

グラスマン型の Parabolic Kazhdan-Lusztig 多項式  $Q^I$  の組合せ論的記述について

岡山大・教育 成瀬 弘 (Hiroshi Naruse)  
Faculty of Education, Okayama Univ.

1. Parabolic Kazhdan-Lusztig 多項式の研究の歴史から

まず、ここで述べることに関連した Kazhdan-Lusztig 多項式 (K-L 多項式と略する) の研究の歴史を年表形式で概観しておく。

- (r1) 1979 Kazhdan-Lusztig : オリジナルの K-L 多項式  $P$  と  $Q$  の定義
- (r2) 1980 Lascoux-Schützenberger :  $A_{n-1}$  型グラスマンの  $P^I$  の組合せ論的記述
- (r3) 1987 Deodhar : Parabolic K-L 多項式  $P^I$  の定義
- (r4) 1987 Casian-Collingwood :  $Q^I$  の係数の表現論的意味付け
- (r5) 1988 Boe :  $B_n$  型の極大 Parabolic の  $P^I$  の組合せ論的記述
- (r6) 1990 Irving : Weyl 群の場合の  $P^I, Q^I$  の係数の非負性と表現論的意味付け
- (r7) 1990 Douglass : 有限 Coxeter 群の Parabolic K-L 多項式の双対性
- (r8) 1998 Frenkel-Kovanov-Kirillov :  $A_{n-1}$  型の  $P^I, Q^I$  の意味付け
- (r9) 1999 Kashiwara-Tanisaki : 結晶型の Coxeter 群の  $P^I, Q^I$  の係数の非負性

これ以外にも F.Brenti, H.Tagawa, V.V.Deodhar 等による, (Parabolic) K-L 多項式の別の組合せ論的な記述に関する結果があるが, 符号が正の項と負の項の和で表されるものでここで述べるような単純な母関数的な表示とは異なる。関連はあるかもしれないがここでは割愛することにする。

Parabolic Kazhdan-Lusztig 多項式は, (r1) で定義された Coxeter 群  $W$  上の通常の場合の K-L 多項式を, Parabolic 部分群  $W_I$  による剰余類の集合  $W/W_I$  上の場合に拡張したもので, (r3) によって導入されてから様々な場面で登場している。(r2) は, それ以前の結果であるが,  $A$  型の極大パラボリック部分群の場合についてのみ考察し, 重みつき木を用いて母関数的に  $P^I$  を記述した。(r3) で定義されたものは, 2通りあるが実は有限 Coxeter 群の場合であれば, その二つは双対関係にあることが (r7) で示された。(r4) と (r6) では, generalized Verma 加群の中の既約表現の重複度を記述するものとして多項式  $Q^I$  が捉えられている。無限群の場合でも結晶型の Coxeter 群であれば  $P^I, Q^I$  のいずれも係数は, 非負であることが (r9) でわかっている。グラスマン型以外でも母関数的な表示ができる可能性はある。実際, (r5) では  $B_n$  型の極大部分群 (Dynkin 図形の端の元を除くもの) について, (r2) と同様の母関数的表示ができることが示された。この場合の  $Q^I$  についてもここで述べるのと同様の形で記述できるが, これについては別の機会に報告することにした

い。(r8)では、量子群  $U_q(sl_k)$  の  $n$  次のテンソル積表現  $V^{\otimes n}$  の canonical 基底, dual canonical 基底を  $V$  の標準基底  $e_i$  ( $1 \leq i \leq k$ ) からできる基底  $e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes \cdots \otimes e_{i_n}$  で表したときの係数として  $A_{n-1}$  型の  $P^I, Q^I$  が登場すること, 及び  $k=2$  のときにより詳しく調べてグラスマン型の場合の  $P^I$  の (r2) での表示の別証明と  $Q^I$  について0または  $q$  べき1項しか登場しないこと等を導いている。

## 2. ヘッケ環と Kazhdan-Lusztig 多項式の定義

ここでは、まず基本事項の復習から入ることとする。詳細については、文献(テキストでは [Hu] や [Xi] など) を参照して頂きたい。記号の使い方は、出来る限り標準的に用いられているものを採用するが、文献によっては同じ記号で別の(類似の)対象を表す場合もあるので注意が必要である。

