数理解析研究所講究録
1192巻 2001年 140-152

Applications of differential subordinations for univalent functions

群馬工業高等専門学校　斎藤　斉

HITOSHI SAITOH
Department of Mathematics, Gunma National College of Technology
Maebashi, Gunma 371-8530, Japan
E-mail; saitoh@nat.gunma-ct.ac.jp

December 20,2000

[8]において、differential subordinationに関する結果を示した。この小論では単葉関数論への応用をいくつか述べる。以下必要となる定義を書く。

Def. 1　$\psi: \mathbb{C}^3 \times U \to \mathbb{C}$ とし、h を U で単葉とする。U で正則で、次の (2nd-order) differential subordination

$$\psi(p(z), zp'(z), z^2p''(z); z) \prec h(z) \tag{1}$$

をみたすとき、p は differential subordination の解とよばれる。単葉関数 q は (1) をみたすすべての p に対して $p \prec q$ ならば differential subordination の解の dominant という。さらに (1) のすべての dominants に対して $\tilde{q} \prec q$ をみたす $\tilde{q}$

を (1) の best dominant という.

Def. 2 $r=r_1+r_2 i$, $s=s_1+s_2 i$, $t=t_1+t_2 i$ とおく.
n は正の整数とし、a は $\mathrm{Re}\, a>0$ である複素数とする.
$\Psi_n(a)$ で以下の条件をみたす関数の族とする.

$\psi(r,s,t):\ \mathbb{C}^3 \longrightarrow \mathbb{C}$

1) $\psi(r,s,t)$ はある領域 $D\subset\mathbb{C}^3$ で連続,

2) $(a,0,0)\in D$ かつ $\mathrm{Re}\,\psi(a,0,0)>0$,

3) $(r_2 i, s_1, t_1+t_2 i)\in D$,

$$s_1 \leqq -\frac{n|a-r_2 i|^2}{2\,\mathrm{Re}\, a} \quad \text{かつ} \quad s_1+t_1 \leqq 0$$

のとき、$\mathrm{Re}\,\psi(r_2 i, s_1, t_1+t_2 i) \leqq 0$.

$\Psi_n \equiv \Psi_n(1)$ とおく.

以下、知られた結果を述べる.

Theorem A ([3])

Let $\psi\in\Psi_n(a)$ with corresponding domain D ant let $p(z)=a+p_n z^n+\cdots$ be regular in U with $p(z)\not\equiv 0$ and $n\geqq 1$. If $(p(z), zp'(z), z^2p''(z))\in D$ where $z\in U$ and

$$\mathrm{Re}\,\psi(p(z), zp'(z), z^2p''(z))>0 \quad (z\in U),$$

then $\operatorname{Re} p(z) > 0$ for all $z \in U$.

Theorem B ([3])

Let $\psi \in \Psi_1$ and let $q(z)$ be a regular function satisfying $\operatorname{Re} q(z) > 0$. If the differential equation

$$\psi(p(z), zp'(z), z^2 p''(z)) = q(z) \qquad (p(0)=1)$$

has a solution $p(z)$ regular in U then $\operatorname{Re} p(z) > 0$.

Lemma C ([3])

Let $h(r, s, t) : \mathbb{C}^3 \longrightarrow \mathbb{C}$ such that

1) $h(r, s, t)$ is continuous in a domain $D \subset \mathbb{C}^3$,

2) $(a, 0, 0) \in D$ and $|h(a, 0, 0)| < J$ $(J > 0)$,

3) $|h(Je^{i\theta}, Ke^{i\theta}, L)| \geqq J$ when $(Je^{i\theta}, Ke^{i\theta}, L) \in D$, $K \geqq J\lambda$ and $\operatorname{Re}[Le^{-i\theta}] \geqq K(1-\lambda)$.

Let $w(z) = a + w_n z^n + \cdots$ be regular in U with $w(z) \not\equiv a$ and $n \geqq 1$. If $(w(z), zw'(z), z^2 w''(z)) \in D$ when $z \in U$ and

$$|h(w(z), zw'(z), z^2 w''(z))| < J$$

when $z \in U$ then $|w(z)| < J$ when $z \in U$.

Theorem D ([3])

Let h satisfy the conditions of Lemma C with $n = 1$,

and let $b(z)$ be a regular function satisfying $|b(z)| < J$.
If the differential equation

$$h(w(z),\ zw'(z),\ z^2 w''(z)) = b(z) \quad (w(0) = a)$$

has a solution $w(z)$ regular in U then $|w(z)| < J$.

Lemma E ([4])

Let $p(z)$ be analytic in U and let $h(z)$ be convex on $\overline{U}$, with $p(0) = h(0)$. If $p(z)$ is not subordinate to $h(z)$, then there exist $z_0 \in U$ and $w_0 \in \partial U$, and $m \geqq 1$ for which $p(|z| < |z_0|) \subset h(U)$,

(i) $p(z_0) = h(w_0)$,

(ii) $z_0 p'(z_0) = m w_0 h'(w_0)$, and

(iii) $\mathrm{Re}\,[z_0^2 p''(z_0)/w_0 h'(w_0)] \geqq -m$.

