする。そして T を C から C への写像として $F_r(T) = \{x \in C \mid \|x - Tx\| \leq r\}$ と定める。 $K > 0$ として、 $Lip(C, K) = \{T : C \rightarrow C \mid \|Tx - Ty\| \leq K\|x - y\| \forall x, y \in C\}$ と定め、 $Lip(C, 1)$ の要素 T は C 上の nonexpansive

写像であるといわれる。また、凸関数 $\gamma: R^+ \rightarrow R^+$ のうち、 $\gamma(0) = 0$ 、狭義増加、連続であるもの全体を、 Γ で表すとす。Banach 空間 E の部分集合 C が convex approximation property をもつとは、任意の正数 ε に対して、正の整数 m が存在して、 $coM \subset co_m M + D_\varepsilon(0)$ ($\forall M \subset C$) が成り立つことである。但し、 $co_m M = \{\sum_{i=1}^m \lambda_i x_i \mid x_i \in M, \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^m \lambda_i = 1\}$ と定める。 C を Banach 空間 E の部分集合として、 C 上で定義された写像の族 $\mathcal{S} = \{S(t) \mid t \geq 0\}$ が、次を満たすならば、 C 上の Lipschitz constants $\{k(t) \mid t \geq 0\}$ をもつた asymptotically nonexpansive semigroup であるという。

(i) $t \mapsto k(t)$ は R^+ から R^+ への連続な関数;

(ii) $\limsup_{t \rightarrow \infty} k(t) \leq 1$;

(iii) 任意の $t \geq 0$ に対して、

$$S(t) : C \rightarrow C \text{ かつ } \|S(t)x - S(t)y\| \leq k(t)\|x - y\| \quad (\forall x, y \in C);$$

(iv) $S(t+s)x = S(t)S(s)x$ ($\forall t, s \geq 0, x \in C$);

(v) $S(0)x = x$ ($\forall x \in C$);

(vi) 任意の $x \in C$ に対して、 $t \mapsto S(t)x$ は連続である。

\mathcal{S} が C 上の asymptotically nonexpansive semigroup であるとは R^+ の部分集合 $\{k(t) \mid t \geq 0\}$ が存在して、 \mathcal{S} が C 上の Lipschitz constants $\{k(t) \mid t \geq 0\}$ をもつた asymptotically nonexpansive semigroup となることである。特に、 $k(t) = 1$ ($\forall t \geq 0$) のとき、 \mathcal{S} は nonexpansive semigroup であるという。 $\mathcal{S} = \{S(t) \mid t \geq 0\}$ の共通不動点の集合を $F(\mathcal{S})$ で表す。即ち $F(\mathcal{S}) = \bigcap_{t \geq 0} \{x \in C \mid S(t)x = x\}$ 。次の補助定理 2.1, 2.2 は、Bruck [2] [3] によつて示された。

補助定理 2.1 C を狭義凸 Banach 空間の空でないコンパクト凸集合とする。このとき $\gamma \in \Gamma$ が存在して以下を満たす。任意の $K > 0$ と $T \in Lip(C, K)$ に対して、 $\|T(\lambda x + (1-\lambda)y) - (\lambda Tx + (1-\lambda)Ty)\| \leq K\gamma^{-1}(\|x - y\| - \frac{1}{K}\|Tx - Ty\|)$ ($\forall x, y \in C, \lambda \in [0, 1]$) が成り立つ。

補助定理 2.2 C を狭義凸 Banach 空間の空でないコンパクト凸集合とする。このとき、任意の正の整数 p に対して $\gamma_p \in \Gamma$ が存在して以下を満たす。任意の $K > 0$ と $T \in Lip(C, K)$ に対して、 $\|T(\sum_{i=1}^p \lambda_i x_i) - \sum_{i=1}^p \lambda_i Tx_i\| \leq K\gamma_p^{-1}(\max_{1 \leq i, j \leq p} \{\|x_i - x_j\| - \frac{1}{K}\|Tx_i - Tx_j\|\})$ ($\forall x_1, x_2, \dots, x_p \in C, \lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p) \in \Delta^p$) が成り立つ。

次の補助定理は、厚芝-高橋 [1] のアイデアを用いて示すことができる。

補助定理 2.3 C を狭義凸 Banach 空間の空でないコンパクト凸集合とし、 $\mathcal{S} = \{S(t) | t \geq 0\}$ を C 上の *asymptotically nonexpansive semigroup* とする。 $x \in C$, $t > 0$ として、任意の $\varepsilon > 0$ に対して、 $l_0 = l_0(t, \varepsilon) \geq 0$ と $m_0 = m_0(t, \varepsilon) \geq 0$ が存在して

$$\left\| \frac{1}{t} \int_0^t S(l+m+\tau)x d\tau - S(l) \left(\frac{1}{t} \int_0^t S(m+\tau)x d\tau \right) \right\| < \varepsilon$$

