

# $W$ -mapping による収束定理と 制約可能性問題

下地 一也 (KAZUYA SHIMOJI)  
東京工業大学情報理工学研究科

## 1 Introduction

$C_1, C_2, \dots, C_n$  をその共通部分  $C_0$  が空でない Hilbert 空間  $H$  の閉凸集合とし, 距離射影  $P_i: H \rightarrow C_i (i = 1, 2, \dots, n)$  が与えられているものとする. これから  $C_0$  の元を求めるという問題は, 制約可能性問題と関係があり, 具体的な例で表現すると,  $H$  上で定義された  $r$  個の連続凸関数  $\{g_1, g_2, \dots, g_r\}: H \rightarrow \mathbf{R}$  と  $f: H \rightarrow \mathbf{R}$  が与えられたとき,

$$f(x_0) = \min_{x \in \bigcap_{i=1}^n C_i} f(x) = \alpha$$

となる  $x_0 \in C_0$  を見つけよ. という問題である. これは, function  $f$  から  $g_{n+1}$  と  $C_{n+1}$  を

$$g_{n+1} = f - \alpha, \\ C_{n+1} = \{x \in E : f(x) - \alpha \leq 0\}$$

作り出してみると,

$$x_0 \in \bigcap_{i=1}^{n+1} C_i$$

となる  $x_0 \in E$  を見つけよ. というシンプルな問題に帰着できる.

そこで, この  $x_0 \in E$  をどうやって見つけるか? という問題が上がるが, それに対して例えば, Crombez[2] は Hilbert 空間上で, 距離射影  $P_i$  と恒等写像  $I$  で構成された有限個のある写像族の convex combination によって弱収束するということを示し, しばらくして, 北原-高橋 [3] と高橋-田村 [11] はこれを uniformly convex な Banach 空間に拡張した.

また, nonexpansive 写像  $T$  による iteration scheme には, 代表的な iteration が 2 つあるが, それは Mann による iteration

$$x_0 = x \in H, \quad x_{n+1} = \alpha_n x_n + (1 - \alpha_n) T x_n \quad (n = 0, 1, \dots)$$

そして, Halpern による iteration

$$x_0 = x \in H, \quad x_{n+1} = \alpha_n x + (1 - \alpha_n) T x_n \quad (n = 0, 1, \dots)$$

これらによる点列でもって近似する方法がある.

厚芝-高橋 [1] は有限個の nonexpansive 写像によって生成された  $W$ -mapping による Halpern-type iteration で強収束定理による点列近似が与えられているが, 今回の発表は可算無限個の nonexpansive 写像による強収束定理を証明した.

## 2 Lemmas

$C$  を Banach 空間  $E$  の convex 集合とし,  $T_1, T_2, \dots$  を  $C$  から  $C$  自身への写像族,  $\alpha_1, \alpha_2, \dots$  を  $0 \leq \alpha_i \leq 1 (i = 1, 2, \dots)$  となる実数とする. その時, 任意の  $n \in \mathbb{N}$  に対して,  $W_n: C \rightarrow C$  を次のように定義する:

$$\begin{aligned} U_{n,n+1} &= I, \\ U_{n,n} &= \alpha_n T_n U_{n,n+1} + (1 - \alpha_n) I, \\ U_{n,n-1} &= \alpha_{n-1} T_{n-1} U_{n,n} + (1 - \alpha_{n-1}) I, \\ &\vdots \\ U_{n,k} &= \alpha_k T_k U_{n,k+1} + (1 - \alpha_k) I, \\ U_{n,k-1} &= \alpha_{k-1} T_{k-1} U_{n,k} + (1 - \alpha_{k-1}) I, \\ &\vdots \\ U_{n,2} &= \alpha_2 T_2 U_{n,3} + (1 - \alpha_2) I, \\ W_n = U_{n,1} &= \alpha_1 T_1 U_{n,2} + (1 - \alpha_1) I. \end{aligned}$$

このように定義した  $W_n$  を  $T_n, T_{n-1}, \dots, T_1$  と  $\alpha_n, \alpha_{n-1}, \dots, \alpha_1$  によって生成された  $W$ -mapping と呼ぶ.

