数理解析研究所講究録
1189 巻 2001 年 66-81

P-hyponormal, p-quasihyponormal 作用素のスペクトラムの孤立点

東北大学 内山 敦 (Atsushi Uchiyama)
Mathematical Institute, Tohoku University
東北薬科大学 棚橋 浩太郎 (Kôtarô Tanahashi)
Department of Mathematics, Tohoku Pharmaceutical University
神奈川大学 長 宗雄 (Muneo Chō)
Department of Mathematics, Kanagawa University

概要

Let $T \in B(\mathcal{H})$ be a bounded linear operator on a complex Hilbert space $\mathcal{H}$. Let λ_0 be an isolated point of $\sigma(T)$ and let $E = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda-\lambda_0|=r}(T-\lambda)^{-1}d\lambda$ be the Riesz idempotent for λ_0. In this paper, we prove that if T is either p-hyponormal or log-hyponormal, then E is self-adjoint and $E\mathcal{H} = \ker(T-\lambda_0) = \ker(T-\lambda_0)^*$.

Also, we prove that if T is a p-quasihyponormal operator with $0 < p \leq 1$ and if $\lambda_0 \neq 0$, then E is self-adjoint and $E\mathcal{H} = \ker(T-\lambda_0) = \ker(T-\lambda_0)^*$. But if $\lambda_0 = 0$, these results do not hold in general.

ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ 上の有界線形作用素全体を $B(\mathcal{H})$ とおく。有界線形作用素 $T \in B(\mathcal{H})$ が p-hyponormal $(0 < p)$ とは

$$(TT^*)^p \leq (T^*T)^p$$

となるときをいう。特に $p = 1$ のとき hyponormal, $p = \frac{1}{2}$ のとき semi-hyponormal という。Semi-hyponormal 作用素の性質は D. Xia [15] に詳しく述べられている。 P-hyponormal 作用素は Aluthge [1] によって研究が始まり、様々な性質が調べられてきている。(参照 [1, 2, 4, 5, 8, 9, 13, 16])。また T が可逆で

$$\log(TT^*) \leq \log(T^*T)$$

のとき log-hyponormal という。作用素 T が p-hyponormal で $0 < q < p$ ならば T は q-hyponormal である。また、可逆な p-hyponormal 作用素は log-hyponormal であるが、逆は成立しない。棚橋 [11, 12] は長、伊藤 [5] による p-hyponormal 作用素の Putnam 不等式をみて、log-hyponormal 作用素の存在に気づき 1997 年の学会で log-hyponormal 作用素の Putnam 不等式を示し、log-hyponormal 作用素は 0-hyponormal 作用素であることを主張した。

有界線形作用素 $T \in B(\mathcal{H})$ が p-quasihyponormal $(0 < p \leq 1)$ とは

$$0 \leq T^*((T^*T)^p - (TT^*)^p)T$$

となるときをいう。よって T の range $T\mathcal{H}$ が dense なら T は p-hyponormal である。P-quasihyponormal 作用素の性質は内山 [14] が詳しい。

ここでは、p-hyponormal, log-hyponormal, p-quasihyponormal 作用素のスペクトラム $\sigma(T)$ の孤立点に関する Riesz idempotent の性質を調べる。λ_0 が $\sigma(T)$ の孤立点とする。このとき

$$\{\lambda \in \mathbb{C} \ : \ |\lambda - \lambda_0| \leq r\} \cap \sigma(T) = \{\lambda_0\}$$

となる正数 $r > 0$ をとって

$$E = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda - \lambda_0| = r} (T - \lambda)^{-1} d\lambda$$

と定める。このとき E を λ_0 に対する Riesz idempotent という。E は

$$E^2 = E, \ ET = TE, \ \sigma(T|E\mathcal{H}) = \{\lambda_0\}$$

を満たすが、一般には self-adjoint でない。しかし、$T \in B(\mathcal{H})$ が hyponormal ならば E は self-adjoint になることを J. G. Stampfli [10, Proposition C] が証明した。

[命題 1 (Stampfli [10])] $T \in B(\mathcal{H})$ が hyponormal ならば $\sigma(T)$ の孤立点 λ_0 に対する Riesz idempotent E は self-adjoint で

$$E\mathcal{H} = \ker(T - \lambda_0) = \ker(T - \lambda_0)^*$$

を満たす。

[証明] T は hyponormal なので T は normaloid

$$\|T\| = \sup\{|\mu| : \mu \in \sigma(T)\}$$

である。また、$(T - \lambda)^{-1} (\lambda \in \rho(T))$ も hyponormal だから

$$\begin{aligned} \|(T - \lambda)^{-1}\| &= \sup\{|\mu| : \mu \in \sigma((T - \lambda)^{-1})\} \\ &= \sup\left\{\left|\frac{1}{\mu - \lambda}\right| : \mu \in \sigma(T)\right\} = \frac{1}{d(\lambda, \sigma(T))} \end{aligned}$$