($\forall l \geq l_0, m \geq m_0$) を満たす。

証明: $x \in C, t > 0, \varepsilon > 0$ とする。 $\{k(t) | t \geq 0\}$ を \mathcal{S} の Lipschitz constants とする。 $\sup\{k(t) | t \geq 0\} = M_0$ とおく。 $\{k(t) | t \geq 0\}$ は有界なので、 $M_0 < \infty$ とわかる。そして、

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{1}{t} \int_0^t S(l+m+\tau)x d\tau - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n S\left(l+m+\frac{t}{n}i\right)x \right\| \\ & \leq \frac{M_0}{t} \sum_{i=1}^n \int_{\frac{i-1}{n}t}^{\frac{i}{n}t} \|S(\tau)x - S\left(\frac{t}{n}i\right)x\| d\tau \\ & \leq M_0^2 \cdot \sup_{0 \leq \tau \leq \frac{t}{n}} \|S(\tau)x - S\left(\frac{t}{n}\right)x\| \quad (\forall l, m \geq 0, n \in \mathbf{N}) \end{aligned}$$

が成り立つ。同様に、

$$\begin{aligned} & \left\| S(l) \left(\frac{1}{t} \int_0^t S(m+\tau)x d\tau \right) - S(l) \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n S\left(m+\frac{t}{n}i\right)x \right) \right\| \\ & \leq M_0^3 \cdot \sup_{0 \leq \tau \leq \frac{t}{n}} \|S(\tau)x - S\left(\frac{t}{n}\right)x\| \quad (\forall l, m \geq 0, n \in \mathbf{N}) \end{aligned}$$

が成り立つ。よつて、正の整数 N_1 が存在して、

$$\left\| \frac{1}{t} \int_0^t S(l+m+\tau)x d\tau - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n S\left(l+m+\frac{t}{n}i\right)x \right\| < \frac{\varepsilon}{3}$$

かつ

$$\begin{aligned} & \left\| S(l) \left(\frac{1}{t} \int_0^t S(m+\tau)x d\tau \right) - S(l) \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n S\left(m+\frac{t}{n}i\right)x \right) \right\| < \frac{\varepsilon}{3} \\ & (\forall l, m \geq 0, n \geq N_1) \end{aligned}$$

が成り立つ。よつて、

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{1}{t} \int_0^t S(l+m+\tau)x d\tau - S(l) \left(\frac{1}{t} \int_0^t S(m+\tau)x d\tau \right) \right\| \\ & \leq \frac{2}{3}\varepsilon + \left\| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n S\left(l+m+\frac{t}{n}i\right)x - S(l) \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n S\left(m+\frac{t}{n}i\right)x \right) \right\| \end{aligned} \quad (1)$$

($\forall l, m \geq 0, n \geq N_1$)

が成り立つ。 $n \geq N_1$ を固定して、 $k(l) > 0 (\forall l \geq 0)$ としても一般性を失わないので、補助定理 2.2 より、 $\gamma_n \in \Gamma$ が存在して、

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n S\left(l+m+\frac{t}{n}i\right)x - S(l) \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n S\left(m+\frac{t}{n}j\right)x \right) \right\| \\ & \leq k(l) \cdot \gamma_n^{-1} \left(\max_{1 \leq i, j \leq n} \left\{ \left\| S\left(m+\frac{t}{n}i\right)x - S\left(m+\frac{t}{n}j\right)x \right\| \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \frac{1}{k(l)} \left\| S\left(l+m+\frac{t}{n}i\right)x - S\left(l+m+\frac{t}{n}j\right)x \right\| \right\} \right) \quad (\forall l, m \geq 0) \end{aligned} \quad (2)$$

が成り立つ。一方、 $\gamma_n \in \Gamma$ より、正数 δ が存在して、

$$k(l)\gamma_n^{-1}(\delta) < \frac{\varepsilon}{3} \quad (\forall l \geq 0) \quad (3)$$

が成り立つ。そして、 $1 \leq i, j \leq n$ に対して、 $\limsup_{l \rightarrow \infty} k(l) \leq 1$ より、正数 $l_1 = l_1(i, j)$, $m_1 = m_1(i, j)$ が存在して

$$\begin{aligned} 0 & \leq \left\{ \left\| S\left(m+\frac{t}{n}i\right)x - S\left(m+\frac{t}{n}j\right)x \right\| \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{k(l)} \left\| S\left(l+m+\frac{t}{n}i\right)x - S\left(l+m+\frac{t}{n}j\right)x \right\| \right\} \leq \delta \\ & \quad (\forall l \geq l_1, m \geq m_1) \end{aligned}$$