$A = \mathbf{Z}[v, v^{-1}]$  をローラン多項式環とし、 $H(W)$  を、Coxeter 群  $(W, S)$  に付随した  $A$  上のヘッケ環とする。

すなわち、 $A$  上に、標準的な基底  $\{\tilde{T}_w\}_{w \in W}$  を持ち、積は

$$s \in S \text{ のとき, } \quad (\tilde{T}_s - v)(\tilde{T}_s + v^{-1}) = 0 \text{ および,}$$

$$\ell(x) + \ell(y) = \ell(xy) \text{ のとき, } \quad \tilde{T}_x \tilde{T}_y = \tilde{T}_{xy}$$

を満たすように定められている。(ここで、 $\ell(x)$  は Coxeter 群  $W$  の元  $x$  の生成元  $S$  での最短表示の長さを表す。)

このとき、 $\tilde{T}_s$  は可逆で、 $\tilde{T}_s^{-1} = \tilde{T}_s - (v - v^{-1})$  となる。通常は、 $T_s = v\tilde{T}_s, q = v^2$  によりヘッケ環を記述する場合もある。

ヘッケ環の involution  $\bar{\phantom{x}}$  を  $\bar{v} = v^{-1}, \bar{\tilde{T}}_x = \tilde{T}_{x^{-1}}$  で定まるものとする。また  $A_- = \mathbf{Z}[v^{-1}]$  とおく。このとき  $H(W)$  の別の基底  $\{C'_x\}_{x \in W}$  で、各  $x \in W$  について次を満たしているものがただ一組存在する。

$$C'_x \in \tilde{T}_x + \sum_{y \in W} v^{-1} A_- \tilde{T}_y \quad \text{かつ} \quad \bar{C}'_x = C'_x$$

このとき、 $C'_x = \sum_{y \leq x} v^{\ell(y) - \ell(x)} P_{y,x}(v^2) \tilde{T}_y$  と表すことができ、 $P_{y,x}(q) \in \mathbf{Z}[q]$  となる。これを Kazhdan-Lusztig 多項式という。(  $W$  の元の順序  $y \leq x$  は、Bruhat order である。)

条件から、 $P_{x,x}(q) = 1$  で、 $y < x$  のとき、 $P_{y,x}(q)$  の  $q$  の多項式としての次数を  $d$  とすると、 $(\ell(y) - \ell(x)) + 2d < 0$  すなわち、 $d < \frac{\ell(x) - \ell(y)}{2}$  したがって、 $d \leq \frac{\ell(x) - \ell(y) - 1}{2}$  である。

実際には、当初 (r1) Kazhdan-Lusztig では後で述べる Bruhat order に関する漸化式によって帰納的に定義したのであるが、後にこのように Bruhat order を表に出さない定式化ができることがわかっている。

### 3. Parabolic Kazhdan-Lusztig 多項式

Coxeter 群  $(W, S)$  において, その生成系  $S$  の部分集合  $I$  で生成された部分群  $W_I$  はまた Coxeter 群となり, このような部分群をパラボリック部分群という。ヘッケ環においても, 同様にして部分環  $H_I$  を  $T_s (s \in I)$  で生成されたものとしてこれは, Coxeter 群  $(W_I, I)$  に関するヘッケ環に同一視できる。

部分群  $W_I$  による  $W$  の剰余類の最短元による代表の集合を  $V^I$  で表す。すなわち

$$V^I = \{w \in W \mid ws > w \ \forall s \in I\}$$

ここで,  $>$  は,  $W$  の Bruhat 順序を表す。

この集合上に Parabolic Kazhdan-Lusztig 多項式を定義するのであるが, このとき次に述べる三分律 (trichotomy) が, 重要となる。

**命題**  $x \in V^I$  と  $s \in S$  に対して以下の 3 通りのうちのただ一つが成り立つ。

a)  $sx > x, sx \in V^I$  (このとき,  $(s, x) \in A$  と書く)

b)  $sx > x, sx \notin V^I$  (このとき,  $(s, x) \in B$  と書く)

c)  $sx < x$  (このとき,  $(s, x) \in C$  と書く)