$W$ -mapping を可算個の写像族に対しても定義できるようにするために, 次の Lemma を用意した.

**Lemma 2.1**  $C$  を *strictly convex Banach* 空間  $E$  の空でない *closed convex* 集合とする.  $T_1, T_2, \dots$  を  $C$  から  $C$  自身への *nonexpansive* 写像とし  $\bigcap_{i=1}^{\infty} F(T_i) \neq \emptyset$  を満たしているものとする.  $\alpha_1, \alpha_2, \dots$  を  $0 < \alpha_i \leq b < 1$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) を満たす実数とする. この時, 任意の  $x \in C$ ,  $k \in \mathbf{N}$  に対して,  $\lim_{n \rightarrow \infty} U_{n,k}x$  が存在する.

**Sketch of the proof.** かつてに  $x \in C$ ,  $w \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F(T_n)$  をとってくる. 一般性を失う事なしに,  $x \neq w$  と仮定してよい.  $k \in \mathbf{N}$  を固定しておく. 任意の  $n \in \mathbf{N}$  ( $n \geq k$ ) に対して,

$$\|U_{n+1,k}x - U_{n,k}x\| \leq \left( \prod_{i=k}^n \alpha_i \right) \|U_{n+1,n+1}x - U_{n,n+1}x\| \leq 2b^{n-k+2}\|x - w\|$$

任意の  $\varepsilon > 0$  に対して,  $n_0 \in \mathbf{N}$  ( $n_0 \geq k$ ) が存在して s.t.

$$b^{n_0-k+2} < \frac{\varepsilon(1-b)}{2\|x-w\|}.$$

とできる. すると, 任意の  $m, n$  ( $m > n > n_0$ ) に対して,

$$\|U_{m,k}x - U_{n,k}x\| \leq \sum_{j=n}^{m-1} \|U_{j+1,k}x - U_{j,k}x\| \leq 2\|x-w\| \sum_{j=n}^{m-1} b^{j-k+2} < \varepsilon.$$

これより  $\{U_{n,k}x\}$  は Cauchy 列, ゆえに  $\lim_{n \rightarrow \infty} U_{n,k}x$  が存在する. ■

上の Lemma より  $U_{\infty,k}$  ( $k \in \mathbf{N}$ ),  $W$  を次のように定義できる:

$$U_{\infty,k}x := \lim_{n \rightarrow \infty} U_{n,k}x,$$

$$Wx := \lim_{n \rightarrow \infty} W_n x = \lim_{n \rightarrow \infty} U_{n,1}x$$

for every  $x \in C$ . このような  $W$  を  $T_1, T_2, \dots$  と  $\alpha_1, \alpha_2, \dots$  から生成された *W-mapping* と呼ぶ.

**Lemma 2.2**  $C$  を *strictly convex Banach* 空間  $E$  の空でない *closed convex* 集合とする.  $T_1, T_2, \dots$  を  $C$  から  $C$  自身への *nonexpansive* 写像とし  $\bigcap_{i=1}^{\infty} F(T_i) \neq \emptyset$  を満たしているものとする.  $\alpha_1, \alpha_2, \dots$  を  $0 < \alpha_i \leq b < 1$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) を満たす実数とする. この時,  $F(W) = \bigcap_{i=1}^{\infty} F(T_i)$  となる.

