

## エネルギー制約のあるデイトム探索ゲームの近似解

防衛大学校情報工学科 宝崎隆祐 (Ryusuke Hohzaki) 飯田耕司 (Koji Iida)  
Department of Computer Science,  
National Defense Academy

### 1 はじめに

目標物の探知を意図する海難活動、軍事行動等において、暴露された目標物の位置（デイトム点）や時刻情報をデイトム情報と言い、この情報により動機付けられた探索者による探索活動をデイトム探索と呼ぶ。第2次大戦中の米海軍のOR活動の理論的成果を纏めたB.O.Koopman[13]も、デイトム点からランダムな針路をとって一定速度で拡散する目標物に対する探索についてすでに論じている。このような具体的なオペレーションをそのままモデル化したゲームの研究として、セル空間上で隣接セルに移動できる拡散目標の探索に関するMeinardi[14]の研究がある。彼は、1次元セル空間において存在確率をできるだけ一様にするように目標が移動することを当面の問題にして問題を解いているため、その解法は汎用性に欠けており、3時点程度のサイズの問題しか扱っていない。デイトム探索の状況が如実に現れるオペレーションは、対潜戦における航空機対潜水艦のゲームである。Danskin[2]は定針定速運動をする潜水艦が初期時点でその針路、速力を選び、対潜へりは垂下型音波探知機の投下位置を選ぶという具体的な戦略をもつ対潜水艦戦のゲームにおける均衡解を求めている。デイトム探索とは直接関係ないものの、Baston and Bostock[1]やGarnaev[4]は、1次元空間上での潜伏潜水艦に対するヘリからの爆雷投下による破壊確率尺度のゲームを議論している。1次元離散空間上で目標物と探索者の双方の移動を議論したものにWashburn[17]があるが、目標物、探索者ともにその移動に制限はなく、同一セル選択による探知発生までの総探索距離を支払いとする多段ゲームである。潜伏する目標物に対してTraveling costを支払いとした研究としてKikuta[11, 12]がある。また、両プレイヤーのセル選択によって各時点で決まる支払いの時間累積を総支払いとする1段階ゲームの研究にEagle[3]がある。彼は現在いるセルから移動可能なセルに制限を加えることで実質的にプレイヤーの速度制約を考慮している。位置選択を探索者の戦略とするこれらの研究に対し、探索努力の探索空間上への配分を探索者の戦略とみなすAllocation Gameの研究がある[5]。その最も基本的なモデルは、1地点に潜伏する静止目標に対する探索者の探索努力配分ゲームである。支払いとして探知確率や探索利得をもつゲームの研究が、Nakai[15]やIida, Hohzaki and Sato[9]により行われている。探索者の一方的な最適努力配分問題が静止目標物から移動目標物に対する問題へと発展したように、目標物を静止したものから移動するものへ換えたゲームの研究としてはIida, Hohzakiらの研究[10, 6, 7]があり、それらを一般化したゲームに対する汎用的数値解法はHohzaki[8]が提案している。しかし、これらの研究においては有限数の目標物経路のオプションが最初から設定されており、目標物はそのどれかを選択するという形での戦略を採っている。

以上で概観したようにデイトム探索または移動目標に対する探索ゲームでは、目標物移動の制約として高々最大速度制約を設定している研究がほとんどであり、また、目標物の運動性も高々隣接セルへ移動可能、または予め設定されたいくつかの経路の選択といった仮定が多い。一方、ここで取り扱うデイトム探索ゲームでは、目標物の移動パスは連続空

問上では物理的に連続で、任意かつ無数に存在する。また、その運動性にはエネルギー制約が課せられており、問題には従来にない現実性がある。この制約により、時間的なマルチコプ性が成り立たないため取り扱いが難しい。ここでの問題は、目標物はデイトム点からの連続的移動という戦略を決めることができ、探索者は探索努力配分戦略をもつ1段階の Allocation Game である。