が成り立つ。 $l_0 = \max\{l_1(i, j) | 1 \leq i, j \leq n\}$, $m_0 = \max\{m_1(i, j) | 1 \leq i, j \leq n\}$ として、

$$\begin{aligned} & \max_{1 \leq i, j \leq n} \left\{ \left\| S\left(m+\frac{t}{n}i\right)x - S\left(m+\frac{t}{n}j\right)x \right\| \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{k(l)} \left\| S\left(l+m+\frac{t}{n}i\right)x - S\left(l+m+\frac{t}{n}j\right)x \right\| \right\} \leq \delta \end{aligned} \quad (4)$$

$$(\forall l \geq l_0, m \geq m_0)$$

が成り立つ。以上(1),(2),(3),(4)より、

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{1}{t} \int_0^t S(l+m+\tau)x d\tau - S(l) \left(\frac{1}{t} \int_0^t S(m+\tau)x d\tau \right) \right\| \\ & \leq \frac{2}{3}\varepsilon + k(l)\gamma_n^{-1}(\delta) < \varepsilon \quad (\forall l \geq l_0, m \geq m_0) \end{aligned}$$

が成り立つ。 □

次の補助定理は、厚芝-高橋 [1] によつて示された。

補助定理 2.4 C を *Banach* 空間の空でないコンパクト集合とする。このとき C は *convex approximation property* をもつ。

次の補助定理は Bruck [3, Theorem 1.2] のアイデアをもちいて、補助定理 2.2, 2.4 より得られる。

補助定理 2.5 C を狭義凸 *Banach* 空間の空でないコンパクト凸集合とする。任意の $\varepsilon > 0$ に対して、 $\delta > 0$ が存在して、 $\overline{co}F_\delta(T) \subset F_\varepsilon(T)$ ($\forall T \in Lip(C, 1 + \delta)$) が成り立つ。

(証明): $R = diam C$ として、 $\varepsilon > 0$ とし、 ε_0 を、 $(3 + \varepsilon_0)\varepsilon_0 < \varepsilon$ を満たす正数とする。このとき、補助定理 2.4 より、正の整数 p が存在して、 C の任意の部分集合 M に対して、

$$coM \subset co_p M + D_{\varepsilon_0}(0) \tag{5}$$

を満たす。補助定理 2.2 を満たす $\gamma_p \in \Gamma$ に対して、正数 δ を $(1 + \delta)\gamma_p^{-1}(2\delta + \delta R) + \delta < \varepsilon_0$ となるように選ぶ。このとき、任意の $T \in Lip(C, 1 + \delta)$ に対して、 $co_p F_\delta(T) \subset F_{\varepsilon_0}(T)$ が成り立つ。これより (5) を用いて、 $coF_\delta(T) \subset F_{\varepsilon_0}(T) + D_{\varepsilon_0}(0)$ が成り立つ。よつて、 $coF_\delta(T) \subset F_\varepsilon(T)$ が成り立ち、 $\overline{co}F_\delta(T) \subset F_\varepsilon(T)$ を得る。 □

次の補助定理も Bruck [2, Lemma 1.5] の手法を用いて示せる。

補助定理 2.6 C を *Banach* 空間の空でない有界閉凸集合とし、 $\gamma \in \Gamma$, $L \geq 1$ として、 $T \in Lip(C, L)$ は $\|T(\lambda x + (1 - \lambda)y) - (\lambda Tx + (1 - \lambda)Ty)\| \leq L\gamma^{-1}(\|x - y\| - \frac{1}{L}\|Tx - Ty\|)$ ($\forall x, y \in C, \lambda \in [0, 1]$) を満たすものとする。そして、 C の点列 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ と R^+ の数列 $\{a_n\}$ が $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \|x_{i+1} - Tx_i\| \leq$

a_n ($\forall n \in \mathbf{N}$), $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \|y_{i+1} - Ty_i\| \leq a_n$ ($\forall n \in \mathbf{N}$) を満たすとき、任意の $\lambda \in [0, 1]$ と $n \in \mathbf{N}$ に対して、 $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \|\lambda x_{i+1} + (1-\lambda)y_{i+1} - T(\lambda x_i + (1-\lambda)y_i)\| \leq L\gamma^{-1}(\frac{R}{n} + (L-1)R + 2a_n) + a_n$ が成り立つ。但し、 $R = \text{diam } C$ とする。