つまり,  $S \times V^I = A + B + C$  (直和) である。

前述の Kazhdan-Lusztig 多項式の定義を拡張する形で Parabolic Kazhdan-Lusztig 多項式を定義することもできるが, ここでは  $W_I$  が有限群の場合のみ扱うのでこの場合には次のように定義すればよい。(2 通りの Parabolic K-L 多項式のうち [De] において  $u = -1$  の方を考える。)

$$y, x \in V^I \text{ に対して } P_{y,x}^I(q) := P_{y w_I, x w_I}(q)$$

ここで,  $w_I$  は,  $W_I$  の中の最長元を表す。

さらに, この (符号付) 逆行列にあたる多項式系  $\{Q_{y,x}^I(q)\}_{y,x \in V^I}$  を, 任意の  $y, x \in V^I$  に対して

$$\sum_{z \in V^I} (-1)^{\ell(x) - \ell(z)} P_{y,z}^I(q) Q_{z,x}^I(q) = \delta_{y,x}$$

となるように定めることが出来る。

このとき,  $y < x$  なら  $P_{y,x}^I(q)$  と  $Q_{y,x}^I(q)$  は, どちらも次数が  $m = \frac{\ell(x) - \ell(y) - 1}{2}$  次以下で, しかもこの  $m$  次の項が存在すれば, その係数は等しくなる。これを  $\mu^I(y, x)$  で表す。

(以下では, 表記を簡略化するため  $P_{y,x}^I(q)$  を  $P_{y,x}^I$ ,  $Q_{y,x}^I(q)$  を  $Q_{y,x}^I$  と表す。)

命題 ( $P^I$  と  $Q^I$  の漸化式)

以下において、漸化式の前頭の記号は、 $s$  に対して  $y, x$  がそれぞれ三分律でのクラスに属しているかを示している。たとえば、 $p_{a,c}$  は、 $sy > y, sy \in V^I$  かつ  $sx < x$  のとき成立する漸化式である。また、 $\sum$  は、そこに添えられた条件を満たす  $z \in V^I$  を動かした総和を表す。 $(y \leq z \leq sx$  の中で考えればよい)

$P^I$  の漸化式  $y, x \in V^I, s \in S$  に対して

$$\begin{aligned} p_{a,c}: P_{y,x}^I &= P_{y,sx}^I + qP_{sy,sx}^I - \sum_{(s,z) \notin A} \mu^I(z, sx) q^{\frac{\ell(sx) - \ell(z) + 1}{2}} P_{y,z}^I \\ p_{b,c}: P_{y,x}^I &= (1 + q)P_{y,sx}^I - \sum_{(s,z) \notin A} \mu^I(z, sx) q^{\frac{\ell(sx) - \ell(z) + 1}{2}} P_{y,z}^I \\ p_{c,c}: P_{y,x}^I &= qP_{y,sx}^I + P_{sy,sx}^I - \sum_{(s,z) \notin A} \mu^I(z, sx) q^{\frac{\ell(sx) - \ell(z) + 1}{2}} P_{y,z}^I \\ p_{a,b}: P_{y,x}^I &= P_{sy,x}^I \end{aligned}$$

$Q^I$  の漸化式  $y, x \in V^I, s \in S$  に対して

$$\begin{aligned} q_{a,c}: Q_{y,x}^I &= Q_{y,sx}^I \\ q_{b,c}: Q_{y,x}^I &= -qQ_{y,sx}^I + \sum_{(s,z) \in A} \mu^I(y, z) q^{\frac{\ell(z) - \ell(y) + 1}{2}} Q_{z,sx}^I \\ q_{c,c}: Q_{y,x}^I &= -qQ_{y,sx}^I + Q_{sy,sx}^I + \sum_{(s,z) \in A} \mu^I(y, z) q^{\frac{\ell(z) - \ell(y) + 1}{2}} Q_{z,sx}^I \\ q_{a,b}: Q_{y,x}^I &= 0 \end{aligned}$$

注意 1) 文献 [Ir] では、これらの漸化式のそれぞれの上 3 つを  $P^I, Q^I$  の定義に採用している。

注意 2)  $I = \emptyset$  のときは、case b) が生じないので  $P^I$  では  $p_{a,c}$  と  $p_{c,c}$  の漸化式のみとなり、これが original の Kazhdan-Lusztig の定義となる。

なお、

$$P_{x,x}^I = 1, Q_{x,x}^I = 1 \quad \text{および、} \quad y \not\leq x \text{ のとき } P_{y,x}^I = 0, Q_{y,x}^I = 0 \text{ は、分かつている。}$$