## 2 デイトム探索ゲームの定式化

- (1) 探索空間を2次元連続ユークリッド空間  $R^2$  とし、時刻  $t = 0$  に目標物は原点 (デイトム点) に存在する。
- (2) 探索者はこのデイトム情報を得て、タイムレイト  $\tau$  から時刻  $T$  まで目標物の探索を実施する。探索にあたっては単位時間あたり  $\rho$  の探索努力が利用可能であり、これを任意の地点に分割・投入して目標物探知に努める。
- (3) 最初原点に位置していた目標物は時刻  $t = 0$  以降  $R^2$  上を連続的に直進移動するが、速度  $v$  を使用するにあたっては、単位時間あたりエネルギー量  $\mu(v)$  ( $v$  の凸増加関数) を消費する。また、使用速度は最大速度  $\bar{S}$  を越えてはならず、初期時点において保持しているエネルギー総量は  $E$  である。
- (4) ある地点に存在する目標物に対する探知確率がそこに投入される探索努力量に比例すると仮定すれば、目標の存在確率密度で重み付けられた努力量の空間・時間積分により目標探知確率の指標が得られる。ここでの問題は、この指標を支払関数とし、探索努力の配分戦略をもつ探索者をマキシマイザー、エネルギー制約下で連続移動行動をとる目標物をミニマイザーとする2人ゼロ和ゲームである。

問題は原点を中心として点対称であるから、平面座標を原点からの距離  $x \in [0, \infty)$  により代表し、時刻  $t$ 、地点  $x$  における探索者の探索努力密度を  $h(x, t)$  とする。移動による目標物の存在確率密度を  $f(x, t)$  とすると、 $\mathbf{H} = \{h(x, t), x \in [0, \infty), t \in [\tau, T]\}$ 、 $\mathbf{F} = \{f(x, t), x \in [0, \infty), t \in [0, T]\}$  に対する支払関数は次式で与えられる。

$$G(\mathbf{H}, \mathbf{F}) = \int_{\tau}^T \int_{X_t} h(x, t) f(x, t) 2\pi x dx dt \quad (1)$$

ただし、 $X_t$  は時刻  $t$  における目標物の存在領域である。探索努力密度  $h(x, t) \geq 0$  の制約は  $\int_0^{\infty} h(x, t) 2\pi x dx \leq \rho$ 、 $\tau \leq t \leq T$  であり、目標存在確率密度  $f(x, t) \geq 0$  は目標物の移動法則に依存しつつ  $\int_{X_t} f(x, t) 2\pi x dx = 1$ 、 $0 \leq t \leq T$  を満たしている。目標物の移動は、時刻  $t$  における目標位置  $x(t)$  と速度  $v(t) := dx(t)/dt$  に関して、 $v(t) \leq \bar{S}$ 、 $\int_0^T \mu(v(t)) dt \leq E$  の制約をもつ。

## 3 離散モデルと最適解

ゲームの解の直感的説明のため、ここでは1次元離散モデルによる定式化とゲームの解の導出を行う。時間、地理空間をそれぞれ離散時点  $T = \{1, \dots, T\}$ 、セル空間  $K = \{1, \dots, K\}$  とする。時点  $t$  におけるセル  $i$  から次の時点  $t + 1$  におけるセル  $j$  への移動量は速度と見なせるから、エネルギー消費  $\mu(i, j)$  を伴う。仮に初期時点  $t = 0$  にお

いてデイトム点であるセル 1 に目標物が存在したと仮定すると、エネルギー総量制約  $E$  及び最大速度制約を満たす実行可能なパスは有限個しかない。その集合を  $\Omega$ 、パス  $\omega \in \Omega$  の時点  $t$  でのセルを  $\omega(t)$  とする。また時刻  $t$  にセル  $i \in \mathbf{K}$  を通るパス全体を  $\Omega_i^t := \{\omega \in \Omega | \omega(t) = i\}$  で表す。時点  $t$  での使用可能量が  $\Phi(t)$  である探索者の探索努力配分を  $\{\varphi(i, t), i \in \mathbf{K}, t = \tau, \dots, T\}$ 、目標物がパス  $\omega$  を選択する確率を  $\{\pi(\omega), \omega \in \Omega\}$  で表せば、支払関数は  $G(\varphi, \pi) = \sum_{\omega} \pi(\omega) \sum_{t=\tau}^T \varphi(\omega(t), t)$  となり、 $\max_{\varphi} G(\varphi, \pi) = \max_{\varphi} \sum_{t=\tau}^T \sum_i \left( \sum_{\omega \in \Omega_i^t} \pi(\omega) \right) \varphi(i, t) = \sum_{t=\tau}^T \Phi(t) \max_i \left( \sum_{\omega \in \Omega_i^t} \pi(\omega) \right)$  を得る。これから、目標物の最適パス選択確率は次の線形計画問題  $P_D^T$  を解くことにより、また探索者の最適探索努力配分はその双対問題  $P_D^S$  を解くことにより得られる。