(証明): $n \in \mathbf{N}$, $\lambda \in [0, 1]$ とし、

$$\begin{aligned} & \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \|\lambda x_{i+1} + (1-\lambda)y_{i+1} - T(\lambda x_i + (1-\lambda)y_i)\| \\ & \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \|\lambda Tx_i + (1-\lambda)Ty_i - T(\lambda x_i + (1-\lambda)y_i)\| + a_n \\ & \leq L\gamma^{-1} \left(\frac{1}{n} (\|x_1 - y_1\| - \|x_{n+1} - y_{n+1}\|) + (L-1)R \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \|x_{i+1} - Tx_i\| + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \|y_{i+1} - Ty_i\| \right) + a_n \\ & \leq L\gamma^{-1} \left(\frac{R}{n} + (L-1)R + 2a_n \right) + a_n \quad \text{を得る。} \end{aligned}$$

□

次の補助定理は、Bruck[2, Theorem1.1] の手法を利用して、補助定理 2.1, 2.5, 2.6 を用いて示せる。

補助定理 2.7 C を狭義凸 Banach 空間の空でないコンパクト凸集合とする。このとき、任意の $\varepsilon > 0$ に対して、 $\delta > 0$ と $N_0 \in \mathbf{N}$ が存在して、以下をみたす。任意の $T \in \text{Lip}(C, 1+\delta)$ と $\|x_{n+1} - Tx_n\| \leq \delta$ ($\forall n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$) を満たす C の任意の点列 $\{x_n\}$ に対して、 $\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} x_i \in F_\varepsilon(T)$ ($\forall n \geq N_0$) が成り立つ。

(証明): $R = \text{diam } C$ とする。 $\varepsilon > 0$ として、正数 ε_0 を $(3 + \varepsilon_0)\frac{\varepsilon_0}{3} < \varepsilon$ となるように選ぶ。補助定理 2.5 より、 $\eta > 0$ が存在して、任意の $T \in \text{Lip}(C, 1+\eta)$ に対して、 $\text{co}F_\eta(T) \subset F_{\frac{\varepsilon_0}{3}}(T)$ をみたし、 $\eta < \frac{\varepsilon_0}{6R}$ となるようにとる。さらに $p \in \mathbf{N}$ を $R < \frac{p\eta^2}{2}$ となるようにとる。補助定理 2.1 をみたす $\gamma \in \Gamma$ に対して、 $q(t) = (1+t)\gamma^{-1}(Rt+2t) + t$ ($t \geq 0$) と定義して、 $\delta > 0$ を、 $q^{p-1}(\delta) < \frac{\eta^2}{2}$ かつ $\delta < \eta$ となるように取れる。さらに、 $n \in \mathbf{N}$ に対して、 $q_n(t) = (1+t)\gamma^{-1}(\frac{R}{n} + Rt + 2t) + t$ ($t \geq 0$) と定義して、正の整数 $N_0 \geq p$ を、 $q_n^{p-1}(\delta) < \frac{\eta^2}{2}$ かつ $\frac{p}{2n}R < \frac{\varepsilon_0}{6}$ ($\forall n \geq N_0$) を満たすように取れる。 $T \in \text{Lip}(C, 1+\delta)$, $\|x_{n+1} - Tx_n\| \leq \delta$ ($\forall n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$)

として、 $w_i = \frac{1}{p} \sum_{j=0}^{p-1} x_{i+j}$ として、補助定理 2.6 より、

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \|w_i - Tw_i\| &\leq \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \|w_{i+1} - Tw_i\| + \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \|w_{i+1} - w_i\| \quad (6) \\ &\leq q_n^{p-1}(\delta) + \frac{R}{p} \leq \frac{\eta^2}{2} + \frac{\eta^2}{2} = \eta^2 \quad (\forall n \geq N_0) \end{aligned}$$

を得る。 $n \in \mathbf{N}$ として、 $A(n) = \{i \in \mathbf{N} \mid 0 \leq i \leq n-1, \|w_i - Tw_i\| \geq \eta\}$, $B(n) = \{0, 1, 2, \dots, n-1\} \setminus A(n)$ と定めて、(6) より、

$$\frac{\#A(n)}{n} \leq \eta \quad (\forall n \geq N_0) \quad (7)$$

を得る。 $f \in F(T)$ として、

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} x_i &= \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} w_i + \frac{1}{np} \sum_{i=1}^{p-1} (p-i)(x_{i-1} - x_{n+i-1}) \\ &= \left(\frac{1}{n} \cdot \#A(n)f + \frac{1}{n} \sum_{i \in B(n)} w_i \right) \\ &\quad + \frac{1}{n} \sum_{i \in A(n)} (w_i - f) + \frac{1}{np} \sum_{i=1}^{p-1} (p-i)(x_{i-1} - x_{n+i-1}) \end{aligned}$$

ここで、

$$\frac{1}{n} \cdot \#A(n)f + \frac{1}{n} \sum_{i \in B(n)} w_i \in \overline{\text{co}}F_\eta(T)$$