**Sketch of the proof.**  $w \in \bigcap_{i=1}^{\infty} F(T_i)$  とする. その時, 明らかに任意の  $n, k \in \mathbf{N}$  ( $n \geq k$ ) に対して  $U_{n,k}w = w$  が成立する. よって, 任意の  $k \in \mathbf{N}$  に対して,  $U_{\infty,k}w = w$ . 特に  $Ww = U_{\infty,1}w = w$  であるから,

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} F(T_i) \subset F(W).$$

次に,

$$F(W) \subset \bigcap_{i=1}^{\infty} F(T_i).$$

を示す. かつてに  $x \in F(W)$ ,  $y \in \bigcap_{i=1}^{\infty} F(T_i)$  をとってくる.

$$\begin{aligned} & \|W_n x - W_n y\| \\ & \leq \left( \prod_{i=1}^{k-1} \alpha_i \right) \|\alpha_k (T_k U_{n,k+1} x - T_k U_{n,k+1} y) + (1 - \alpha_k)(x - y)\| \\ & \quad + \left( 1 - \prod_{i=1}^{k-1} \alpha_i \right) \|x - y\| \\ & \leq \left( \prod_{i=1}^k \alpha_i \right) \|T_k U_{n,k+1} x - T_k U_{n,k+1} y\| + \left( 1 - \prod_{i=1}^k \alpha_i \right) \|x - y\| \\ & \leq \|x - y\|. \end{aligned}$$

$n \rightarrow \infty$  とすると,

$$\begin{aligned} & \|Wx - Wy\| \\ & \leq \left( \prod_{i=1}^{k-1} \alpha_i \right) \|\alpha_k (T_k U_{\infty,k+1} x - T_k U_{\infty,k+1} y) + (1 - \alpha_k)(x - y)\| \\ & \quad + \left( 1 - \prod_{i=1}^{k-1} \alpha_i \right) \|x - y\| \\ & \leq \left( \prod_{i=1}^k \alpha_i \right) \|T_k U_{\infty,k+1} x - T_k U_{\infty,k+1} y\| + \left( 1 - \prod_{i=1}^k \alpha_i \right) \|x - y\| \\ & \leq \|x - y\|. \end{aligned}$$

$\|Wx - Wy\| = \|x - y\|$  であり任意の  $i \in \mathbf{N}$  に対して  $0 < \alpha_i < 1$  であるから, 任意の  $k \in \mathbf{N}$  に対して,

$$\begin{aligned} & \|\alpha_k (T_k U_{\infty,k+1} x - T_k U_{\infty,k+1} y) + (1 - \alpha_k)(x - y)\| \\ & = \|T_k U_{\infty,k+1} x - T_k U_{\infty,k+1} y\| = \|x - y\|. \end{aligned}$$

$E$  は strictly convex で,  $y \in \bigcap_{i=1}^{\infty} F(T_i)$  だから,

$$x - y = T_k U_{\infty,k+1} x - T_k U_{\infty,k+1} y = T_k U_{\infty,k+1} x - y$$

ゆえに

$$x = T_k U_{\infty,k+1} x.$$

一方,

$$U_{n,k+1}x = \alpha_{k+1}T_{k+1}U_{n,k+2}x + (1 - \alpha_{k+1})x,$$

である事より,

$$\begin{aligned} U_{\infty,k+1}x &= \alpha_{k+1}T_{k+1}U_{\infty,k+2}x + (1 - \alpha_{k+1})x \\ &= \alpha_{k+1}x + (1 - \alpha_{k+1})x \\ &= x. \end{aligned}$$

よって, 任意の  $k \in \mathbf{N}$  に対して,

$$x = T_k U_{\infty,k+1}x = T_k x.$$

これより  $x \in \bigcap_{i=1}^{\infty} F(T_i)$  となるので,  $F(W) \subset \bigcap_{i=1}^{\infty} F(T_i)$  がいえる. 以上の事から,

$$F(W) = \bigcap_{i=1}^{\infty} F(T_i).$$

■

次の Lemma 2.3 は後の Main Theorem を証明するために, Lemma 2.6 とセットになっているものである.