となって T は G_1 条件

$$G_1 : \|(T - \lambda)^{-1}\| = \frac{1}{d(\lambda, \sigma(T))}, \quad \lambda \in \rho(T)$$

を満たす。よって

$$\|E\| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{|\lambda - \lambda_0| = r} \|(T - \lambda)^{-1}\| d\lambda \leq \frac{1}{2\pi} \frac{1}{r} 2\pi r = 1$$

である。従って E は self-adjoint である。

またx $x \in E\mathcal{H}$ とすると

$$\begin{aligned}\|(T-\lambda_0)x\| &= \left\|\frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda-\lambda_0|=r}(\lambda-\lambda_0)(T-\lambda)^{-1}xd\lambda\right\| \\ &\le \frac{1}{2\pi}\int_{|\lambda-\lambda_0|=r} r\|(T-\lambda)^{-1}x\|d\lambda \\ &\le \frac{1}{2\pi}r\times\frac{1}{r}\|x\|2\pi r = r\|x\| \to 0 \quad (r\to +0)\end{aligned}$$

となるので

$$(T-\lambda_0)x = 0$$

である。よって

$$E\mathcal{H} \subset \ker(T-\lambda_0)$$

である。

逆に $x \in \ker(T-\lambda_0)$ とすると $Tx = \lambda_0 x$ より

$$(T-\lambda)x = (\lambda_0-\lambda)x$$

である。従って

$$\begin{aligned}Ex &= \frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda-\lambda_0|=r}(T-\lambda)^{-1}xd\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda-\lambda_0|=r}(\lambda_0-\lambda)^{-1}xd\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}(re^{i\theta})^{-1}xrie^{i\theta}d\theta = x\end{aligned}$$

となる。よって

$$\ker(T-\lambda_0) \subset E\mathcal{H}$$

であるから

$$E\mathcal{H} = \ker(T-\lambda_0)$$

が示された。

次に

$$\ker(T-\lambda_0) = \ker(T-\lambda_0)^*$$

を示す。T は hyponormal だから $\ker(T-\lambda_0) \subset \ker(T-\lambda_0)^*$ である。逆に $\ker(T-\lambda_0)^* \subset \ker(T-\lambda_0)$ を示す。 E は self-adjoint だったので

$$\mathcal{H} = E\mathcal{H} \oplus (I-E)\mathcal{H}$$

と直交和で $\mathcal{H}$ を表せる。よって

$$T = (T|E\mathcal{H}) \oplus (T|(I-E)\mathcal{H}),$$
$$T^* = (T|E\mathcal{H})^* \oplus (T|(I-E)\mathcal{H})^* = (T^*|E\mathcal{H}) \oplus (T^*|(I-E)\mathcal{H})$$

と直交和に表され、

$$\sigma(T|E\mathcal{H}) = \{\lambda_0\},$$
$$\sigma(T|(I-E)\mathcal{H}) = \sigma(T) \setminus \{\lambda_0\}$$

である。さて $x \in \ker(T-\lambda_0)^*$ とすると $T^*x = \overline{\lambda_0}x$ である。 E は T と可換だったので

$$T^*(I-E)x = \overline{\lambda_0}(I-E)x$$

である。ここで、もし、 $(I-E)x \neq 0$ ならば $(I-E)x \in (I-E)\mathcal{H}$ なので

$$\overline{\lambda_0} \in \sigma_p(T^*|(I-E)\mathcal{H})$$

となる。しかし、これは

$$\lambda_0 \notin \sigma(T|(I-E)\mathcal{H}) = \overline{\sigma((T|(I-E)\mathcal{H})^*)} = \overline{\sigma(T^*|(I-E)\mathcal{H})}$$

に反する。よって $(I-E)x = 0$ であるから

$$x = Ex \in E\mathcal{H} = \ker(T-\lambda_0)$$

となる。 **[証明終]**

次に、この結果は p-hyponormal 作用素でも同様に成立することを示す。次は B. A. Barnes [3, Proposition 2] による結果であるが、証明で大事な役割を果たす。