次に (7) より、

$$\left\| \frac{1}{n} \sum_{i \in A(n)} (w_i - f) \right\| \leq \frac{\#A(n)}{n} R < \frac{\varepsilon_0}{6} \quad (\forall n \geq N_0)$$

そして、

$$\left\| \frac{1}{np} \sum_{i=1}^{p-1} (p-i)(x_{i-1} - x_{n+i-1}) \right\| \leq \frac{R}{np} \cdot \frac{p(p-1)}{2} < \frac{\varepsilon_0}{6} \quad (\forall n \geq N_0)$$

よつて、

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} x_i &\in \overline{\text{co}}F_\eta(T) + D_{\frac{\varepsilon_0}{6}}(0) + D_{\frac{\varepsilon_0}{6}}(0) \\ &\subset F_{\frac{\varepsilon_0}{3}}(T) + D_{\frac{\varepsilon_0}{3}}(0) \subset F_\varepsilon(T) \quad (\forall n \in N_0) \end{aligned}$$

を得る。 \square

次の補助定理は、塩路-高橋 [8, Theorem3] の手法を用いて補助定理 2.5, 2.7 より示せる。

補助定理 2.8 C を狭義凸 Banach 空間の空でないコンパクト凸集合とする。このとき、任意の正数 ε に対して、 $\delta > 0$ と $N_0 \in \mathbf{N}$ が存在して、以下を満たす。任意の $l \in \mathbf{N}$ と $T^l \in Lip(C, 1 + \delta)$ を満たす任意の C から C への写像 T に対して、 $\|\frac{1}{m} \sum_{i=0}^{m-1} T^i x - T^l(\frac{1}{m} \sum_{i=0}^{m-1} T^i x)\| \leq \varepsilon$ ($\forall m \geq lN_0 + 1, x \in C$) が成り立つ。

(証明): $\varepsilon > 0$ とする。補助定理 2.5 より、 $\varepsilon_0 > 0$ が存在して、任意の $l \in \mathbf{N}$ と $T^l \in Lip(C, 1 + \varepsilon_0)$ を満たす任意の C から C への写像 T に対して、 $\overline{\text{co}}F_{\varepsilon_0}(T^l) \subset F_{\varepsilon_0}(T^l)$ が成り立つ。さらに、補助定理 2.7 より、 $\eta > 0$ と $N_0 \in \mathbf{N}$ が存在して、任意の $l \in \mathbf{N}$ と $T^l \in Lip(C, 1 + \eta)$ を満たす任意の C から C への写像 T に対して、 $\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} T^{il} x \in F_{\varepsilon_0}(T^l)$ ($\forall n \geq N_0, x \in C$) が成り立つ。 $\delta = \min\{\varepsilon_0, \eta\}$ とする。 $l \in \mathbf{N}$ 、 C から C への写像 T は $T^l \in Lip(C, 1 + \delta)$ を満たすとする。上のことより、 $\overline{\text{co}}F_{\varepsilon_0}(T^l) \subset F_{\varepsilon}(T^l)$ と $\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} T^{il} x \in F_{\varepsilon_0}(T^l)$ ($\forall n \geq N_0, x \in C$) が成り立つ。 $m - 1 \geq lN_0$ とする。 $n \in \mathbf{N}$ と $s \in \{0, 1, 2, \dots, l-1\}$ を $m - 1 = ln + s$ となるように選ぶと、 $n \geq N_0$ とわかる。 $s \in \{0, 1, 2, \dots, l-2\}$ のとき、

$$\begin{aligned} & \frac{1}{m} \sum_{i=0}^{m-1} T^i x \\ &= \frac{n+1}{m} \sum_{j=0}^s \left(\frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n T^{il+j} x \right) + \frac{n}{m} \sum_{j=s+1}^{l-1} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} T^{il+j} x \right) \\ & \in \overline{\text{co}}F_{\varepsilon_0}(T^l) \subset F_{\varepsilon}(T^l) \quad (\forall m \geq lN_0 + 1, x \in C) \end{aligned}$$

を得る。また $s = l - 1$ のときも同様にして結論を得る。 \square

この補助定理の直接の系として以下を得る。

系 2.9 C を狭義凸 Banach 空間の空でないコンパクト凸集合として、 $\mathcal{S} = \{S(t) | t \geq 0\}$ を C 上の *asymptotically nonexpansive semigroup* とする。このとき、 $\limsup_{l \rightarrow \infty} \limsup_{t \rightarrow \infty} \sup_{x \in C} \left\| \frac{1}{t} \int_0^t S(\tau) x d\tau - S(l) \left(\frac{1}{t} \int_0^t S(\tau) x d\tau \right) \right\| = 0$ が成り立つ。