**Lemma 2.3**  $C$  を Banach 空間  $E$  の空でない closed convex 集合とする.  $T_1, T_2, \dots$  を  $C$  から  $C$  自身への nonexpansive 写像とし  $\bigcap_{i=1}^{\infty} F(T_i) \neq \emptyset$  を満たしているものとする.  $\alpha_1, \alpha_2, \dots$  を  $0 \leq \alpha_i \leq b < 1 (i = 1, 2, \dots)$  を満たす実数とする. 各  $n \in \mathbf{N}$  に対して,  $W_n$  を  $T_n, T_{n-1}, \dots, T_1$  と  $\alpha_n, \alpha_{n-1}, \dots, \alpha_1$  によって生成された  $W$ -mapping とする.  $\{\beta_n\}$  を  $0 \leq \beta_n \leq 1 (n = 1, 2, \dots)$  となる実数の列で,  $\sum_{n=1}^{\infty} |\beta_{n+1} - \beta_n| < \infty$  と  $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n = \infty$  を満たしているものとする.  $\{x_n\}$  を

$$x_1 = x \in C \quad x_{n+1} = \beta_n x + (1 - \beta_n)W_n x_n \quad (n = 1, 2, \dots)$$

によって定義された点列とする. この時,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_{n+1} - x_n\| = 0$ .

**Sketch of the proof.** かつてに  $x \in C$  と  $f \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F(T_n)$  をとってくる.  $D = \{z \in C \mid \|f - z\| \leq \|f - x\|\}$  とおくと,  $D$  は  $C$  の有界な closed convex となる部分集合で, 任意の  $n \in \mathbf{N}$  に対して  $T_n D \subset D$  を満たす. こ

れより一般性を失う事なしに,  $C$  を有界と仮定してよい.  $K = \sup_{z \in C} \|z\|$  とおくと, 各  $n \in \mathbf{N}$  に対して評価すると,

$$\begin{aligned} & \|x_{n+1} - x_n\| \\ & \leq (1 - \beta_n)\|x_n - x_{n-1}\| + 2K|\beta_n - \beta_{n-1}| + (1 - \beta_n)\|W_n x_n - W_{n-1} x_n\| \\ & \leq (1 - \beta_n)\|x_n - x_{n-1}\| + 2K|\beta_n - \beta_{n-1}| + 2K \left( \prod_{i=1}^n \alpha_i \right). \end{aligned}$$

上の不等式を使うと, 各  $m \in \mathbf{N}$  に対して,

$$\|x_{m+2} - x_{m+1}\| \leq 2K(1 - \beta_{m+1}) + 2K|\beta_{m+1} - \beta_m| + 2K \left( \prod_{i=1}^{m+1} \alpha_i \right)$$

となり, 同様に,

$$\begin{aligned} \|x_{m+3} - x_{m+2}\| & \leq 2K \exp \left( - \sum_{l=m}^{m+1} \beta_{l+1} \right) + 2K \sum_{l=m}^{m+1} |\beta_{l+1} - \beta_l| \\ & \quad + 2K \sum_{l=m}^{m+1} \left( \prod_{i=1}^{l+1} \alpha_i \right). \end{aligned}$$

ゆえに, 任意の  $m, n = 1, 2, \dots$  に対して,

$$\begin{aligned} \|x_{m+n+1} - x_{m+n}\| & \leq 2K \exp \left( - \sum_{l=m}^{m+n-1} \beta_{l+1} \right) + 2K \sum_{l=m}^{m+n-1} |\beta_{l+1} - \beta_l| \\ & \quad + 2K \frac{b^m(1 - b^n)}{1 - b} \end{aligned}$$

がいえる.  $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n = \infty$  である事から, 任意の  $m = 1, 2, \dots$  に対して

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} \|x_{n+1} - x_n\| & = \limsup_{n \rightarrow \infty} \|x_{m+n+1} - x_{m+n}\| \\ & \leq 2K \sum_{l=m}^{\infty} |\beta_{l+1} - \beta_l| + 2K \frac{b^m}{1 - b}. \end{aligned}$$

さらに,  $\sum_{n=1}^{\infty} |\beta_{n+1} - \beta_n| < \infty$  である事から,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|x_{n+1} - x_n\| \leq 2K \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{l=m}^{\infty} |\beta_{l+1} - \beta_l| + 2K \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{b^m}{1 - b} = 0,$$

