

## 在庫補充の最適タイミング

大阪府立大学 (University of Osaka Prefecture)

梅田佳成 (Yoshishige Umeda)

北條仁志 (Hitoshi Hojo)

寺岡義伸 (Yoshinobu Teraoka)

### 1 はじめに

各客がポアソン過程に従ってその店に到着し、商品を確率量だけ購入する。店は倉庫に一定の許容量  $U$  をもっており、この中での合理的な経営を強いられている。また、在庫が底をつく (在庫レベルが  $0$  を下回る) と、店は商品を販売することが出来なくなる。それは、客の信頼を失い、とても大きな損失を発生させてしまう。これを防ぐためには在庫切れが起こる前に商品を入荷すればよい。しかしながら、入荷時期を早くすると入荷の回数が増える。そのために商品の入荷費用が余分にかかってしまい、この場合も大きな損失が発生する。

本研究ではこれらの損失を最小限に抑える方法として、安全在庫量を設定し、在庫切れが起こる前に入荷するモデルにおいて、単位時間あたりの期待費用を最小にするような最適在庫補充政策を考察する。

### 2 モデル

以下のような仮定のもとで表現できるようなモデルを考える。

一定の許容在庫量をもつある店である商品 (例えばガソリンなど) を販売することを考える。客は、強度関数  $\lambda$  を持つポアソン過程に従って到着し、商品を購入する。 $S_j$ , ( $j = 0, 1, 2, \dots$ ) を  $j$  人目の客の到着時間を表す確率変数とし、 $S_0 = 0$  とする。その時、時刻  $t$

までに  $j$  人以上の客が到着する確率  $H_j(t)$  は,

$$H_j(t) \equiv Pr\{S_j \leq t\} = \sum_{i=j}^{\infty} \frac{(\lambda t)^i}{i!} e^{-\lambda t} \quad (j = 0, 1, 2, \dots) \quad (1)$$

で与えられる。  $N(t)$  を時刻  $t$  までの客の到着人数とすると、時刻  $t$  までにちょうど  $j$  人の客が到着する確率  $F_j(t)$  は,

$$F_j(t) \equiv Pr\{N(t) = j\} = H_j(t) - H_{j+1}(t) \quad (j = 0, 1, 2, \dots) \quad (2)$$

となる。

$j$  人目の客は、商品を  $Y_j$ , ( $j = 0, 1, 2, \dots$ ) だけ購入する。ここで、 $Y_j$  は分布関数  $G(x) = Pr\{Y_j \leq x\}$  をもつ独立同一分布に従う確率変数である。 $Z_j$ , ( $j = 0, 1, 2, \dots$ ) を  $j$  人目までの総購入量とする。ただし、 $Z_0 = 0$  とする。その時、 $Z_j$  は、 $Z_j \equiv \sum_{i=1}^j Y_i$  ( $j = 1, 2, 3, \dots$ ) で表される累積過程で、

$$Pr\{Z_j \leq x\} \equiv G^{(j)}(x) \quad (j = 0, 1, 2, \dots) \quad (3)$$

である。ただし、 $G^{(j)}(x)$  は  $G(x)$  の  $n$  重たたみ込みで、

$$G^{(0)}(x) \equiv \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \quad (4)$$

とする。連続型分布関数  $G(x)$  に対して、 $\bar{G}(x)$  を寿命関数、 $g(x)$  を密度関数とする。すなわち、

$$\bar{G}(x) = 1 - G(x) = Pr\{Y_j > x\}, \quad g(x) = \frac{dG(x)}{dx}$$

である。

この店の倉庫の許容量は  $U$  なので、総販売量が  $U$  を超えると在庫はなくなり、すぐに入荷する必要が出てくる。一般には、在庫切れは非常に高い損失を生じさせる。この損失を抑える為には、事前に商品を入荷することが望ましい。損失の点から、在庫切れになる前に商品を入荷すると在庫切れによる損失は生じないが、同時にそれは入荷時期を早めることとなり、結果的に入荷回数が増え、商品の入荷費用が余分にかかってしまうことにな

る。したがって、事前の入荷はこれらの損失を可能な限り抑えるように最適に行われる必要がある。

以上のことから、次のような政策を考えるのが自然である。:

入荷は、在庫レベルが安全在庫量  $u$  ( $0 < u < U$ ) を下回った時に行われる。

ここで、 $u = 0$  は事前の入荷がなく在庫切れ後のみ入荷することを意味し、 $u = U$  は常に在庫補充を行う政策を意味する。ここで、この政策の解析を簡単にするために、次の仮定を与える。

1. 入荷は瞬時に行われる。
2. 商品の入荷費用は入荷量に関係なく一律  $C_r$  とし、また、在庫切れ時の損失は不足した量に関係なく一律  $C_p$  とする。

本稿の目的は、無限期間に対する単位時間あたりの期待費用  $C(u)$  を最小にするような最適安全在庫量  $u^*$  を決定することである。

### 3 解析

在庫は入荷によって再生されるので、2つの隣り合う再生の時間間隔を再生過程に対する周期と定義する。そうすると Ross の再生報酬理論 (renewal reward theory) から、無限期間に対する単位時間あたりの期待費用  $C(u)$  は、期待周期費用  $R(u)$  と期待周期長  $L(u)$  の比 (すなわち、 $\frac{R(u)}{L(u)}$ ) として表すことが出来る。そのためまず、期待周期費用  $R(u)$  と期待周期長  $L(u)$  の2つの量に対する式を求める事から始める。ここで、これらは時刻に関係がないので、時刻による条件付けは考えなくてよい。