(注意) 系 2.9 より、 $F(\mathcal{S}) \neq \emptyset$ であることを得る。実際に、 $x \in C$ 、 $x_t = \frac{1}{t} \int_0^t S(\tau) x d\tau$ ($t > 0$) とおく。 C がコンパクトなので、 $\{x_t\}$ の部分ネッ

ト $\{x_{t_\alpha}\}$ が存在して C の元 x_0 に強収束する。よつて、

$$\begin{aligned} 0 &= \limsup_{l \rightarrow \infty} \limsup_{t \rightarrow \infty} \|x_t - S(l)x_t\| \\ &= \limsup_{l \rightarrow \infty} \limsup_{\alpha} \|x_{t_\alpha} - S(l)x_{t_\alpha}\| = \limsup_{l \rightarrow \infty} \|x_0 - S(l)x_0\| \end{aligned}$$

が成り立ち、このことより $x_0 \in F(\mathcal{S})$ を得る。

3 強収束定理

次の補助定理は、本質的な役割を持つ。

補助定理 3.1 C を狭義凸 Banach 空間の空でないコンパクト凸集合とし、 $\mathcal{S} = \{S(t) | t \geq 0\}$ を C 上の *asymptotically nonexpansive semigroup* として、 $x \in C$ とする。このとき、 R^+ 上でのネット $\{i_t\}_{t \geq 0}$ が存在して、任意の $z \in F(\mathcal{S})$ に対して、 $\lim_{t \rightarrow \infty} \left\| \frac{1}{t} \int_0^t S(\tau + i_t)x d\tau - z \right\|$ が存在する。

(証明): 厚芝-高橋 [1] の手法をもちいる。 $x \in C$ とする。補助定理 2.3 より、 R^+ 上でのネット $\{i_t\}_{t \geq 0}$, $\{l_t\}_{t \geq 0}$ が存在して、

$$\left\| \frac{1}{t} \int_0^t S(l + i + \tau)x d\tau - S(l) \left(\frac{1}{t} \int_0^t S(i + \tau)x d\tau \right) \right\| < \frac{1}{t} \quad (8)$$

($\forall t > 0, i \geq i_t, l \geq l_t$) を満たす。 $z \in F(\mathcal{S})$ として、 $s, t > 0$ に対して、

$$\begin{aligned} I &= \left\| \frac{1}{s} \int_0^s S(i_s + i_t + \tau)x d\tau - z \right\| \\ &= \left\| \frac{1}{s} \int_0^s \left(\frac{1}{t} \int_0^t S(\tau + \sigma + i_s + i_t)x d\sigma \right) d\tau + \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{st} \int_0^t (t - \tau) \{S(\tau + i_t + i_s)x - S(s + \tau + i_s + i_t)x\} d\tau - z \right\|, \end{aligned}$$

$$I_1 = \left\| \frac{1}{st} \int_0^t (t - \tau) \{S(\tau + i_t + i_s)x - S(s + \tau + i_s + i_t)x\} d\tau \right\|,$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \left\| \frac{1}{s} \int_0^s \left(\frac{1}{t} \int_0^t S(\tau + \sigma + i_s + i_t)x d\sigma \right) d\tau \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{s} \int_0^s S(\tau + i_s) \left(\frac{1}{t} \int_0^t S(\sigma + i_t)x d\sigma \right) d\tau \right\| \end{aligned}$$

及び

$$I_3 = \left\| \frac{1}{s} \int_0^s S(\tau + i_s) \left(\frac{1}{t} \int_0^t S(\sigma + i_t)x d\sigma \right) d\tau - z \right\|.$$

を考えて、 $I \leq I_1 + I_2 + I_3$ を満たしている。 $R = \text{diam } C$ として、

$$I_1 \leq \frac{1}{st} \int_0^t (t - \tau) R d\tau = \frac{t}{2s} R \quad (\forall s, t > 0)$$

(8) より、

$$\begin{aligned} I_2 &\leq \frac{1}{s} \int_0^s \left\| \frac{1}{t} \int_0^t S(\tau + \sigma + i_s + i_t) x d\sigma \right. \\ &\quad \left. - S(\tau + i_s) \left(\frac{1}{t} \int_0^t S(\sigma + i_t) x d\sigma \right) \right\| d\tau \\ &\leq \frac{1}{s} \int_0^s \frac{1}{t} d\tau = \frac{1}{t} \quad (\forall t > 0, s > 0 \text{ s.t. } i_s \geq i_t) \end{aligned}$$