上の漸化式を証明するには、 $x \in V^I$  について  $C'_{xw_I} = (\sum_{z \in V^I} v^{\ell(z) - \ell(x)} P_{z,x}^I (v^2) \tilde{T}_z) C'_{w_I}$  と分解できることを用いて、これに  $\tilde{T}_s$  を左からかけると、どのように表示されるかを調べて係数比較などにより導くことができるが、ここでは詳細は省略する。(cf. [Na])

4. グラスマン型の  $V^I$  の記述

ここでは、次の節で述べる結果の説明のために  $A_{n-1}$  の Coxeter 群である  $n$  次対称群  $W = S_n$  の極大パラボリック部分群  $W_I$  による coset の最短元の集合  $V^I = W/W_I$  を、組合せ論的に記述する。極大パラボリック部分群  $W_I$  は、 $S_n$  の生成元である互換  $s_i = (i, i + 1)$  の集合  $S = \{s_i | i = 1, 2, \dots, n - 1\}$  の中の一つ  $s_k$  を除いた集合  $I = S - \{s_k\}$  で生成される  $A_{k-1} \times A_{n-k-1}$  型の Coxeter 群である。 $(W_I \simeq S_k \times S_{n-k})$  剰余類の最短代表元は、次のように記述できる。

2つの文字  $\alpha, \beta$  から成る長さ  $n$  の文字列で、 $\alpha$  の数が  $k$  個、 $\beta$  の数が  $n - k$  個のもの全体を  $V_{k,n-k}$  とおく。

この集合と、 $V^I = W/W_I$  に1対1の対応を付けることができる。 $V_{k,n-k}$  の要素を1つ選んだとき、その文字列の中で  $\alpha$  の部分を、左から  $1, 2, \dots, k$  とし、 $\beta$  の部分を、左から  $k + 1, k + 2, \dots, n$  とすることで、 $1, 2, \dots, n$  の置換を得る。この置換は、 $W_I \setminus W$  の要素に対応するので、この逆元をとると  $V^I$  の元となる。 $x \in V^I$  に対応している  $\alpha - \beta$  列を  $t(x) \in V_{k,n-k}$  で表すことにする。

例)  $x = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 5 & 6 & 2 & 4 \end{pmatrix} \in S_6 / (S_4 \times S_2)$  に対して、 $t(x) = \alpha\beta\alpha\beta\alpha\alpha$  である。

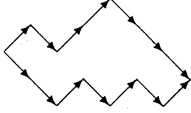
三分律は、次のように表現される。

$s_i$  に対して、 $t(x) = t_1 t_2 \dots t_n \in V_{k,n-k}$  のとき、 $k$  によらず

- a)  $(s_i, x) \in A \iff t_i = \alpha, t_{i+1} = \beta$
- b)  $(s_i, x) \in B \iff t_i = \alpha, t_{i+1} = \alpha$  または、 $t_i = \beta, t_{i+1} = \beta$
- c)  $(s_i, x) \in C \iff t_i = \beta, t_{i+1} = \alpha$

さらにこのとき、Bruhat order は、次のように記述される。

$\alpha$  を  $\searrow$ 、 $\beta$  を  $\nearrow$  として path で表示したとき、path の上下関係が Bruhat order となる。(始点を合わせると、 $\alpha$  と  $\beta$  の数がそれぞれ等しいので終点も一致する)

例)  $t(x) = \beta\alpha\beta\beta\alpha\alpha\alpha, t(y) = \alpha\alpha\beta\alpha\beta\alpha\beta$  のとき  となるので、 $y \leq x$  である。

$V^I$  の最短元  $e$  については、 $t(e) = \alpha^k \beta^{n-k}$  で、最長元  $v_I$  については、 $t(v_I) = \beta^{n-k} \alpha^k$  となり、 $V^I$  の任意の元  $x$  は、この2つで囲まれた長方形に正方形の格子を入れたときの lattice path に対応し、 $t(x)$  と  $t(e)$  でかこまれた正方形の数が  $v$  の長さ  $\ell(x)$  となる。さらに、この  $t(x)$  と  $t(e)$  でかこまれる部分を見ることにより  $x$  のすべての最短表示を作ることもできる。