$$(P_D^T) \quad \min_{\{\nu(t), \pi(\omega)\}} \sum_{t=\tau}^T \Phi(t) \nu(t)$$

$$s.t. \quad \sum_{\omega \in \Omega_i^t} \pi(\omega) \leq \nu(t), \quad t = \tau, \dots, T, \quad i \in \mathbf{K}, \quad \pi(\omega) \geq 0, \quad \omega \in \Omega, \quad \sum_{\omega \in \Omega} \pi(\omega) = 1$$

[数値例] 離散モデルの定式化そのものは簡単であるものの、実行可能パス群  $\Omega$  のサイズは時点数に対しべき乗的に増加し、大きなサイズの問題を解くことは極めて困難になることが容易に想像できる。

単純なケースとして、セル番号  $\mathbf{K} = \{1, \dots, K\}$  が 1 次元空間での原点からの地理的距離を表すものとする、時点  $t$  でのセル  $i$  から次の時点  $t+1$  でのセル  $j$  への移動量  $|i - j|$  は速度と見なせる。この移動にエネルギー消費  $\mu(i, j)$  が伴うものとする。  $T = 9, K = 10, E = 9, \bar{S} = 3, \Phi(t) = 1, \mu(i, j) = (i - j)^2$  の場合には実行可能な経路は 25312 本存在し、問題  $P_D^T$  を解き得られた各経路の選択確率  $\{\pi(\omega)\}$  から各時点、各セルでの目標物の存在確率を求めたものが表 1 である。全経路 25312 本のうち選択確率が  $1/25312$  以上である経路は約 6 分の 1 の 4325 本であり、残りの 6 分の 5 の経路は目標物にとってあまり意味のない経路であった。それらの中で、遠くへ拡散する経路 {セル 1, 3, 5, 6, 6, 6, 6, 6, 6}, {1, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4} 及び {1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 8, 8, 8} は、それぞれ高い選択確率 0.0926, 0.0983 及び 0.0430 を与えられている。また、問題  $P_D^S$  により得られた探索者の最適探索努力配分が表 2 であり、ゲームの値は 1.49 であった。

表 1 から、目標物は自らの存在確率をできるだけ一様化して、探索者の探索努力を分散化しようとする意図が読みとれる。ただし、エネルギー制約  $E = 9$  のため、目標存在圏の境界付近に沿った経路は少なく、境界付近の存在確率をも一様化することは困難である。探索努力配分の面からみると、時点  $t = 4$  以降最適配分は一様でなく微妙に変化している。それは、表 1 の目標存在確率の裏付けが個々の目標経路の選択にあり、早い時点で目標存在圏の境界付近に到達する目標は、エネルギー制約からそれ以降はその地点付近に留まらざるを得ず、表 2 の配分はそれらの個々の経路の可能性を考慮した配分となっているのである。たとえば、セル 1 から出発した目標物が時点  $t = 1$  でセル 4 まで到達すれば目標物はその時点でエネルギー総量  $E = 9$  を消費しており、以後セル 4 に停止しているはずである。表 2 の探索努力配分では、時点  $t = 4, 7$  で境界付近の配分量をやや多くすることにより、これらの時期に遠地点への拡散目標物に対する探索にやや重点を置く反面、早い時期に拡散し以後存在圏内部に取り残された目標物に対しては  $t = 8, 9$  の遅い時期に重点的に探索している。