$z \in F(S)$ より、 $\{k(t) | t \geq 0\}$ を S の Lipschitz constants として、

$$\begin{aligned} I_3 &\leq \frac{1}{s} \int_0^s \left\| S(\tau + i_s) \left(\frac{1}{t} \int_0^t S(\sigma + i_t) x d\sigma \right) - z \right\| d\tau \\ &\leq \frac{1}{s} \int_0^s k(\tau + i_s) \left\| \frac{1}{t} \int_0^t S(\sigma + i_t) x d\sigma - z \right\| d\tau \\ &= \frac{1}{s} \int_0^s k(\tau + i_s) d\tau \cdot \left\| \frac{1}{t} \int_0^t S(\sigma + i_t) x d\sigma - z \right\| \quad (\forall s, t > 0) \end{aligned}$$

$\lim_{s \rightarrow \infty} I_1 = 0$ を用いて、

$$\begin{aligned} \limsup_{s \rightarrow \infty} \left\| \frac{1}{s} \int_0^s S(\tau + i_s) x d\tau - z \right\| &= \limsup_{s \rightarrow \infty} \left\| \frac{1}{s} \int_0^s S(\tau + i_s + i_t) x d\tau - z \right\| \\ &= \limsup_{s \rightarrow \infty} I \leq \limsup_{s \rightarrow \infty} (I_1 + I_2 + I_3) \\ &\leq \frac{1}{t} + \left\| \frac{1}{t} \int_0^t S(\sigma + i_t) x d\sigma - z \right\| \cdot \limsup_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{s} \int_0^s k(\tau + i_s) d\tau \\ &\leq \frac{1}{t} + \left\| \frac{1}{t} \int_0^t S(\sigma + i_t) x d\sigma - z \right\| \quad (\forall t > 0) \end{aligned}$$

が成り立ち、これより、

$$\limsup_{s \rightarrow \infty} \left\| \frac{1}{s} \int_0^s S(\tau + i_s) x d\tau - z \right\| \leq \liminf_{t \rightarrow \infty} \left\| \frac{1}{t} \int_0^t S(\sigma + i_t) x d\sigma - z \right\|$$

が成り立ち、 $\lim_{t \rightarrow \infty} \left\| \frac{1}{t} \int_0^t S(\tau + i_t) x d\tau - z \right\|$ が存在することがわかる。□

(注意) 補助定理3.1において、 R^+ 上でのネット $\{i_t\}_{t \geq 0}$ を $i_t' \geq i_t$ ($\forall t \geq 0$) を満たすようにとつても、任意の $z \in F(S)$ に対して、

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left\| \frac{1}{t} \int_0^t S(\tau + i_t) x d\tau - z \right\| = \lim_{t \rightarrow \infty} \left\| \frac{1}{t} \int_0^t S(\tau + i_t') x d\tau - z \right\|$$

が成り立つ。

定理 3.2 C を狭義凸 Banach 空間の空でないコンパクト凸集合とし、 $S = \{S(t) | t \geq 0\}$ を C 上の *asymptotically nonexpansive semigroup* とし、 $x \in C$ とする。このとき、 $\frac{1}{t} \int_0^t S(\tau + h) x d\tau$ は $h \geq 0$ について一様に S の共通不動点に強収束する。そして、 $Qx = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t S(\tau) x d\tau$ ($x \in C$) とすると、 Q は C から $F(S)$ への上への *nonexpansive* 写像であり $QS(t) = S(t)Q = Q$ ($\forall t \geq 0$)、 $Qx \in \overline{\text{co}}\{S(t)x | t \geq 0\}$ ($\forall x \in C$) をみたく。

(証明): 補助定理3.1より、 R^+ 上でのネット $\{i_t\}_{t \geq 0}$ が存在して、任意の $z \in F(S)$ に対して、

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left\| \frac{1}{t} \int_0^t S(\tau + i_t) x d\tau - z \right\| \quad (9)$$

が存在する。 $\Phi_t = \frac{1}{t} \int_0^t S(\tau + i_t) x d\tau$ とおくと、系2.9の(注意)と同様にして、部分ネット $\{\Phi_{i_\alpha}\}$ が存在して S の共通不動点 y_0 に強収束する。よつて、(9)より $\Phi_t \rightarrow y_0$ となる。補助定理3.1の(注意)より、 $\frac{1}{t} \int_0^t S(\tau + i_t + h) x d\tau$ が $h \geq 0$ について一様に y_0 に強収束することがわかる。よつて、 $\varepsilon > 0$ として、 $t_0 \geq 0$ が存在して、

$$\left\| \frac{1}{t} \int_0^t S(\tau + i_t + h) x d\tau - y_0 \right\| < \varepsilon \quad (\forall t \geq t_0, h \geq 0)$$