[補題 2 (Barnes [3])] 任意の $R, S \in B(\mathcal{H})$ に対して

$$S(\ker(I-RS)) = \ker(I-SR), \quad \ker S \cap \ker(I-RS) = \{0\}$$

が成立する。

[注意 3] よって $\lambda \neq 0$ なら

$$\begin{aligned} S(\ker(\lambda - RS)) &= S(\ker(I - \frac{1}{\lambda}RS)) \\ &= \ker(I - S\frac{1}{\lambda}R) = \ker(\lambda - SR), \end{aligned}$$
$$\ker S \cap \ker(\lambda - RS) = \{0\}$$

が成立する。

[補題 4] $T \in B(\mathcal{H})$ の極分解を $T = U|T|$, また Aluthge 変換を $\tilde{T} = |T|^{1/2}U|T|^{1/2}$ とおくとき

$$|T|^{\frac{1}{2}} \ker(T - \lambda) = \ker(\tilde{T} - \lambda),$$
$$|T|^{\frac{1}{2}} \ker(\tilde{T} - \lambda)^* = \ker(T - \lambda)^*$$

が成立する。

[証明]

$$\begin{aligned}
\ker(\tilde{T} - \lambda) &= \ker(|T|^{\frac{1}{2}}U|T|^{\frac{1}{2}} - \lambda) \\
&= |T|^{\frac{1}{2}} \ker(U|T|^{\frac{1}{2}}|T|^{\frac{1}{2}} - \lambda) \\
&= |T|^{\frac{1}{2}} \ker(T - \lambda). \\
\ker(T - \lambda)^* &= \ker(|T|^{\frac{1}{2}}|T|^{\frac{1}{2}}U^* - \overline{\lambda}) \\
&= |T|^{\frac{1}{2}} \ker(|T|^{\frac{1}{2}}U^*|T|^{\frac{1}{2}} - \overline{\lambda}) \\
&= |T|^{\frac{1}{2}} \ker(\tilde{T} - \lambda)^*.
\end{aligned}$$

[証明終]

[定理 5] $T \in B(\mathcal{H})$ が p-hyponormal ならば $\sigma(T)$ の孤立点 λ_0 に対する Riesz idempotent E は self-adjoint で

$$E\mathcal{H} = \ker(T - \lambda_0) = \ker(T - \lambda_0)^*$$

を満たす。

[証明] $E\mathcal{H}$ は T の不変部分空間である。内山 [13, Lemma 4] より、 p-hyponormal 作用素の不変部分空間への restriction は p-hyponormal なので、 $T|E\mathcal{H}$ は p-hyponormal である。また、 $\sigma(T|E\mathcal{H}) = \{\lambda_0\}$ なので、長、伊藤 [5, Theorem 5] の Putnam 不等式から $T|E\mathcal{H}$ は normal、 従って

$$T|E\mathcal{H} = \lambda_0$$

である。よって $E\mathcal{H} = \ker(T - \lambda_0)$ である。

次に $\lambda_0 \neq 0$ なら

$$\ker(T - \lambda_0) = \ker(T - \lambda_0)^*$$

を示そう。 T は p-hyponormal なので [4, Theorem 4] より

$$\ker(T - \lambda_0) \subset \ker(T - \lambda_0)^*$$

である。よって $\ker(T-\lambda_0)^* \subset \ker(T-\lambda_0)$ を示せばよい。

(Case 1. $1/2 \le p$)

$1/2 \le p$ なので $T = U|T|$ の Aluthge 変換 $\tilde{T} = |T|^{1/2}U|T|^{1/2}$ は hyponormal で $\sigma(T) = \sigma(\tilde{T})$ を満たす。(参照 [1, Theorem 1], [7, Lemma 2], [8, Theorem 2], [16, Theorem])。さて $x \in \ker(T-\lambda_0)^*$ とする。補題 4 より $\ker(T-\lambda_0)^* = |T|^{1/2}\ker(\tilde{T}-\lambda_0)^*$ なので