これより、在庫切れが発生する確率  $\alpha(u)$  は、

$$\begin{aligned}\alpha(u) &= \sum_{j=1}^{\infty} \Pr\{Z_{j-1} \leq U-u, Z_j > U\} \\ &= 1 + M(U-u) - \sum_{j=1}^{\infty} \int_0^{U-u} G(U-x) dG^{(j-1)}(x)\end{aligned}\quad (5)$$

である。ここで、

$$M(u) = \sum_{j=1}^{\infty} G^{(j)}(u) \quad (6)$$

とする。

また、在庫レベルが正であり、安全在庫量  $u$  を下回ったことにより入荷が起こる確率  $\beta(u)$  は、

$$\begin{aligned}\beta(u) &= \sum_{j=1}^{\infty} \Pr\{Z_{j-1} \leq U-u < Z_j \leq U\} \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \int_0^{U-u} G(U-x) dG^{(j)}(x) - M(U-u)\end{aligned}\quad (7)$$

で与えられる。容易にわかるように、 $\alpha(u) + \beta(u) = 1$  である。

(5), (7) 式を使うと、期待周期費用  $R(u)$  は

$$R(u) = C_r + C_p \left[ 1 + M(U-u) - \sum_{j=1}^{\infty} \int_0^{U-u} G(U-x) dG^{(j-1)}(x) \right] \quad (8)$$

となる。

次に、期待周期長  $L(u)$  は

$$L(u) = \frac{1 + M(U-u)}{\lambda} \quad (9)$$

で与えられる。

(8), (9) 式と Ross の再生報酬理論より、無限期間に対する単位時間あたりの期待費用  $C(u)$  は

$$C(u) = \lambda \left[ \frac{C_r + C_p \left\{ 1 + M(U-u) - \sum_{j=1}^{\infty} \int_0^{U-u} G(U-x) dG^{(j-1)}(x) \right\}}{1 + M(U-u)} \right] \quad (10)$$

となる。

$C(u)$  を最小にするような安全在庫量  $u$  を求める。  $C(u)$  を  $u$  について微分し、0 と置くことによって

$$\sum_{j=1}^{\infty} \int_0^{U-u} [G(U-x) - G(u)] dG^{(j-1)}(x) = \frac{C_r}{C_p} \quad (11)$$

を得る。上式の左辺を  $V(u)$  と置くと

$$\frac{dV(u)}{du} = -g(u)[1 + M(U-u)] < 0 \quad (12)$$

が成立する。また、

$$\lim_{u \rightarrow 0} V(u) = M(U) \quad (13)$$

$$\lim_{u \rightarrow U} V(u) = 0 \quad (14)$$

である。したがって、  $M(U) > \frac{C_r}{C_p}$  の時、(11) を満たす  $u$  はただ一つ存在する。

以上より、次の結果が得られる。

**Theorem.** 最適在庫補充政策は次のように与えられる。:

(i) もし、

$$M(U) > \frac{C_r}{C_p} \quad (15)$$

が成り立つならば、(11) 式を満たす唯一根を  $u^*$  と置く。最適在庫補充政策は、在庫レベルが  $u^*$  を下回った瞬間に  $U$  になるまで補充する。この時、単位時間あたりの最適期待費用は、

$$C(u^*) = \lambda C_p [1 + G(u^*)] \quad (16)$$

で与えられる。

(ii) (11) 式を満たす解が  $0 < u < U$  に存在しないならば、  $u^* = 0$  と定める。これは、最適在庫補充政策は在庫切れ後に入荷することを意味している。この時、単位時間あたりの

最適期待費用は,

$$C(u^*) = \lambda \left[ \frac{C_r + C_p}{1 + M(U)} \right] \quad (17)$$

で与えられる。

## 4 考察

本稿では、客がポアソン過程にしたがって到着し、入荷費用・在庫切れ時の損失がそれぞれ入荷数・不足数に関係なく一定、かつ、入荷は瞬時に行われるという仮定のもとで考察を行った。その結果、合理的に経営を進めていくうえでポイントとなる最適安全在庫量  $u^*$  は、(11),(15)式を見てわかるように、商品の入荷費用  $C_r$  と在庫切れ時の損失  $C_p$  との比率に大きく関わっていることがわかった。よって、この比率の大きさによって最適安全在庫量を設定すればよいことになる。

しかし、現実のモデルとしては、入荷時に必要な費用が入荷数に比例すること、商品の入荷に時間がかかることなどが多く、在庫の保持費用がかかる場合さえもある。これらの場合については今後の研究課題とし、より現実のものとしていきたい。

## 参考文献

- [1] Heyman,D.P. and Sobel,M.J., *Handbooks in Operations Research and Management Science Vol.2*, Elsevier Science Publishers, North-Holland, Amsterdam (1990).
- [2] Murthy,D.N.P. and Nguyen,D.G., Study of Two-Component System with Failure Interaction, *Naval. Res. Logist. Quart.* 32. 239-247 (1985).
- [3] 岡村寛之, 土肥正, 尾崎俊治, コンピュータシステムの自動スリープ機能による省電力効果 I - 再生過程によるモデル化, 情報処理学論文誌報告, Vol.39 No.6. 1858-1869 (1998).

- [4] 尾崎俊治, 確率モデル入門, 朝倉書店 (1996).
- [5] Ross, M.S., *Introduction to Probability Models, Sixth Edition*, Academic Press, San Diego (1997).
- [6] Satow, T. and Osaki, S., Optimal Replacement Policies for A Two-unit System with Shock Damage Interaction, *Proceedings of the ASSM2000: International Conference on Applied Stochastic System Modeling*, Kyoto, 206-215 (2000).