表1. 目標物の存在確率

10	0	0	0	0	0	0	0	0	.030
9	0	0	0	0	0	0	0	.056	.026
8	0	0	0	0	0	.069	1/8	.118	.118
7	0	0	0	0	.094	.133	1/8	.118	.118
6	0	0	.095	1/6	.151	.133	1/8	.118	.118
5	0	1/5	.181	1/6	.151	.133	1/8	.118	.118
4	.097	1/5	.181	1/6	.151	.133	1/8	.118	.118
3	.301	1/5	.181	1/6	.151	.133	1/8	.118	.118
2	.301	1/5	.181	1/6	.151	.133	1/8	.118	.118
1	.301	1/5	.181	1/6	.151	.133	1/8	.118	.118
Cell / t =	1	2	3	4	5	6	7	8	9

表2. 探索努力配分

10	0	0	0	0	0	0	0	0	0
9	0	0	0	0	0	0	0	0	0
8	0	0	0	0	0	0	.138	.111	.116
7	0	0	0	0	0	.046	.094	.116	.111
6	0	0	0	.440	.184	.159	.128	.116	.111
5	0	.024	.112	.328	.184	.159	.128	.116	.111
4	0	.244	.222	.145	.184	.159	.128	.193	.218
3	1/3	.244	.222	.029	.149	.159	.128	.116	.111
2	1/3	.244	.222	.029	.149	.159	.128	.116	.111
1	1/3	.244	.222	.029	.149	.159	.128	.116	.111
Cell / t =	1	2	3	4	5	6	7	8	9

## 4 連続モデルのゲーム値の推定

### 4.1 下界評価

時刻  $t$  における目標存在領域の最大半径は  $z(t) := \max \int_0^t v(\xi) d\xi$  s.t.  $0 \leq v(\xi) \leq \bar{S}$ ,  $\xi \in [0, t]$ ,  $\int_0^t \mu(v(\xi)) d\xi \leq E$  で与えられる. これは変分法を用いることにより容易に解け, 解は定速運動となる. 従って, これらの最大半径  $\{z(t)\}$  の内部で常に一様存在分布を生起させる過大評価した目標物の運動により, ゲーム値の下界  $\underline{G} = \int_{\tau}^T \rho / (\pi z(t)^2) dt$  が得られる.  $\bar{t} := E / \mu(\bar{S})$  とすれば,  $z(t)$  は次式で与えられる.

$$z(t) = \begin{cases} t\bar{S}, & 0 \leq t \leq \bar{t}, \\ t\mu^{-1}(E/t), & \bar{t} < t. \end{cases} \quad (2)$$

(例1)  $\mu(v) = v^2$  の場合:

(i)  $E/\bar{S}^2 \leq \tau$  ならば,  $\underline{G} = \frac{\rho}{\pi E} \log(T/\tau)$

(ii)  $\tau < E/\bar{S}^2 < T$  ならば,  $\underline{G} = \frac{\rho}{\pi \bar{S}^2} \left( \frac{1}{\tau} - \frac{\bar{S}^2}{E} \right) + \frac{\rho}{\pi E} \log \frac{T\bar{S}^2}{E}$

$$(iii) \quad T \leq E/\bar{S}^2 \text{ ならば, } \underline{G} = \frac{\rho}{\pi \bar{S}^2} \left( \frac{1}{\tau} - \frac{1}{T} \right)$$

## 4.2 上界評価

[定速目標] 上の下界評価で述べたように, 定速度により各時刻における最遠到達距離を実現できるという理由で, 様々な定速度運動の混合戦略により広い目標存在圏の実現が可能にできる. 定速度  $v$  をとる確率密度分布が  $g(v)$ ,  $v_l \leq v \leq v_u \leq \bar{S}$  である目標物の時刻  $t$  における地点  $x$  での存在確率密度  $f_E(x, t)$  とその定義域の最大値  $w(t)$  は, 以下の式で与えられる.

$$f_E(x, t) = \frac{1}{2\pi xt} g(x/t) + \frac{\xi_E(x)}{2\pi x} g(x/\eta_E^{-1}(x)), \quad (3)$$

$$w(t) = \max \left\{ \min\{t\mu^{-1}(E/t), v_u t\}, \min\{t\mu^{-1}(E/t), E v_l / \mu(v_l)\} \right\} \quad (4)$$