Theorem F ([8])

Let $h(z)$ be convex in U with $h(0) = 0$, and let $A \geqq 0$. Suppose that $k > 1$ and $B(z)$, $C(z)$ are analytic in U and satisfy

$$k\,\mathrm{Re}\,B(z) > A + |C(z) - 1| - \mathrm{Re}\{C(z) - 1\} \qquad (2)$$

for $z \in U$. If $p(z)$ is analytic in U with $p(0) = 0$ and if $p(z)$ satisfies $Az^2 p''(z) + B(z) z p'(z) + C(z) p(z) \prec h(z)$, then $p(z) \prec h(z)$.

Thm. B より次の定理を得る.

Theorem 1

Let $\psi \in \Psi_1$ and let $q(z)$ be a regular function satisfying $\mathrm{Re}\, q(z) > \alpha$ ($\alpha < 1$). If the Euler's differential equation

$$p(z) + zp'(z) + z^2 p''(z) = q(z) \qquad (3)$$

has a solution $p(z)$ regular in U then $\mathrm{Re}\, p(z) > \alpha$.

<proof>. Def. 1 で $\psi(r, s, t) = r + s + t$ を考える. Thm. B で $q(z) - \alpha = Q(z)$, $p(z) - \alpha = P(z)$ とおくと $\mathrm{Re}\, Q(z) > 0$ となり,

$$P(z) + zP'(z) + z^2 P''(z) = Q(z)$$

は正則な解 $P(z)$ をもち, $\mathrm{Re}\, P(z) > 0$ となる. i.e., $\mathrm{Re}\, p(z) > \alpha$.

Q.E.D.

Thm. 1 の例をいくつか述べる.

Example 1

Thm. 1 で $q(z) = \dfrac{1 + (1 - 2\alpha)z}{1 - z}$ を考えると $\mathrm{Re}\, q(z) > \alpha$ である.

1) $\alpha=\frac{1}{2}$ の場合 i.e., $g(z)=\frac{1}{1-z}$, $\mathrm{Re}\, g(z)>\frac{1}{2}$

のとき，単位円内の正則な解 $p(z)$ は

$$p(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}z^n \text{ で } \mathrm{Re}\, p(z)>\frac{1}{2}.$$

2) $\alpha=0$ の場合 i.e., $g(z)=\frac{1+z}{1-z}$, $\mathrm{Re}\, g(z)>0$

のとき，単位円内の正則な解 $p(z)$ は

$$p(z)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^2+1}z^n \text{ で } \mathrm{Re}\, p(z)>0.$$

<u>Example 2</u>

Thm. 1 で $p(z)=f'(z)$ とおくと オイラーの微分方程式 (3) は次の3階の微分方程式になる：

$$z^2f'''(z)+zf''(z)+f'(z)=g(z).$$

1) $g(z)=\frac{1}{1-z}$ のとき $\mathrm{Re}\, g(z)>\frac{1}{2}$ より Thm. 1 から

$\mathrm{Re}\, f'(z)>\frac{1}{2}$ i.e., $f(z)$ は close-to-convex of order $\frac{1}{2}$ となり、$f(z)$ は U で単葉となる. また、単位円内の正則な解 $f(z)$ は

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n^2+1)} z^{n+1} .$$

2) $g(z) = \dfrac{1+z}{1-z}$ のとき $\mathrm{Re}\, g(z) > 0$ より Thm. 1 から

$\mathrm{Re}\, f'(z) > 0$ i.e., $f(z)$ は U で close-to-convex となり

能代の定理より U で単葉である. また、単位円内の正則

な解 $f(z)$ は

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{n(n^2-2n+2)} z^n .$$

<u>*Example 3*</u>

Thm. 1 で $p(z) = \dfrac{f(z)}{z}$ とおくと オイラーの微分方程式(3)は

次の 2 階の微分方程式となる;

$$z^2 f''(z) - z f'(z) + 2 f(z) = z g(z) .$$

$g(z) = \dfrac{1+z}{1-z}$ のとき $\mathrm{Re}\, g(z) > 0$ より Thm. 1 から

$\mathrm{Re}\, \dfrac{f(z)}{z} > 0$ となり, Yamaguchi [10] の結果より

$$\mathrm{Re}\, f'(z) > 0 \quad \text{for} \quad |z| < \sqrt{2} - 1$$

となる. また、この円内の正則な解は

$$f(z) = z + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2+1} z^{n+1} .$$

次に Thm. D の応用を考える.

Example 4

Thm. D において、次のオイラーの微分方程式

$$z^2 w''(z) + z w'(z) + w(z) = z \qquad (4)$$

を考える. ($b(z) = z$ の場合) .