### 5. グラスマン型の $P^I$ と $Q^I$ の組合せ論的記述

ここでは, Lascoux-Schützenberger によるグラスマン型の  $P^I$  の組合せ論的記述を説明すると同時に, 並行して対応する  $Q^I$  の組合せ論的記述をする。以下では,  $P_{v,w}^I$  を  $P_{\substack{t(w) \\ t(v)}}$  で,  $Q_{v,w}^I$  を  $Q_{\substack{t(w) \\ t(v)}}$  で表して, 添え字を  $\alpha - \beta$  列に変え, 上下が Bruhat order と合うようする。

**命題** グラスマン型 K-L 多項式  $P^I, Q^I$  は, 次の等式 (変形規則) を満たす。但し, 式に登場する  $x', x, x''$  などは  $\alpha - \beta$  列を区切った部分列を表し, 上下で対応する部分 (たとえば  $x'$  と  $y'$ ) の長さは等しいものとする。

正規化 (normalization)

$$\begin{aligned} (N_1) \quad & P_{\substack{x'\beta\alpha x'' \\ y'\alpha\beta y''}} = P_{\substack{x'\beta\alpha x'' \\ y'\beta\alpha y''}} & Q_{\substack{x'\beta\alpha x'' \\ y'\alpha\beta y''}} &= Q_{\substack{x'\alpha\beta x'' \\ y'\alpha\beta y''}} \\ (N_2) \quad & P_{\substack{x'\alpha\alpha x'' \\ y'\alpha\beta y''}} = P_{\substack{x'\alpha\alpha x'' \\ y'\beta\alpha y''}} & Q_{\substack{x'\alpha\alpha x'' \\ y'\alpha\beta y''}} &= 0 \\ (N_3) \quad & P_{\substack{x'\beta\beta x'' \\ y'\alpha\beta y''}} = P_{\substack{x'\beta\beta x'' \\ y'\beta\alpha y''}} & Q_{\substack{x'\beta\beta x'' \\ y'\alpha\beta y''}} &= 0 \end{aligned}$$

簡素化 (simplification)

$$(S) \quad P_{\substack{x'x'' \\ x'yx''}} = P_{\substack{x \\ y}} \quad Q_{\substack{x'x'' \\ x'yx''}} = Q_{\substack{x \\ y}}$$

直積分解 ( $x'$  と  $y'$  で path が閉じそこから  $x''$  と  $y''$  の path が始まる時)

$$(X) \quad P_{\substack{x'x'' \\ y'y''}} = P_{\substack{x' \\ y'}} \times P_{\substack{x'' \\ y''}} \quad Q_{\substack{x'x'' \\ y'y''}} = Q_{\substack{x' \\ y'}} \times Q_{\substack{x'' \\ y''}}$$

漸化式 (recurrence)  $c$  をくぼみ  $x'\alpha\beta x''$  の  $y'\alpha\beta y''$  に対する深さとするとき,

$$(R) \quad P_{\substack{x'\alpha\beta x'' \\ y'\alpha\beta y''}} = q^c P_{\substack{x'x'' \\ y'y''}} + P_{\substack{x'\alpha\beta x'' \\ y'\beta\alpha y''}} \quad Q_{\substack{x'\alpha\beta x'' \\ y'\alpha\beta y''}} = q^c Q_{\substack{x'x'' \\ y'y''}}$$

および,  
初期値

$$\begin{aligned} (I) \quad & P_{\substack{x \\ x}} = 1 & Q_{\substack{x \\ x}} &= 1 \\ (O) \quad & P_{\substack{x \\ y}} = 0 \text{ if } y \not\leq x & Q_{\substack{x \\ y}} &= 0 \text{ if } y \not\leq x \end{aligned}$$

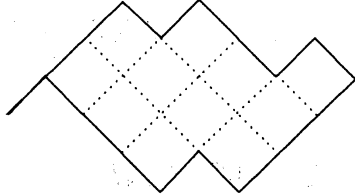
ここで, 漸化式 (R) に現れるくぼみの深さ  $c$  について説明する。path 表示での  $\alpha\beta$  部分をくぼみと言い,  $y \leq x \in V^I$  について, path 表示に正方形格子を入れたときの  $x$  の path のくぼみ  $\alpha\beta$  に対してその下の  $y$  の path までの間の正方形の数を  $y$  (の path) に対する深さという。