をみたくので、 $R = \text{diam } C$ として、

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{1}{t} \int_0^t S(\tau + h) x d\tau - y_0 \right\| \\ & \leq \frac{1}{t} \int_0^{i_s} \left\| \frac{1}{s} \int_0^s S(\tau + h + \sigma) x d\sigma - y_0 \right\| d\tau \\ & \quad + \frac{1}{t} \int_0^{t-i_s} \left\| \frac{1}{s} \int_0^s S(\tau + i_s + h + \sigma) x d\sigma - y_0 \right\| d\tau \\ & \quad + \frac{1}{ts} \int_0^s (s - \tau) \|S(\tau + h)x - S(t + \tau + h)x\| d\tau \\ & \leq \frac{i_s}{t} R + \frac{t - i_s}{t} \varepsilon + \frac{s}{2t} R \quad (\forall s \geq t_0, t \geq i_s, h \geq 0) \end{aligned}$$

ここで、 $\varepsilon > 0$ は任意なので、 $\frac{1}{t} \int_0^t S(\tau+h)x d\tau$ は $h \geq 0$ について一様に $y_0 \in F(S)$ に強収束する。そして、 $Qx = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t S(\tau)x d\tau$ ($x \in C$) は、 $\{k(t) | t \geq 0\}$ を S の Lipschitz constants として、

$$\left\| \frac{1}{t} \int_0^t S(\tau)x d\tau - \frac{1}{t} \int_0^t S(\tau)y d\tau \right\| \leq \|x - y\| \cdot \frac{1}{t} \int_0^t k(\tau) d\tau$$

が成り立つので、 C から $F(S)$ への上への nonexpansive 写像とわかる。その上 $QS(t) = S(t)Q = Q$ ($\forall t \geq 0$), $Qx \in \overline{\text{co}}\{S(t)x | t \geq 0\}$ ($\forall x \in C$) も成り立つ。□

4 応用

まず almost-orbit[2] について紹介する。

定義 4.1 C を Banach 空間の空でない集合として、 $S = \{S(t) | t \geq 0\}$ を C 上の nonexpansive semigroup として、 $u : [0, \infty) \rightarrow C$ を連続とする。このとき、 $\lim_{t \rightarrow \infty} (\sup_{h \geq 0} \|u(h+t) - S(h)u(t)\|) = 0$ を満たす u を S の almost-orbit という。

そして、定理 3.2 と同様にして次の結果を得る。

定理 4.2 C を狭義凸 Banach 空間の空でないコンパクト凸集合とし、 $S = \{S(t) | t \geq 0\}$ を C 上の nonexpansive semigroup として、 $u : [0, \infty) \rightarrow C$ を S の almost-orbit とする。このとき、 $\frac{1}{t} \int_0^t u(\tau+h) d\tau$ は $h \geq 0$ について一様に $F(S)$ の元に強収束する。

C を Banach 空間 E の空でない集合として、 $A : C \rightarrow 2^E$ を C 上の m -消散作用素としたとき、 A によつて生成された $\overline{D(A)}$ 上の nonexpansive semigroup $S = \{S(t) | t \geq 0\}$ が存在することが知られている [4]。そして、特に、 E を一様凸 Banach 空間とし、 A を E 上の m -消散作用素として、 $f \in L^1(0, \infty; E)$ とする。このとき、Cauchy 問題 $(\frac{d}{dt}u(t) \in Au(t) + f(t) (t \geq 0), u(0) = x_0 \in \overline{D(A)})$ の integral solution $u : [0, \infty) \rightarrow \overline{D(A)}$ は S の almost-orbit であることが知られている [7]。この integral solution の漸近的挙動に応用が考えられる。

参考文献

- [1] S.Atsumaha and W.Takahashi, *A nonlinear strong ergodic theorem for nonexpansive mappings with compact domains*, Math. Japonica, **52**(2000),183-195.
- [2] R.E.Bruck, *A simple proof of the mean ergodic theorem for nonlinear contractions in Banach spaces*, Israel J. Math.,**32**(1979),107-116.
- [3] R.E.Bruck, *On the convex approximation property and the asymptotic behavior of nonlinear contractions in Banach spaces*, Israel J. Math., **38**(1981),304-314.
- [4] M.G.Crandall and T.M.Liggett, *Generation of semigroups of nonlinear transformations on general Banach spaces*, Am. J. Math.,**93**(1971),265-298
- [5] C.M.Dafermos and M.Slemrod, *Asymptotic behavior of nonlinear contraction semigroups*, J. Funct. Anal.,**13**(1973),97-106.
- [6] M.Edelstein, *On non-expansive mappings of Banach spaces*, Proc. Camb. Phil. Soc., **60**(1964),439-447.
- [7] I.Miyadera and K.Kobayasi, *On the asymptotic behaviour of almost-orbits of nonlinear contraction semigroups in Banach spaces*, Nonlinear Analysis, **6**(1982),349- 365.
- [8] N.Shioji and W.Takahashi, *Strong convergence theorems for continuous semigroups in Banach spaces*, Math. Japonica, **50**(1999),57-66.