$$x = |T|^{1/2}y,\ y \in \ker(\tilde{T}-\lambda_0)^*$$

となる y が存在する。ここで λ_0 は $\sigma(\tilde{T})$ の孤立点だから、命題 1 より

$$\ker(\tilde{T}-\lambda_0)^* = \ker(\tilde{T}-\lambda_0)$$

である。補題 4 より

$$y \in \ker(\tilde{T}-\lambda_0) = |T|^{1/2}\ker(T-\lambda_0)$$

であるから、

$$y = |T|^{1/2}z,\ z \in \ker(T-\lambda_0)$$

となる z が存在する。よって

$$x = |T|^{1/2}y = |T|^{1/2}|T|^{1/2}z = |T|z$$

である。また、 $Tz = \lambda_0 z$ なので [4, Theorem 4] より $|T|z = |\lambda_0|z$ である。よって

$$x = |T|z = |\lambda_0|z \in \ker(T-\lambda_0)$$

である。

(case 2. $0 < p < 1/2$) $x \in \ker(T-\lambda_0)^*$ とする。補題 4 より

$$\ker(T-\lambda_0)^* = |T|^{1/2}\ker(\tilde{T}-\lambda_0)^*$$

なので

$$x = |T|^{1/2}y,\ y \in \ker(\tilde{T}-\lambda_0)^*$$

となる y が存在する。ここで $\tilde{T}$ は $(p+\frac{1}{2})$-hyponormal で、 λ_0 は $\sigma(T) = \sigma(\tilde{T})$ の孤立点であるから (case 1) の証明より

$$\ker(\tilde{T}-\lambda_0)^* = \ker(\tilde{T}-\lambda_0)$$

である。以下 (case 1) の証明と同じである。

次に $\lambda_0 = 0$ の場合に

$$\ker(T-\lambda_0) = \ker T = \ker T^* = \ker(T-\lambda_0)^*$$

となることを示そう。T は p-hyponormal なので [4, Theorem 4] より $\ker T \subset \ker T^*$ となるから $\ker T^* \subset \ker T$ を示せばよい。

$$T^*x = |T|U^*x = 0$$

とする。 $\ker|T| = \ker|T|^{\frac{1}{2}}$ より $|T|^{\frac{1}{2}}U^*x = 0$ となる。これを繰り返して $|T|^{2p}U^*x = 0$ よって $U|T|^{2p}U^*x = 0$ となる。ここで $S = U|T|^p$ とおくと S は hyponormal で [7, Theorem 6] より

$$\sigma(S) = \{\, r^p e^{i\theta} \ :\ re^{i\theta} \in \sigma(T)\}$$

である。また、0 が $\sigma(T)$ の孤立点なので 0 は $\sigma(S)$ の孤立点でもある。従って命題 1 より $\ker S = \ker S^*$ となっている。よって

$$SS^*x = U|T|^{2p}U^*x = 0 \iff S^*Sx = |T|^{2p}x = 0$$

である。従って $|T|^{2p}x = 0$、よって $|T|x = 0$、よって $Tx = U|T|x = 0$ である。

次に E が self-adjoint を示す。 $E\mathcal{H}$ は T の不変部分空間であるが $E\mathcal{H} = \ker(T-\lambda_0)^*$ なので T^* の不変部分空間でもある。よって $E\mathcal{H}$ は T の reducing subspace となるので

$$T = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 \\ 0 & T_1 \end{pmatrix} \quad \mathcal{H} = E\mathcal{H} \oplus (E\mathcal{H})^{\perp}$$

と分解できる。

まず

$$\lambda_0 \notin \sigma(T_1)$$

を示す。もし $\lambda_0 \in \sigma(T_1)$ だと仮定しよう。 $E\mathcal{H}$ は T の reducing subspace だから

$$\sigma(T_1) = \sigma(T|(E\mathcal{H})^{\perp}) \subset \sigma(T)$$

となるので λ_0 は $\sigma(T_1)$ の孤立点である。ここで

$$|T| = \begin{pmatrix} |\lambda_0| & 0 \\ 0 & |T_1| \end{pmatrix}, \quad |T^*| = \begin{pmatrix} |\lambda_0| & 0 \\ 0 & |T_1^*| \end{pmatrix}$$

より T_1 は p-hyponormal なので前半の議論から

$$\lambda_0 \in \sigma_p(T_1)$$

となる。よって

$$T_1 x = \lambda_0 x, \quad x \in (E\mathcal{H})^{\perp}$$

となる $x \neq 0$ が存在する。よって $Tx = \lambda_0 x$ であるから

$$x \in \ker(T-\lambda_0) = E\mathcal{H}$$

となって矛盾である。

よって

$$
\begin{aligned}
E &= \frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda-\lambda_0|=r}(T-\lambda)^{-1}d\lambda \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda-\lambda_0|=r}\begin{pmatrix}(\lambda_0-\lambda)^{-1} & 0 \\ 0 & (T_1-\lambda)^{-1}\end{pmatrix}d\lambda \\
&= \begin{pmatrix}\frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda-\lambda_0|=r}(\lambda_0-\lambda)^{-1}d\lambda & 0 \\ 0 & \frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda-\lambda_0|=r}(T_1-\lambda)^{-1}d\lambda\end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix}1 & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix} \quad \mathcal{H} = E\mathcal{H}\oplus(E\mathcal{H})^{\perp}
\end{aligned}
$$