例

$$x = \beta\beta\beta\alpha\beta\alpha\alpha\beta\alpha \text{ のとき}$$

$$y = \beta\alpha\alpha\alpha\beta\alpha\beta\beta\beta$$

(矢印の先は省略して path を表す)



$x$  の 2 つのくぼみのうち  
 左のくぼみの深さは 2,  
 右のくぼみの深さは 1 である。

この場合次のようにして,  $P^I, Q^I$  が計算できる。

まず, 簡素化 ( $S$ ) により左端の  $\beta$  は削除できる。  $P^I$  については,

$$P_{\beta\beta\beta\alpha\beta\alpha\alpha\beta\alpha}^x = P_{\alpha\alpha\alpha\beta\alpha\beta\beta\beta}^y$$

さらに,  $\alpha\alpha$  という部分に ( $N_2$ ) を適用すると,

$$= P_{\beta\beta\beta\alpha\beta\alpha\alpha}^x$$

となる。ここで, 右側の深さ 1 のくぼみに ( $R$ ) を適用すると,

$$= qP_{\beta\beta\beta\alpha\beta\alpha}^x + P_{\beta\beta\beta\alpha\beta\alpha\alpha}^x$$

となる。第 2 項は, ( $X$ ) により  $P_{\beta\beta\beta\alpha\beta\alpha}^x$  と  $P_{\beta\alpha\alpha\alpha\beta\beta}^{\alpha\beta}$  の積に分解し, このうち後者は ( $N_1$ ) と ( $I$ ) より 1 となるので,

$$= (q+1)P_{\beta\beta\beta\alpha\beta\alpha}^x$$

となる。この場合くぼみの深さ 2 なので ( $R$ ) から

$$= (q+1)(q^2P_{\beta\beta\alpha\alpha}^{\alpha\beta} + P_{\beta\beta\alpha\beta\alpha\alpha}^{\alpha\beta})$$

以下, 同様に ( $N_1$ ), ( $N_2$ ), ( $N_3$ ) を用いて長さの差を縮め, ( $R$ ) と ( $I$ ) を利用して,

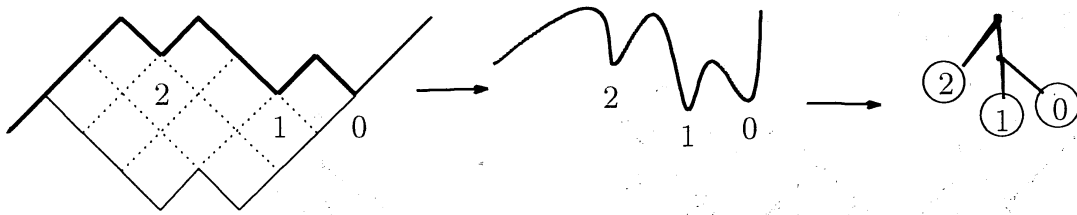
$$= (q+1)(q^2 + q + 1) \quad \text{がわかる。}$$

一方  $Q^I$  の方は, 同様に規則を当てはめはめて行こうとすると ( $N_2$ ) で異なり,

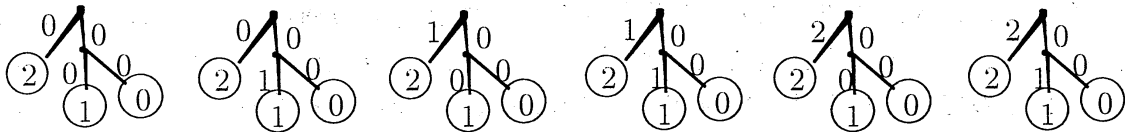
$$Q_{\beta\beta\beta\alpha\beta\alpha\alpha\beta\alpha}^x = Q_{\alpha\alpha\alpha\beta\alpha\beta\beta\beta}^y = 0 \quad \text{となる。}$$

命題に述べられたこれらの規則の証明には, 前述の,  $P^I, Q^I$  の漸化式などが用いられるが, ここでは省略する。(  $P^I$  については [La-Sc],  $Q^I$  については [Na] を参照)