ただし,  $\eta_E(v) := v\mu^{-1}(E/v)$ ,  $\xi_E(x) := -d(x/\eta_E^{-1}(x))/dx$  である. 第1項は速度  $x/t$  で移動中の目標物の寄与, 2項はすでに総エネルギー  $E$  を消費し停止している目標物の寄与である. この存在確率密度を (1) 式に代入することにより, 次式からゲーム値の上界  $\bar{G}_1$  が評価できる. この  $g(v)$  に関する最適化問題を解くことが困難であれば,  $g(v)$  の形を固定して含まれるパラメータに関して最適化する方法でも上界が得られる.

$$\bar{G}_1 = \min_{g(v)} \int_{\tau}^T \rho \max_{0 \leq x \leq w(t)} f_E(x, t) dt \quad (5)$$

(例2)  $\mu(v) = v^2$ ,  $g(v) = av + b$  ( $0 \leq v \leq v_u \leq \bar{S}$ ,  $b \geq 0$ ) の場合:

目標物は速度  $v$  に関し線形な選択確率を採るものとする, パラメータ  $a, b, v_u$  を最適化した後, 以下のように上界  $\bar{G}_1$  が決定できる.

(i)  $T/\tau \geq 2$  のとき,  $\alpha := \sqrt{E/T} \sqrt[4]{T/\tau - 1}$  に対し,

$$(a) \quad \alpha \leq \bar{S} \text{ ならば, } \bar{G}_1 = \frac{\rho}{\pi E} \left( 2\sqrt{\frac{T-\tau}{\tau}} - 1 \right)$$

$$(b) \quad \alpha > \bar{S} \text{ ならば, } \bar{G}_1 = \frac{\rho}{\pi} \left\{ \frac{1}{\bar{S}^2} \left( \frac{1}{\tau} - \frac{1}{T} \right) + \frac{T}{E^2} \bar{S}^2 \right\} - \frac{\rho}{\pi E}$$

(ii)  $T/\tau < 2$  のとき,

$$(a) \quad \sqrt{E/T} \leq \bar{S} \text{ ならば, } \bar{G}_1 = \frac{\rho}{\pi E} \left( \frac{T}{\tau} - 1 \right)$$

$$(b) \quad \sqrt{E/T} > \bar{S} \text{ ならば, } \bar{G}_1 = \frac{\rho}{\pi \bar{S}^2} \left( \frac{1}{\tau} - \frac{1}{T} \right)$$

[境界移動目標] 実行可能経路のうち  $\int_{\tau}^T \rho/(\pi y(t)^2) dt$  を最小にする経路  $\{y(t), 0 \leq t \leq T\}$  を次により求める. ただし,  $I(t) := \{0, 0 \leq t < \tau \text{ のとき}; 1, \tau \leq t \text{ のとき}\}$  とする.

$$\min_{\{v(t)\}} \int_0^T I(t)/y(t)^2 dt \quad \text{s.t. } \dot{y}(t) = v(t), 0 \leq v(t) \leq \bar{S}, 0 \leq t \leq T, \int_0^T \mu(v(t)) dt \leq E \quad (6)$$

これを  $v(t)$  を制御ベクトルとする制御問題と考え、 $H(t) := I(t)/y(t)^2 + p(t)v(t) + \lambda\mu(v(t))$  によりハミルトニアン関数を定義すれば、最適解は次式を満たす。

$$\dot{y}(t) = \partial H / \partial p = v(t), \quad (7)$$

$$\dot{p}(t) = -\partial H / \partial y = \begin{cases} 0, & t < \tau \text{ のとき,} \\ 2/y(t)^3, & \tau \leq t \text{ のとき,} \end{cases} \quad \text{さらに, } p(T) = 0, \quad (8)$$

$$v(t) = \arg \min_{v(t)} H(t) = \begin{cases} \bar{S}, & p(t) \leq -\lambda\mu'(\bar{S}) \text{ のとき,} \\ (\mu')^{-1}(-p(t)/\lambda), & -\lambda\mu'(\bar{S}) < p(t) < -\lambda\mu'(0) \text{ のとき,} \\ 0, & -\lambda\mu'(0) \leq p(t) \text{ のとき,} \end{cases} \quad (9)$$