となる。従って E は self-adjoint である。 **[証明終]**

次に、この結果は log-hyponormal 作用素でも同様に成立することを示す。

[定理 6] $T\in B(\mathcal{H})$ が log-hyponormal ならば $\sigma(T)$ の孤立点 λ_0 に対する Riesz idempotent E は self-adjoint で

$$E\mathcal{H} = \ker(T-\lambda_0) = \ker(T-\lambda_0)^*$$

を満たす。

[証明] T は可逆なので $\lambda_0\neq 0$ である。また [11, Theorem 11] より $\ker(T-\lambda_0)\subset\ker(T-\lambda_0)^*$ である。次に $\ker(T-\lambda_0)^*\subset\ker(T-\lambda_0)$ を示す。

T の極分解を $T=U|T|$ とおく。[11, Theorem 4] より $\tilde{T}=|T|^{\frac{1}{2}}U|T|^{\frac{1}{2}}$ は semi-hyponormal で $\sigma(T)=\sigma(\tilde{T})$ である。よって λ_0 は $\sigma(\tilde{T})$ の孤立点なので定理 5 より $\ker(\tilde{T}-\lambda_0)=\ker(\tilde{T}-\lambda_0)^*$ である。さて $x\in\ker(T-\lambda_0)^*$ とする。ここで補題 4 より $\ker(T-\lambda_0)^*=|T|^{1/2}\ker(\tilde{T}-\lambda_0)^*$ なので

$$x=|T|^{1/2}y,\quad y\in\ker(\tilde{T}-\lambda_0)^*=\ker(\tilde{T}-\lambda_0)$$

となる y が存在する。従って

$$\lambda_0 y=\tilde{T}y=|T|^{1/2}U|T|^{1/2}y$$

より

$$\lambda_0|T|^{1/2}y=|T|^{1/2}|T|^{1/2}U|T|^{1/2}y$$

となる。よって

$$\lambda_0 x=|T|Ux$$

である。よって
$$TUx = U|T|Ux = \lambda_0 Ux$$
である。 $\lambda_0 = |\lambda_0|e^{i\theta}$ とおくと T は log-hyponormal なので [11, Theorem 11] より
$$|T|Ux = |\lambda_0|Ux, \quad UUx = e^{i\theta}Ux$$
である。ここで T は可逆なので U は unitary である。よって
$$Ux = e^{i\theta}x$$
となるので
$$|T|x = |\lambda_0|x$$
である。従って
$$Tx = U|T|x = \lambda_0 x$$
であるから、
$$x \in \ker(T - \lambda_0)$$
である。よって
$$\ker(T - \lambda_0) = \ker(T - \lambda_0)^* \subset E\mathcal{H}$$
が示された。

次に
$$E\mathcal{H} \subset \ker(T - \lambda_0)$$
を示す。$\tilde{T}$ は semi-hyponormal だから、定理 5 より λ_0 に対する $\tilde{T}$ の Reisz idempotent
$$E_{\tilde{T}} = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda-\lambda_0|=r}(\tilde{T} - \lambda)^{-1}d\lambda$$
は self-adjoint で
$$E_{\tilde{T}}\mathcal{H} = \ker(\tilde{T} - \lambda_0) = \ker(\tilde{T} - \lambda_0)^*$$
を満たす。T は可逆だから $|T|, |T|^{\frac{1}{2}}$ も可逆で
$$\begin{aligned}\tilde{T} - \lambda &= |T|^{\frac{1}{2}}U|T|^{\frac{1}{2}} - \lambda \\ &= |T|^{\frac{1}{2}}(U|T| - \lambda)|T|^{-\frac{1}{2}} \\ &= |T|^{\frac{1}{2}}(T - \lambda)|T|^{-\frac{1}{2}}\end{aligned}$$
である。よって $\lambda \in \rho(T) = \rho(\tilde{T})$ に対して
$$(T - \lambda)^{-1} = |T|^{-\frac{1}{2}}(\tilde{T} - \lambda)^{-1}|T|^{\frac{1}{2}}$$

となるから

$$\begin{aligned}
E &= \frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda-\lambda_0|=r}(T-\lambda)^{-1}d\lambda \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda-\lambda_0|=r}|T|^{-\frac{1}{2}}(\tilde{T}-\lambda)^{-1}|T|^{\frac{1}{2}}d\lambda \\
&= |T|^{-\frac{1}{2}}\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda-\lambda_0|=r}(\tilde{T}-\lambda)^{-1}d\lambda\right\}|T|^{\frac{1}{2}} \\
&= |T|^{-\frac{1}{2}}E_{\tilde{T}}|T|^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