上の例では, 深さ 1 のくぼみに  $q+1$ , 深さ 2 のくぼみに  $q^2 + q + 1$  が対応していることが容易に想像されるが, 一般には少し修正したような形で,  $x$  の path から作られる木によって記述することができる。例では, 右端を伸ばして高さを揃え, これを左右から折りたたんで木を作る。(この場合余分な両端は取り去る)



ここで、木の枝の端はくぼみに対応し、そこに深さを○の中に入れて書いてある。この枝に、端から単調に減少するように枝に重み(0以上の整数)を入れた図を考え、そのすべてを求める。この場合は、



となり、それぞれの図  $D$  についてその重み  $wt(D)$  は、枝に付けられた数の総和とする。それらを  $q$  のべきに掛けて加え合わせたもの  $1 + q + q + q^2 + q^2 + q^3$  が求める  $P^I$  となる。この場合は、枝の長さは1のものしかないが、一般に長さが2以上の枝については長さ1の枝がつながったものと見て、長さ1の枝ごとに数を付ける。(長さは、正方形の1辺を1とする)

定理 (Lascoux-Schützenberger)

$$P_y^x = \sum_{D: \substack{x \text{ の path から作られた木} \\ \text{の} \text{ 上} \text{ に作られる可能な図}}} q^{wt(D)}$$

定理の証明には、前述の変形規則を用いればよい。実質的には変形  $(R)$  により、注目するくぼみ  $\alpha\beta$  の深さが1つ減る項が出てくることに起因している。

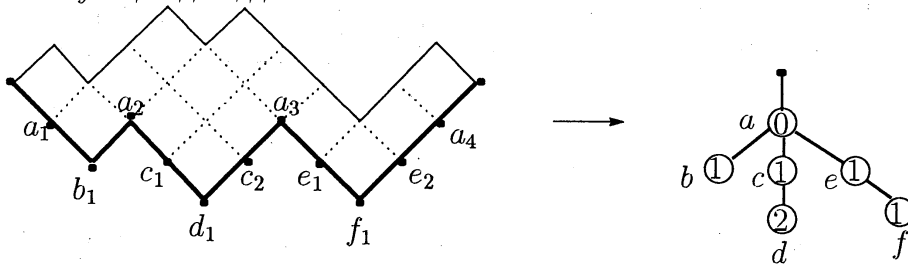
注意) 上に述べた例の計算では、 $(N_2)$  の適用により  $(y, x)$  は正規化されたペア、つまり  $y$  の列で  $\alpha\beta$  となっている位置には、 $x$  の列も  $\alpha\beta$  となっているようにした。一般の場合でも  $(N_1), (N_2), (N_3)$  を用いて変形すれば、正規化されたペアとなるのでこの場合についてのみ考えればよい。

$Q^I$  の場合は、変形規則のうち、 $(N_2), (N_3), (R)$  の部分が  $P^I$  と異なってくる。

前の例のように、正規化をする過程で、 $(N_2), (N_3)$  が適用できる状況になった場合は、 $Q^I = 0$  となる。次に別の具体例で、 $Q^I$  の計算過程を見る。



例  $x = \beta\alpha\beta\beta\alpha\beta\alpha\alpha\beta\beta\alpha$  のとき  
 $y = \alpha\alpha\beta\alpha\alpha\beta\beta\alpha\alpha\beta\beta\beta$



$Q^I$  の場合は,  $y$  の path を折りたたんで木を作る。このとき左から順に折りたたんでゆく過程に, 変形規則が対応している。この例では, まず  $a_1$  と  $a_2$  をくっつける。このときはさまれた  $\alpha\beta$  の深さは 1 でこれを  $b_1$  の位置の  $\circ$  の中に書く。次に,  $a_1 = a_2$  となった点と  $a_3$  をくっつける。このとき,  $d_1$  をはさむ位置の  $\alpha\beta$  の深さは 2 なので, これを  $d_1$  の位置の  $\circ$  の中に書く。この  $\alpha\beta$  を取り除くと,  $c_1 = c_2$  をはさんで  $\alpha\beta$  ができるが, その上は  $\beta\alpha$  なので,  $(N_1)$  により,  $\alpha\beta$  に直すことができる。このくぼみの深さは, 1 つ減って 1 となる。これを取り除く変形に対応して,  $c_1 = c_2$  の位置の  $\circ$  の中に 1 を書く。次に,  $a_1 = a_2 = a_3$  と  $a_4$  をくっつける。このとき,  $f_1$  をはさむ  $\alpha\beta$  の深さは 1 で, それを取り除いた後に  $e_1 = e_2$  をはさむ  $\alpha\beta$  も深さ 1 となるので,  $f, e$  それぞれの位置の  $\circ$  の中に 1 を書く。このように  $\alpha\beta$  のペアを取り去ってゆくと, 最後に 1 個の正方形が残るが, これは  $(N_1)$  により深さ 0 のくぼみに変形される。そこで,  $a$  の位置の  $\circ$  の中に 0 を書く。このようにしてえられる木の節に数の書かれた図を  $D'$  とおく。このとき,  $\circ$  の中に書かれた数はすべて変形  $(R)$  による  $q$  べきの指数なのでこの総和を,  $wt'(D')$  と書くと求める  $Q^I$  は,  $q^{wt'(D')}$  となる。例では  $Q_x = q^6$  となる。