ゆえに

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_{n+1} - x_n\| = 0.$$

次の Proposition と Lemma は後の Theorem を証明するために、それぞれ、塩路-高橋 [5], S. Reich [4] から引用したものである。

**Proposition 2.4 (塩路-高橋)**  $a$  を実数とし,  $(a_1, a_2, \dots)$  を任意の Banach limits  $\mu$  に対して  $\mu_n(a_n) \leq a$  で, かつ  $\limsup_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1} - a_n) \leq 0$  を満たす  $l^\infty$  の元とする. その時,  $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n \leq a$  となる.

**Lemma 2.5 (S. Reich)**  $E$  を uniformly Gâteaux 微分可能な norm をもつ uniformly convex な Banach 空間とし,  $C$  を  $E$  の空でない closed convex 集合とする.  $T$  を  $C$  から  $C$  自身への nonexpansive 写像とし,  $F(T) \neq \emptyset$  であるものとする. この時, 一意に onto である sunny nonexpansive retraction  $P: C \rightarrow F(T)$  が存在する. さらに, 任意の  $x \in C$  に対して,

$$u_k = \frac{1}{k}x + \left(1 - \frac{1}{k}\right)Tu_k \quad (k = 1, 2, \dots)$$

によって  $\{u_k\} \subset C$  があたえられた時,  $\{u_k\}$  は  $Px \in F(T)$  に強収束する.

Lemma 2.3 とセットになっている Lemma 2.6 を示す.

**Lemma 2.6**  $E$  を uniformly Gâteaux 微分可能な norm をもつ uniformly convex な Banach 空間とし,  $C$  を  $E$  の空でない closed convex 集合とする.  $T_1, T_2, \dots$  を  $C$  から  $C$  自身への nonexpansive 写像とし  $\bigcap_{i=1}^{\infty} F(T_i) \neq \emptyset$  を満たしているものとする.  $\alpha_1, \alpha_2, \dots$  を  $0 < \alpha_i \leq b < 1 (i = 1, 2, \dots)$  を満たす実数とする. 各  $n \in \mathbb{N}$  に対して,  $W_n$  を  $T_n, T_{n-1}, \dots, T_1$  と  $\alpha_n, \alpha_{n-1}, \dots, \alpha_1$  によって生成された  $W$ -mapping とする.  $\{\beta_n\}$  を  $0 \leq \beta_n \leq 1 (n = 1, 2, \dots)$  となる実数の列で,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = 0$  と  $\sum_{n=1}^{\infty} |\beta_{n+1} - \beta_n| < \infty, \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n = \infty$  を満たしているものとする.  $\{x_n\}$  を

$$x_1 = x \in C \quad x_{n+1} = \beta_n x + (1 - \beta_n)W_n x_n \quad (n = 1, 2, \dots)$$

によって定義された点列とする. この時,  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \langle x - Px, J(x_n - Px) \rangle \leq 0$ , が成り立つ. ここで  $P: C \rightarrow F(W) = \bigcap_{n=1}^{\infty} F(T_n)$  は一意な onto である sunny nonexpansive retraction ( $W = \lim_{n \rightarrow \infty} U_{n,1}$ ) であるものとする.

**Sketch of the proof.** Lemma 2.3 の証明でのように,  $C$  を有界と仮定しても一般性を失わない. 各  $k \in \mathbf{N}$  に対して,  $u_k$  を  $u_k = \frac{1}{k}x + \left(1 - \frac{1}{k}\right)Wu_k$  を満たす  $C$  の一意な元とする. Lemma 2.4 より,  $P: C \rightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} F(T_n)$  を一意な onto である sunny nonexpansive retraction とすると,

$$k \rightarrow \infty \implies u_k \rightarrow Px \in F(W) = \bigcap_{n=1}^{\infty} F(T_n).$$