である。

さて $x \in E\mathcal{H}$ とする。このとき

$$x = Ex = |T|^{-\frac{1}{2}}E_{\tilde{T}}|T|^{\frac{1}{2}}x$$

である。よって

$$|T|^{\frac{1}{2}}x = E_{\tilde{T}}|T|^{\frac{1}{2}}x$$

となるので、補題 4 から

$$|T|^{\frac{1}{2}}x \in E_{\tilde{T}}\mathcal{H} = \ker(\tilde{T}-\lambda_0) = |T|^{\frac{1}{2}}\ker(T-\lambda_0)$$

となる。よって

$$x \in \ker(T-\lambda_0)$$

である。

次に E が self-adjoint の証明が残っているが、これは定理 5 の証明の場合と同様である。 **[証明終]**

[注意 7] E は self-adjoint で $ET = TE$ より $ET^* = T^*E$ である。よって $E|T| = |T|E$ なので $E_{\tilde{T}} = |T|^{\frac{1}{2}}E|T|^{-\frac{1}{2}} = E|T|^{\frac{1}{2}}|T|^{-\frac{1}{2}} = E$ である。

次に、p-quasihyponormal 作用素のスペクトラムの孤立点 λ_0 に対する Riesz idempotent は p-hyponormal, log-hyponormal 作用素の場合と同様の性質を持つが、$\lambda_0 = 0$ なら異なることを示す。

次は内山 [14] による q-quasihyponormal operator の特徴付けである。

[補題 8 (内山 [14])] $T \in B(\mathcal{H})$ が p-quasihyponormal ($0 < p \leq 1$) なら、$\mathcal{H}$ を $T\mathcal{H}$ の閉包 $[T\mathcal{H}]$ と $\ker T^*$ に直交分解したとき

$$T = \begin{pmatrix} A & S \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathcal{H} = [T\mathcal{H}] \oplus \ker T^*,$$

$$\begin{aligned}
&(AA^*)^p \leq (AA^* + SS^*)^p \leq (A^*A)^p, \\
&\sigma(A) \subset \sigma(T) \subset \sigma(A) \cup \{0\}
\end{aligned}$$

となる。よって、特に A は p-hyponormal である。

[補題 9] $T \in B(\mathcal{H})$ が p-quasihyponormal ($0 < p \leq 1$) とする。このとき $(T-\lambda)x = 0, \lambda \neq 0$ ならば $(T-\lambda)^*x = 0$ となる。

[証明] 補題 8 を用いて

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, T = \begin{pmatrix} A & S \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathcal{H} = [T\mathcal{H}] \oplus \ker T^*$$

と分解する。すると

$$(T-\lambda)x = \begin{pmatrix} (A-\lambda)x_1 + Sx_2 \\ -\lambda x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

となるが $\lambda \neq 0$ より $x_2 = 0, (A-\lambda)x_1 = 0$ である。ここで A は補題 8 より p-hyponormal であるから [4, Theorem 4] より $(A-\lambda)^*x_1 = 0$ となる。よって $|A|x = |\lambda|x = |A^*|x$ である。また、補題 8 より

$$0 \leq \langle \left\{ |A|^{2p} - (|A^*|^2 + |S^*|^2)^p \right\} x, x \rangle \leq \langle (|A|^{2p} - |A^*|^{2p})x, x \rangle = 0$$

となるので

$$(|A^*|^2 + |S^*|^2)^p x = |A|^{2p}x = |\lambda|^{2p}x$$

となる。よって

$$(|A^*|^2 + |S^*|^2)x = |\lambda|^2 x = |A^*|^2 x$$

であるから $|S^*|^2x = 0$, 従って $S^*x = 0$ である従って

$$(T-\lambda)^*x = \begin{pmatrix} (A-\lambda)^* & 0 \\ S^* & -\overline{\lambda} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (A-\lambda)^*x_1 \\ S^*x_1 \end{pmatrix} = 0$$

である。 **[証明終]**

[定理 10] $T \in B(\mathcal{H})$ が p-qusihyponormal $(0 < p \leq 1)$ ならば $\sigma(T)$ の 0 でない孤立点 λ_0 に対する Riesz idempotent E は self-adjoint で

$$E\mathcal{H} = \ker(T-\lambda_0) = \ker(T-\lambda_0)^*$$

を満たす。

[証明] T の range $T\mathcal{H}$ が dense ならば T は p-hyponormal なので、$T\mathcal{H}$ は dense でないとしてよい。補題 8 を用いて

$$T = \begin{pmatrix} A & S \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathcal{H} = [T\mathcal{H}] \oplus \ker T^*$$