(I) $w(z) = f'(z) - 1$ とおくと, (4) は

$z^2 f'''(z) + z f''(z) + f'(z) = z + 1$ となる. Thm. D で

$|b(z)| = |z| < 1$ であるから、 $|w(z)| = |f'(z) - 1| < 1$ となり、

$\mathrm{Re}\, f'(z) > 0$ となる. 能代の定理より $f(z)$ は close-to-convex

となり、したがって単葉となる.

(II) $w(z) = \dfrac{f(z)}{z} - 1$ とおくと (4) は

$z^2 f''(z) - z f'(z) + 2 f(z) = z^2 + z$ となる. Thm. D より

$|w(z)| = \left| \dfrac{f(z)}{z} - 1 \right| < 1$ となり、 $\mathrm{Re}\, \dfrac{f(z)}{z} > 0$ となる.

Yamaguchi [10] の結果より

$\mathrm{Re}\, f'(z) > 0$ for $|z| < \sqrt{2} - 1$

となり、 $f(z)$ は $|z| < \sqrt{2} - 1$ で close-to-convex 、

これから $|z|<\sqrt{2}-1$ で単葉となる．

次に Thm. F の応用について述べる．

Example 5

ラゲール（Laguerre）の微分方程式

$$zu'' + (\lambda+1-z)u' + nu = 0 \tag{5}$$

を考える．（n は非負の整数） この方程式は次の多項式解をもつことが知られている．

$$L_n^{\lambda}(t) = e^{t}\cdot\frac{t^{-\lambda}}{n!}\frac{d^n}{dx^n}(e^{-t}\cdot t^{n+\lambda}) \quad (n=0,1,2,\cdots)$$

(5) を $\quad z^2u'' + z(\lambda+1-z)u' + nzu = 0 \quad$ と見る．

Thm. F の仮定で $A=1,\ B(z)=2-z,\ C(z)=z\ (\lambda=1, n=1)$,

$k=2$ のときを考える．仮定の不等式 (2) は

$2x < 3-y^2 \quad (z=x+yi)$ である．

$h(z)=\dfrac{z}{z-2}$ とおくと $h(0)=0$ で $h(z)$ は convex である．

これから、次の subordination が成り立つ：

$$zu'' + (2-z)u' + u \prec \frac{z}{z-2} \Rightarrow u \prec \frac{z}{z-2}.$$

(注) $h(z)$ の像は $(u+\frac{1}{3})^2 + v^2 < \left(\frac{2}{3}\right)^2$（円板）であり不等式 $2x<3-y^2$ の領域に含まれる．

Example 6

合流型超幾何微分方程式（あるいはクンマーの微分方程式）

$$zu'' + (\gamma - z)u' - \alpha u = 0 \tag{6}$$

を考える．解は

$$u_1(z) = 1 + \frac{\alpha}{\gamma} z + \frac{\alpha(\alpha+1)}{2!\,\gamma(\gamma+1)} z^2 + \cdots$$

で与えられる．(6) を

$$z^2u'' + z(\gamma - z)u' - \alpha z u = 0$$ と見る．

ここで $\gamma = 2$, $\alpha = -1$ とおくと

$$z^2u'' + z(2-z)u' + zu = 0$$

となり，Example 5 と同じ微分方程式となる．したがって，同じ subordination が成り立つ．

良く知られた微分方程式の解の幾何学的性質については，以下の論文に詳しい．([1],[2],[6],[7],[8])．

References

1. Brown, R.K., Univalent solutions of $W'' + pW = 0$, Canad. Jour. Math. 14 (1962), 69-78.

2. Miller, S.S., A class of differential inequalities implying boundedness, Illinois Jour. Math. 20 (1976), 647-649.

3. Miller, S. S. and Mocanu, P. T., Second order differential inequalities in the complex plane, Jour. Math. Anal. and Appl. 65 (1978), 289 - 305.

4. 〃 , Differential subordinations and univalent functions, Michigan Math. Jour. 28 (1981), 157 - 171.

5. 〃 Differential subordinations and inequalities in the complex plane, Jour. Diff. Equa. 67 (1987), 199 - 211.

6. Robertson, M. S., Schlicht solution of $W'' + pW = 0$, Trans. Amer. Math. Soc. 76 (1954), 254 - 274.

7. Saitoh, H., Univalence and starlikeness of solutions of $W'' + aW' + bW = 0$, Annales Univ. Mariae Curie-Skłodowska Lublin-Polonia Vol. 63 (1999), 209 - 216.

8. 〃 On differential subordinations, 京都大学数理解析研究所講究録 1164 (2000), 133 - 143.

9. Whittaker, E. T. and Watson, G. N., A Course of Modern Analysis, Cambridge Univ. Press (1902).

10. Yamaguchi, K., On functions satisfying $\mathrm{Re}\{f(z)/z\} > 0$, Proc. Amer. Math. Soc. 17 (1966), 588 - 591.