$K = \sup_{z \in C} \|z\|$  とすると, 任意の  $n, k \in \mathbf{N}$  に対して評価すると,

$$\|x_{n+1} - Wu_k\| \leq 2\beta_n K + \|x_n - u_k\| + \|W_n u_k - Wu_k\|.$$

を得る.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = 0$  である事と可算個の写像族に対する  $W$ -mapping の定義  $Wu_k = \lim_{n \rightarrow \infty} W_n u_k$  ( $\forall k \in \mathbf{N}$ ) により, 任意の Banach limit  $\mu$  に対して,

$$\mu_n \|x_n - Wu_k\|^2 = \mu_n \|x_{n+1} - Wu_k\|^2 \leq \mu_n \|x_n - u_k\|^2.$$

点列  $\{u_k\}$  を構成するときに利用した等式  $u_k = \frac{1}{k}x + \left(1 - \frac{1}{k}\right)Wu_k$  を変形すると,  $\left(1 - \frac{1}{k}\right)(x_n - Wu_k) = (x_n - u_k) - \frac{1}{k}(x_n - x)$  となるから,

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{1}{k}\right)^2 \|x_n - Wu_k\|^2 &\geq \left(1 - \frac{2}{k}\right) \|x_n - u_k\|^2 \\ &\quad + \frac{2}{k} \langle x - u_k, J(x_n - u_k) \rangle. \end{aligned}$$

よって,

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{1}{k}\right)^2 \mu_n \|x_n - u_k\|^2 &\geq \left(1 - \frac{2}{k}\right) \mu_n \|x_n - u_k\|^2 \\ &\quad + \frac{2}{k} \mu_n \langle x - u_k, J(x_n - u_k) \rangle \end{aligned}$$

この不等式を整理すると,

$$\begin{aligned} \frac{1}{k^2} \mu_n \|x_n - u_k\|^2 &\geq \frac{2}{k} \mu_n \langle x - u_k, J(x_n - u_k) \rangle \\ \frac{1}{2k} \mu_n \|x_n - u_k\|^2 &\geq \mu_n \langle x - u_k, J(x_n - u_k) \rangle. \end{aligned}$$



$k \rightarrow \infty \implies u_k \rightarrow Px \in F(W) = \bigcap_{i=1}^{\infty} F(T_i)$  であるから, 上の不等式と  $E$  の norm の uniformly Gâteaux 微分可能性より,

$$0 \geq \mu_n \langle x - Px, J(x_n - Px) \rangle.$$

一方, Lemma 2.3 より,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\langle x - Px, J(x_{n+1} - Px) \rangle - \langle x - Px, J(x_n - Px) \rangle| = 0.$$

ゆえに, Proposition 2.4 から不等式

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \langle x - Px, J(x_n - Px) \rangle \leq 0.$$

が導かれる. ■

### 3 Strong convergence theorem and applications

ここでは, 最初に制約可能性と関係のある強収束定理を証明する.

**Theorem 3.1 (下地-高橋)**  $E$  を uniformly Gâteaux 微分可能な norm をもつ uniformly convex な Banach 空間とし,  $C$  を  $E$  の空でない closed convex 集合とする.  $T_1, T_2, \dots$  を  $C$  から  $C$  自身への nonexpansive 写像とし  $\bigcap_{i=1}^{\infty} F(T_i) \neq \emptyset$  を満たしているものとする.  $\alpha_1, \alpha_2, \dots$  を  $0 < \alpha_i \leq b < 1 (i = 1, 2, \dots)$  を満たす実数とする. 各  $n \in \mathbf{N}$  に対して,  $W_n$  を  $T_n, T_{n-1}, \dots, T_1$  と  $\alpha_n, \alpha_{n-1}, \dots, \alpha_1$  によって生成された  $W$ -mapping とする.  $\{\beta_n\}$  を  $0 \leq \beta_n \leq 1 (n = 1, 2, \dots)$  となる実数の列で,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = 0$  と  $\sum_{n=1}^{\infty} |\beta_{n+1} - \beta_n| < \infty, \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n = \infty$  を満たしているものとする.  $\{x_n\}$  を

$$x_1 = x \in C \quad x_{n+1} = \beta_n x + (1 - \beta_n) W_n x_n \quad (n = 1, 2, \dots)$$