$$\int_0^T \mu(v(t)) dt = E \quad (10)$$

これを解くことにより最適速度  $v(t)$  は次式で得られるが、式中のパラメータの対  $(b, V)$  は、 $p(b) + \lambda\mu'(\bar{S}) = 0$  を満たす  $b$  による  $(b, \bar{S})$ 、あるいは  $p(\tau) + \lambda\mu'(V) = 0$  を満たす  $V$  による  $(\tau, V)$  のいずれかである。また、 $H(t)$  は  $t \geq b$  において一定となる。

$$\int_V^{v(t)} \frac{\mu''(v)}{\{H(b) + \lambda(v\mu'(v) - \mu(v))\}^{3/2}} dv = -\frac{2(t-b)}{\lambda} \quad (11)$$

この最適化問題の解速度  $v(t) = \dot{y}(t)$  に対し、確率密度関数  $g(w) = 2w$  により  $[0, 1]$  内で値をとる確率変数  $W$  を用いた速度  $Wv(t)$  を選ぶ戦略により、目標物は任意の時刻  $t$  において半径  $y(t)$  の領域内で一様存在分布をとる。そのときのゲーム値の上界は最適化問題 (6) 式の解  $y(t)$  を用いて次式で与えられる。

$$\bar{G}_2 = \int_\tau^T \frac{\rho}{\pi y(t)^2} dt \quad (12)$$

(例 3)  $\mu(v) = v^2$  の場合 :

$$l(x) := \frac{2E}{x} \sqrt{\frac{T-x}{T}} \Big/ \log \frac{\sqrt{T/(T-x)} + 1}{\sqrt{T/(T-x)} - 1}$$

に対し、(i)  $l(\tau) > \bar{S}^2$  ならば  $l(b) = \bar{S}^2$  なる  $b(> \tau)$  と  $V = \bar{S}$  との対  $(b, V)$ 、(ii)  $l(\tau) \leq \bar{S}^2$  ならば  $b = \tau$  と  $V = \sqrt{l(\tau)}$  なる  $V$  との対  $(b, V)$  を用いた次式により最適解  $\{y(t)\}$  は得られる。

$$\text{速度 : } v(t) = \begin{cases} V, & 0 \leq t \leq b \\ V(T-t)\sqrt{b/(T-b)}/\sqrt{T(T-b) - (T-t)^2}, & b < t \leq T \end{cases} \quad (13)$$

$$\text{半径 : } y(t) = \begin{cases} Vt, & 0 \leq t \leq b \\ V\sqrt{b/(T-b)}/\sqrt{T(T-b) - (T-t)^2}, & b < t \leq T \end{cases} \quad (14)$$

$$\text{上界 : } \bar{G}_2 = \frac{\rho}{\pi V^2} \left( \frac{1}{\tau} - \frac{1}{b} \right) + \frac{\rho}{\pi V^2} \frac{1}{2b} \sqrt{\frac{T-b}{T}} \log \frac{\sqrt{T(T-b)} + (T-b)}{\sqrt{T(T-b)} - (T-b)} \quad (15)$$

### 4.3 近似値評価

上界評価で議論したように定速度戦略は目標存在圏を広げる効果があり、境界移動戦略はその経路内部で一様な存在確率分布を実現できるという特徴がある。この両者を混合する次のような戦略を目標側の近似戦略として採用しよう。すなわち、(6)式の解  $y(t)$  と(4)式の定速度による最大目標存在半径  $w(t)$  に対し、時刻  $t$  において  $0 \leq x \leq y(t)$  では一様分布を、 $y(t) \leq x \leq w(t)$  では(3)式の  $f_E(x, t)$  の存在分布を、それぞれ  $\alpha(t)$  対  $\beta(t)$  の割合で選択できると仮定する。また、周辺部分における存在確率よりは内部の一様分布の確率が高くなることを要請して次式を得る。

$$\int_0^{y(t)} \frac{\alpha(t)}{\pi y(t)^2} 2\pi x dx + \int_{y(t)}^{w(t)} \beta(t) f_E(x, t) 2\pi x dx = 1, \tag{16}$$

$$\frac{\alpha(t)}{\pi y(t)^2} = \max_{y(t) \leq x \leq w(t)} \beta(t) f_E(x, t) \tag{17}$$