定理

$$Q_x = \begin{cases} q^{wt'(D')} & \text{図 } D' \text{ が作れるとき} \\ 0 & \text{図 } D' \text{ が作れないとき (折り畳む途中で,} \\ & (N_2), (N_3) \text{ の適用を受ける場合)} \end{cases}$$

実際には,  $wt'(D')$  の計算法や 0 となる判定について精密化することもできる。各節点に付ける数の制約条件は,

- (1) 1 つの節点から出る枝の先には, すべて同じ数が付く
- (2) 枝の両端の数は等しいか, または根から遠い方が近い方より 1 つ大きいかのいずれか。
- (3) 根に付いた枝の端には 0 が入り, そこから出る枝の端には 1 が入る。

となり, 逆にこの条件を満たすものに対し正規なペア  $(y, x)$  が再現できる。但し,  $x$  と  $y$  の path で囲まれた部分がいくつかに分離している場合は, その連結成分ごとに考えるものとする。 $(Q^I$  を求めるには  $(X)$  を適用すればよいので)

最後に,

ここで述べたグラスマン型の  $Q^I$  の記述については, 元々  $A$  型のヘッケ環の Specht 加群の自然な基底と Kazhdan-Lusztig 基底の変換行列として,  $Q^I$  が登場するという結果 [Na] のうちの具体的な計算例として用意したものである。

## 参考文献

- [Bo] B.D.Boe, *Kazhdan-Lusztig polynomials for Hermitian symmetric spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **309** (1988),279–294.
- [Ca-Co] L.Casian and D.H.Collingwood, *The Kazhdan-Lusztig conjecture for generalized Verma modules*, Math. Z. **195** (1987),581–600.
- [De] V.V.Deodhar, *On some geometric aspects of Bruhat orderings II. The parabolic analogue of Kazhdan-Lusztig polynomials*, J. Algebra **111** (1987),483–506.
- [Do] J.M.Douglass, *An inversion formula for relative Kazhdan-Lusztig polynomials*, Comm. Algebra **18** (1990),371–387.
- [Fr-Kh-Ki] I.B.Frenkel M.G.Khovanov and A.A.Kirillov, *Kazhdan-Lusztig polynomials and canonical basis*, Transform. Groups **3** (1998),321–336.
- [Hu] J.E.Humphreys, *Reflection groups and Coxeter groups*, Cambridge Stud. Adv. Math., vol. 29, Cambridge UP, 1990.
- [Ir] R.S.Irving, *A filtered category  $\mathcal{O}_S$  and applications*, Mem. Amer. Math. Soc. **419**, 1990.
- [Ka-Lu] D.Kazhdan and G.Lusztig, *Representations of Coxeter groups and Hecke algebras*, Invent. Math.**53** (1979),165–184.
- [Ka-Ta] M.Kashiwara and T.Tanisaki, *Parabolic Kazhdan-Lusztig polynomials and Schubert varieties*, math.RT/9908153
- [La-Sc] A.Lascoux and M.P.Schützenberger, *Polynômes de Kazhdan et Lusztig pour les grassmanniennes*, Astérisque **87-88** (1981), 249–266.
- [Na] H.Naruse, *On a relation between Specht module and left cell module of Hecke algebra of type  $A_{n-1}$* , in preparation.
- [Xi] Nanhua Xi, *Representations of Affine Hecke Algebras*, Lecture Notes in Math. 1587 Springer(1994).