と分解する。λ_0 は $\sigma(T)$ の孤立点だが、補題 8 より $\sigma(A)$ の孤立点でもある。さて

$$\{\lambda|\ \ |\lambda-\lambda_0|<r\}\cap\{\sigma(A)\cup\{0\}\}=\emptyset$$

となる正数 r をとると

$$\begin{aligned}E&=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda-\lambda_0|=r}\begin{pmatrix}\lambda-A & -S\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}^{-1}d\lambda\\&=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda-\lambda_0|=r}\begin{pmatrix}(\lambda-A)^{-1} & \lambda^{-1}(\lambda-A)^{-1}S\\ 0 & \lambda^{-1}\end{pmatrix}d\lambda\end{aligned}$$

となる。ここで

$$E_A=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda-\lambda_0|=r}(\lambda-A)^{-1}d\lambda$$

は A にかんする λ_0 の Riesz idempotent である。補題 8 より A は p-hyponormal だから、定理 5 より E_A は self-adjoint で

$$E_A[T\mathcal{H}]\ =\ker(\lambda_0-A)=\ker(\lambda_0-A)^*$$

を満たす。ここで $E_AS=0$ を示す。ベクトル $x\in[T\mathcal{H}]$ をとり $y=E_Ax$ とおくと

$$y\in E_A[T\mathcal{H}]=\ker(\lambda_0-A)=\ker(\lambda_0-A)^*$$

となる。ここで補題 9 の証明と同様にして $S^*y=S^*E_Ax=0$ が示せる。よって $S^*E_A=0$、従って $E_AS=0$ となる。さて、

$$\begin{aligned}(\lambda-A)^{-1}&=\sum_{n=0}^{\infty}(\lambda-\lambda_0)^nA_n+\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda-\lambda_0)^{-n}B_n,\\A_0&=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda-\lambda_0|=r}(\lambda-\lambda_0)^{-1}(\lambda-A)^{-1}d\lambda,\\B_1&=E_A,B_{n+1}=(A-\lambda_0)^nE_A\end{aligned}$$

と展開すると

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda-\lambda_0|=r}\lambda^{-1}(\lambda-A)^{-1}d\lambda\ S\\&=(\lambda_0^{-1}B_1-\lambda_0^{-2}B_2+\lambda_0^{-3}B_3-\cdots)S\\&=\lambda_0^{-1}E_AS-\lambda_0^{-2}(A-\lambda_0)E_AS+\lambda_0^{-3}(A-\lambda_0)^2E_AS-\cdots=0\end{aligned}$$

となる。よって

$$E = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{|\lambda-\lambda_0|=r} (\lambda - A)^{-1} d\lambda & \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{|\lambda-\lambda_0|=r} \lambda^{-1}(\lambda - A)^{-1} S d\lambda \\ 0 & \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{|\lambda-\lambda_0|=r} \lambda^{-1} d\lambda \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} E_A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

である。従って E は self-adjoint で

$$\begin{aligned} E\mathcal{H} = E_A[T\mathcal{H}] \oplus \{0\} &= \ker(A-\lambda_0) \oplus \{0\} \\ &= \ker(A-\lambda_0)^* \oplus \{0\} \end{aligned}$$

となる。さてベクトル $x \in E\mathcal{H}$ をとる。すると

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad x_1 \in \ker(A-\lambda_0)$$

と表されるので

$$(T-\lambda_0)x = \begin{pmatrix} A-\lambda_0 & S \\ 0 & -\lambda_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (A-\lambda_0)x_1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

となる。よって $E\mathcal{H} = \ker(T-\lambda_0)$ である。

次に $\ker(T-\lambda_0) = \ker(T-\lambda_0)^*$ を示す。補題 9 より $\ker(T-\lambda_0) \subset \ker(T-\lambda_0)^*$ なので $\ker(T-\lambda_0)^* \subset \ker(T-\lambda_0)$ を示せばよい。ベクトル $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \ker(T-\lambda_0)^*$ をとると

$$0 = (T-\lambda_0)^* x = \begin{pmatrix} (A-\lambda_0)^* & 0 \\ S^* & -\overline{\lambda_0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (A-\lambda_0)^* x_1 \\ S^* x_1 - \overline{\lambda_0} x_2 \end{pmatrix}$$