したがって、次式で定義される  $\gamma(t)$  を用いれば、この場合のゲームの値の近似値は  $G_{\text{apx}} = \int_{\tau}^T \rho \gamma(t) dt$  で得られる。

$$\gamma(t) := \frac{\alpha(t)}{\pi y(t)^2} = \frac{\max_{y(t) \leq x \leq w(t)} f_E(x, t)}{\pi y(t)^2 \max_{y(t) \leq x \leq w(t)} f_E(x, t) + \int_{y(t)}^{w(t)} f_E(x, t) 2\pi x dx} \tag{18}$$

(例4)  $\mu(v) = v^2$ ,  $g(v) = av + b$  ( $0 \leq v \leq v_u \leq \bar{S}$ ,  $b \geq 0$ ) の場合 :

(3)式と(18)式を用いて  $\gamma(t)$  を計算できる。ただし、 $t^*$  は  $y(t^*) = E/v_u$  の根である。

$$\gamma(t) = \begin{cases} \min \{1/(\pi v_u^2 t^2), 1/(\pi y(t)^2)\}, & t \leq E/v_u^2 \text{ のとき,} \\ (E^2 + v_u^4 t^2) / \{\pi v_u^2 t^2 (E^2 + y(t)^2 v_u^2)\}, & t > E/v_u^2 \text{ かつ } t \leq t^* \text{ のとき,} \\ (y(t)^4 + E^2 t^2) / (2\pi y(t)^2 t^2 E^2), & t > E/v_u^2 \text{ かつ } t > t^* \text{ のとき.} \end{cases} \tag{19}$$

### 4.4 数値例

ここでは、エネルギー消費関数  $\mu(v) = v^2$  に対する例1-例4の各評価値の比較を行う。パラメータ  $\rho = 1$ ,  $\tau = 1$ ,  $E = 1$ ,  $\bar{S} = 5$  とし、探索終了時刻のみを  $T = 1-5$  で変化させながら、(例1)の  $\underline{G}$ , (例2)の  $\bar{G}_1$ , (例3)の  $\bar{G}_2$  及び(例4)の(19)式を用いて計算した  $G_{\text{apx}}$  を描かせゲーム値を推定したものが図1である。

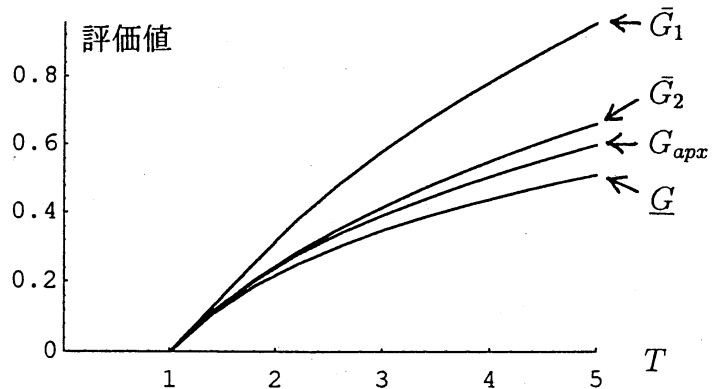


図1 ゲーム値の評価

ゲームの最適値は不明であるものの、定速戦略による上界  $\bar{G}_1$  の誤差率は比較的大きいといえる。また、評価値  $G_{\text{apx}}$  は上界  $\bar{G}_2$  と下界  $\underline{G}$  との間にある。  $\bar{G}_2$  と  $\underline{G}$  の評価法を考えれば、それぞれで設定した目標存在圏の半径  $y(t)$  及び  $z(t)$  の差がそのまま各評価値の差に反映している。