によって定義された点列とする. この時,  $\{x_n\}$  は  $Px \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F(T_n)$  に強収束する. ここで  $P: C \rightarrow F(W) = \bigcap_{n=1}^{\infty} F(T_n)$  は一意な onto である sunny nonexpansive retraction ( $W = \lim_{n \rightarrow \infty} U_{n,1}$ ) であるものとする.

**Sketch of the proof.**  $Px \in \bigcap_{i=1}^{\infty} F(T_i)$  であることから, 不等式

$$\|W_n x_n - Px\| \leq \|x_n - Px\|, \quad (\forall n \in \mathbf{N})$$

が成立している. 点列  $\{x_n\}$  を構成する式  $x_{n+1} = \beta_n x + (1 - \beta_n)W_n x_n$  を変形して得られる式  $(1 - \beta_n)(W_n x_n - Px) = (x_{n+1} - Px) - \beta_n(x - Px)$  より

$$(1 - \beta_n)^2 \|W_n x_n - Px\|^2 \geq \|x_{n+1} - Px\|^2 - 2\beta_n \langle x - Px, J(x_{n+1} - Px) \rangle.$$

が成立するので, 任意の  $n \in \mathbf{N}$  に対して,

$$\|x_{n+1} - Px\|^2 \leq (1 - \beta_n) \|W_n x_n - Px\|^2 + 2(1 - (1 - \beta_n)) \langle x - Px, J(x_{n+1} - Px) \rangle$$

Lemma 2.6 より, 任意の  $\varepsilon > 0$  に対して,  $m \in \mathbf{N}$  が存在して, s.t.

$$\langle x - Px, J(x_n - Px) \rangle \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad (\forall n \geq m).$$

よって,

$$\|x_{m+1} - Px\|^2 \leq (1 - \beta_m) \|x_m - Px\|^2 + (1 - (1 - \beta_m)) \varepsilon.$$

同様にして,

$$\|x_{m+2} - Px\|^2 \leq \left\{ \prod_{l=m}^{m+1} (1 - \beta_l) \right\} \|x_m - Px\|^2 + \left\{ 1 - \prod_{l=m}^{m+1} (1 - \beta_l) \right\} \varepsilon.$$

以下, 同じようにしていくと,

$$\|x_{m+n} - Px\|^2 \leq \left\{ \prod_{l=m}^{m+n-1} (1 - \beta_l) \right\} \|x_m - Px\|^2 + \left\{ 1 - \prod_{l=m}^{m+n-1} (1 - \beta_l) \right\} \varepsilon$$

を得る. 条件  $\sum_{l=m}^{\infty} \beta_l = \infty$  より  $\prod_{l=m}^{\infty} (1 - \beta_l) = 0$  がいえるので, ゆえに,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|x_n - Px\|^2 = \limsup_{n \rightarrow \infty} \|x_{m+n} - Px\|^2 \leq \varepsilon.$$

ここで,  $\varepsilon > 0$  は任意であったから,  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \|x_n - Px\|^2 \leq 0$ . これより  $\{x_n\}$  が  $Px \in \bigcap_{i=1}^{\infty} F(T_i)$  に強収束することがいえる. ■

次の Theorem 3.2 は Theorem 3.1 の応用で, 制約可能性問題と関係がある Theorem である.