となる。よって $x_1 \in \ker(A-\lambda_0)^* = \ker(A-\lambda_0)$, 従って補題 9 と同様にして $S^* x_1 = 0$ となる。よって $x_2 = 0$ となるから

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \ker(A-\lambda_0) \oplus \{0\} = E_T\mathcal{H} = \ker(T-\lambda_0)$$

である。 **[証明終]**

[例 11] U を $l^2 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \end{pmatrix} \middle| \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty \right\}$ 上の unilateral shift とする。ここで

$$\begin{aligned} &A = U + 2, \\ &S = (A^*A - AA^*)^{\frac{1}{2}}, \\ &T = \begin{pmatrix} A & S \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathcal{H} = l^2 \oplus l^2 \end{aligned}$$

とおくと T は quasihyponormal でである。また

$$\sigma(T) = \{0\} \cup \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - 2| \leq 1\}$$

となるので 0 は $\sigma(T)$ の孤立点である。ここで 0 に対する Riesz idempotent を E とおくと

$$E = \begin{pmatrix} 0 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad X \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}x_1 \\ (-\frac{1}{2})^2 x_2 \\ (-\frac{1}{2})^3 x_3 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

となるので E は self-adjoint ではない。また

$$\begin{aligned} \ker T &= \left\{ \begin{pmatrix} -(U+2)^{-1}Sy \\ y \end{pmatrix} \middle| y \in l^2 \right\} = E\mathcal{H}, \\ \ker T^* &= \{0\} \oplus l^2 \end{aligned}$$

となり

$$E\mathcal{H} = \ker T \not\subset \ker T^*$$

である。

[参考文献]

[1] A. Aluthge, *On p-hyponormal operators for* $0 < p < 1$, Integr. Equat. Oper. Th., **13** (1990), 307–315.

[2] A. Aluthge, *Some generalized theorems on p-hyponormal operators,* Integr. Equat. Oper. Th., **24** (1994), 497–501.

[3] B. A. Barnes, *Common operator properties of the linear operators RS and SR,* Proc. Amer. Math. Soc., **126** (1998), 1055–1061.

[4] M. Chō and T. Huruya, *p-hyponormal operators for* $0 < p < \frac{1}{2}$, Commentations Mathematicae, **33** (1993), 23–29.

[5] M. Chō and M. Itoh, *Putnam's inequality for p-hyponormal operators,* Proc. Amer. Math. Soc., **123** (1995), 2435–2440.

[6] M. Chō, I. H. Jeon, I. B. Jung, J. I. Lee and K. Tanahashi, *Joint spectra of n-tuples of generalized Aluthge transformations,* preprint.

[7] M. Chō and K. Tanahashi, *Spectral properties of log-hyponormal operators,* Scientiae Mathematicae, **2** (1999), 223–230.

[8] T. Huruya, *A note on p-hyponormal operators,* Proc. Amer. Math. Soc., **125** (1997), 3617–3624.

[9] S. M. Patel, *A note on p-hyponormal operators for* $0 < p < 1$, Integr. Equat. Oper. Th., **21** (1995), 498–503.

[10] J. G. Stampfli, Hyponormal operators and spectral density, Trans. Amer. Math. Soc., **117** (1965), 469–476.

[11] K. Tanahashi, *On* log-*hyponormal operators,* Integr. Equat. Oper. Th., **34** (1999), 364–372.

[12] K. Tanahashi, *Putnam's inequality for* log-*hyponormal operators,* to appear in Integr. Equat. Oper. Th.

[13] A. Uchiyama, *Berger-Shaw's theorem for p-hyponormal operators*, Integr. Equat. Oper. Th., **33** (1999), 221–230.

[14] A. Uchiyama, *Berger-Shaw's theorem for p-quasihyponormal operators*, Integr. Equat. Oper. Th., **34** (1999), 91–106.

[15] D. Xia, *Spectral theory of hyponormal operators,* Birkhauser Verlag, Boston, 1983.

[16] T. Yoshino, *The p-hyponormality of the Aluthge transform,* Interdisciplinary Information Sciences, **3** (1997), 91–93.

Atsushi Uchiyama
Mathematical Institute, Tohoku University,
Sendai 980-8578, Japan
e-mail address uchiyama@math.tohoku.ac.jp

Kôtarô Tanahashi
Department of Mathematics, Tohoku Pharmaceutical University,
Sendai 981-8558, Japan
e-mail address tanahasi@tohoku-pharm.ac.jp

Muneo Chō
Department of Mathematics, Kanagawa University,
Yokohama 221-8686, Japan
e-mail address chiyom01@kanagawa-u.ac.jp