## 5 おわりに

この報告では、2次元ユークリッド空間上のデイトム探索ゲームを考え、Koopman が初めて提案した現実的なデイトム探索への回帰を試みた。逃避者の運動の連続性以外にもエネルギー制約という新たな現実的要素を取り入れることにより、より現実味のある分かり易い探索者対逃避者のデイトム探索ゲームを扱っている。残念ながら連続空間上での問題に対しては真のゲームの値や解を見つけることには失敗したものの、上界や下界、さらに近似解の評価法を提案し、数値例によればおおよそのゲームの値が推定できるものとなったように思われる。離散モデルに対しては最適解法を提案したが、容易に想像できるように、時間空間のサイズが大きくなった際のいわゆる組合せ的爆発を含む要素を孕んでおり、さらに改良の余地がある。過去のデイトム探索ゲームの研究は、逃避者の運動に高々最大速度の制約のみを課しているものが多く、本研究での結果と比較することにより、運動性能の過大評価がゲームの値にどの程度影響するのかについての知見が得られるものと期待できる。エネルギー制約を加味して逃避者の戦略の採り方が難しくなった分、支払関数は逃避者の存在確率と探索者の探索努力配分の双一次線形式で表される簡単なものを用いたが、探索理論では探知確率を評価尺度にとることが多く、これを支払関数とすることが次の当面の目標である。本モデルで仮定したエネルギー消費率の関数として、例えば水上、水中、または空中の移動ビークルに搭載されている駆動バッテリー消費率や動力源の燃料消費率等の現実的な関数を採用することにより、本モデルをさらに現実的なオペレーションに適用することが可能である。

## 参考文献

- [1] V.J. Baston and F.A. Bostock, A One-Dimensional Helicopter-Submarine Game, *Naval Research Logistics*, **36**, pp.479-490, 1989.
- [2] J.M. Danskin, A Helicopter versus Submarine Search Game, *Operations Research* **16**, pp.509-517, 1968.
- [3] J.N. Eagle and A.R. Washburn, Cumulative Search-Evasion Games, *Naval Research Logistics*, **38**, pp.495-510, 1991.
- [4] A.Y. Garnaev, A Remark on a Helicopter-Submarine Game, *Naval Research Logistics* **40**, pp.7459-753, 1993.
- [5] A.Y. Garnaev, *Search Games and Other Applications of Game Theory*, Springer-Verlag, Tokyo, 2000.
- [6] R. Hohzaki and K. Iida, A Search Game with Reward Criterion, *Journal of the Operations Research Society of Japan*, **41**(3), pp.294-320, 1998.
- [7] R. Hohzaki and K. Iida, A Search Game When a Search Path Is Given, *European Journal of Operational Research*, **124**(1), pp.114-124, 2000.



- [8] R. Hohzaki and K. Iida, A Solution for a Two-Person Zero-Sum Game with a Concave Payoff Function, *Nonlinear Analysis and Convex Analysis*, World Science Publishing Co., London, pp.157–166, 1999.
- [9] K. Iida, R. Hohzaki and K. Sato, Hide-and-Search Game with the Risk Criterion, *Journal of the Operations Research Society of Japan*, **37**, pp.287–296, 1994.
- [10] K. Iida, R. Hohzaki and S. Furui, A Search Game for a Mobile Target with the Conditionally Deterministic Motion Defined by Paths, *Journal of the Operations Research Society of Japan*, **39**(4), pp.501–511, 1996.
- [11] K. Kikuta, A Hide and Seek Game with Traveling Cost, *Journal of the Operations Research Society of Japan*, **33**(2), pp.168–187, 1990.
- [12] K. Kikuta, A Search Game with Traveling Cost, *Journal of the Operations Research Society of Japan*, **34**(4), pp.365–382, 1991.
- [13] B.O. Koopman, *Search and Screening*, Pergamon, pp.221-227, 1980.
- [14] J.J. Meinardi, A Sequentially Compounded Search Game, *Theory of Games: Technique and Applications*, The English Universities Press, London, pp.285–299, 1964.
- [15] T. Nakai, Search Models with Continuous Effort Under Various Criteria, *Journal of the Operations Research Society of Japan*, **31**, pp.335–351, 1988.
- [16] G. Owen, *Game Theory*, Academic Press, New York (1995).
- [17] A.R. Washburn, Search-Evasion Game in a Fixed Region, *Operations Research* **28**, pp.1290-1298, 1980.