**Theorem 3.2** (下地-高橋)  $E$  を *uniformly Gâteaux* 微分可能な *norm* をもつ *uniformly convex* な Banach 空間とし,  $C$  を  $E$  の空でない *closed convex* 集合とする.  $\{C_n\}$  を  $C$  の *nonexpansive retracts* の列で,  $\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n \neq \emptyset$  を満たしているものとし, 各  $P_k (k \in \mathbb{N})$  は  $C$  から  $C_k$  への *onto* な *nonexpansive retraction* であるとする.  $T_1, T_2, \dots$  を  $C$  から  $C$  自身への *nonexpansive* 写像とし  $\bigcap_{i=1}^{\infty} F(T_i) \neq \emptyset$  を満たしているものとする.  $\alpha_1, \alpha_2, \dots$  を  $0 < \alpha_i \leq b < 1 (i = 1, 2, \dots)$  を満たす実数とする. 各  $n \in \mathbb{N}$  に対して,  $W_n$  を  $P_n, P_{n-1}, \dots, P_1$  と  $\alpha_n, \alpha_{n-1}, \dots, \alpha_1$  によって生成された *W-mapping* とする.  $\{\beta_n\}$  を  $0 \leq \beta_n \leq 1 (n = 1, 2, \dots)$  となる実数の列で,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = 0$  と  $\sum_{n=1}^{\infty} |\beta_{n+1} - \beta_n| < \infty, \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n = \infty$  を満たしているものとする.  $\{x_n\}$  を

$$x_1 = x \in C \quad x_{n+1} = \beta_n x + (1 - \beta_n) W_n x_n \quad (n = 1, 2, \dots)$$

によって定義された点列とする. この時,  $\{x_n\}$  は  $Px \in \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$  に強収束する. ここで  $P: C \rightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$  は一意な *onto* である *sunny nonexpansive retraction* ( $W = \lim_{n \rightarrow \infty} U_{n,1}$ ) であるものとする.

**Proof.** 任意の  $u \in C$  に対して,  $Wu = \lim_{n \rightarrow \infty} W_n u$  とおくと, If  $Wu = \lim_{n \rightarrow \infty} W_n u$  for every  $u \in C$ , Lemma 2.2 より  $F(W) = \bigcap_{n=1}^{\infty} F(P_n) = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$  がいえる. よって Theorem 3.1 を使う事によって,  $\{x_n\}$  が  $Px \in \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$  に強収束することがいえる. ■

## 参考文献

- [1] S. Atsushiba and W. Takahashi, Strong convergence theorems for a finite family of nonexpansive mappings and applications, *Indian J. Math.*, to appear.
- [2] G. Crombez, Image recovery by convex combinations of projections, *J. Math. Anal. Appl.*, **155** (1991), 413–419.
- [3] S. Kitahara and W. Takahashi, Image recovery by convex combinations for sunny nonexpansive retractions, *Topol. Methods Nonlinear Anal.*, **2** (1993), 333–342.
- [4] S. Reich, Strong convergence theorems for resolvents of accretive operators in Banach spaces, *J. Math. Anal. Appl.*, **75** (1980), 287–292.

- [5] N. Shioji and W. Takahashi, Strong convergence theorems of approximated sequences for nonexpansive mappings in Banach spaces, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **125** (1997), 3641–3645.
- [6] W. Takahashi, Fixed point theorems for families of nonexpansive mappings on unbounded sets, *J. Math. Soc. Japan*, **36** (1984), 543–553.
- [7] W. Takahashi, *Nonlinear Functional Analysis*, Kindai-kagakusha, Tokyo, 1988. (Japanese)
- [8] W. Takahashi, Fixed point theorems and nonlinear ergodic theorems for nonlinear semigroups and their applications, *Nonlinear Analysis*, **30** (1997), 1283–1293.
- [9] W. Takahashi, Weak and strong convergence theorems for families of nonexpansive mappings and their applications, *Ann. Univ. Mariae Curie-Sklodowska*, **51** (1997), 277–292.
- [10] W. Takahashi and K. Shimoji, Convergence theorems for nonexpansive mappings and feasibility problems, *Math. Comput. Modelling*, to appear.
- [11] W. Takahashi and T. Tamura, Limit theorems of operators by convex combinations for nonexpansive retractions in Banach spaces, *J. Approximation Theory*, **91** (1997), 386–397.