

星形正多面体の歴史

A Short History of Regular Star Polytopes/by Sin Hitotumatu

東京電機大学(鳩山校舎) / 一松 信

0. 初めに

これは数学史というよりも数学的な内容が強いが、正多面体の歴史を調べた一部として報告したい。

2次元の星形正多角形は古代から知られていた。特に星形正五角形(Pentagramma)は、いわゆるピタゴラス学派が、彼らの秘密のシンボルにしていたと伝えられている。しかし彼らがそれを正6/2角形と認識していたかは疑問である。

2次元の正 n/d ($d < n/2$)角形は、正 n 角形の頂点を d 点おきに結んでできる。このときそれが連結になるための条件は、 n と d とが互いに素なことである。そのとき分母の d は密度、すなわち中心の周りの回転指数を表す。 $-d$ は denominator と density との共通の頭文字になっている。

星形正多角形の3次元版が、星形正多面体である。4次元にも同様の星形正多胞体がある。但し5次元以上の空間には、星形正多胞体は存在しない。

以下では3次元の場合を中心に述べ、最後に4次元の場合に言及する。その他に双曲型空間内の星形正多面体があるが、ここではそれらには触れない。

I. 3次元の場合

1. 1 通常の正多面体(いわゆるプラトンの立体)は、ユークリッドの『原論』第13巻に詳しいし、後世の第14,15巻にも発展がある。但し一時期主張された「原論が5種の正多面体の存在を目標に書かれた」という説は、現在では否定されている。

普通正多面体の面が正 p 角形であり、その頂点形(各頂点についてそれと隣接する頂点を作る角錐)が正 q 角錐であるとして (p,q) と表す。—Schläfliの記号。

p, q が整数のとき許される組は、よく知られている5種に限る。—この事実はオイラーの公式からも、頂点の周りの角の和からも、容易に証明できる。

星形正多面体とは、この p または q (あるいは両方)が整数でない分数の場合である。実際には後述のように $5/2$ が一方に許されるだけである。それらはすべて正二十面体群を変換群とするので、同じ変換群に属する正十二・二十面体と併せて、表1に主なデー^タを掲げた。

1. 2 通説ではこのうち「小星」と「大星」とをKepler(1611)が研究し、それらの双対に当る「大12」と「大20」とをPoinsot(1809)が発見した;その直後にCauchy(1811)がそれ以外にないことを証明したとされる。

これは大筋において誤りではないが、多少調べた結果を述べたい。

表1 3次元星形正多面体

正式名称	略称	p	q	V	E	F	密度	示性数
正十二面体	正12	5	3	20	30	12	1	0
正二十面体	正20	3	5	12	30	20	1	0
星形小十二面体	小星	5/2	5	12	30	12	3	4
星形大十二面体	大星	5/2	3	20	30	12	7	0
大十二面体	大12	5	5/2	12	30	12	3	4
大二十面体	大20	3	5/2	12	30	20	7	0

小星・大星・大12・大20の別名：（順次）密度3の星形十二面体・密度7の星形十二面体・密度3の（凸面）十二面体・密度7の二十面体

実際[2],[3]などの記述によると、Paulo Uccello (1420)の作品は「小星」を意図している。また1568年のJammitzerの図は、「大星」「大12」そのものに見える。しかしそのような図形を「星形正多面体」と意識して研究したのは、やはりKeplerが最初のものである。その意味で「Keplerの発見」という通説は正しいと思う。

これら3種は割合に作りやすい。しかし「大20」は双対性などを意識して構成しないと発見が難しい。歴史の上で「なかった」という証明は難しいが、「大20」が19世紀初めまで発見されなかったのは事実らしい。

1.3 ところでKeplerがなぜ「小星」「大星」を知りながら、前者の双対である「大12」に言及しなかったのか？「見てきたような嘘」かもしれないが、以下のような想像説がある。

Keplerが正多面体に凝ったのは、彼の著書『宇宙の神秘』にある通り、太陽系の惑星の軌道半径の比を、正多面体の外接・内接球の半径の比によって説明しようと試みたことにあるらしい。一実は筆者が正多面体に興味をもったもとは、Keplerの図だった。中学3年の折に、正多面体(p,q)の外接・内接球の半径R,rの比が

$$R/r = \tan(\pi/p) \cdot \tan(\pi/q)$$

と表されることを、三角法を使って計算した記憶がある。一これはそれ程大した問題ではない。現行の高校「数学I：図形の計量」の知識で可能である。

しかし数値を計算すると、すべて実際の軌道の比よりも小さい；特に火星：地球、地球：金星の比が大きく違うので、「こじつけ」だと思った。

後に知ったのだが、Kepler自身もこの点には不満だったらしい。一時期「小星」（比が $\sqrt{5}$ ）を、火星：金星に当てはめたらよく合うのに喜んだこともあったらしい。しかし地球を飛ばしたのでは、天動説に逆戻りだと気がつき、改めて色々な準正多面体を研究した。しかし準正多面体には外接球があっても内接球がないなどで、結局挫折した形に終わった。

双対図形(pとqを交換した図形)については、R:rの比が同一なので、「大12」を調べても新に得るところがないとして、断念したらしいというのである。

この説はともかく、[3]によると、正多面体に関するKeplerの業績が注目をひかずに忘れられたのは、それが「数学」の論文としてではなく「宇宙の神秘」に関する議論ととられたせい、というのは事実だろう。

1. 4 星形正多面体が既知のものしかないことに関するCauchyの証明は、群の考えを活用した鮮やかなものである。すなわちまず一点を止めた 3次元回転群の有限部分群 を決定する。

それは一軸の周りの巡回群・二面体群と、正多面体群3種しかない。本質的な星形正多面体は、正多面体群に所属するものに限るが、正四面体群からは星形ができない。正八面体群からは無理に作ると、立方体の頂点を一つおきに結んでできる正四面体が2個入り組んだ図形ができる。これは星形六角形（いわゆるダビデの星）の3次元版であり、星形正多面体の仲間に加える人もあるが、正確には「複合多面体」であって星形ではない。

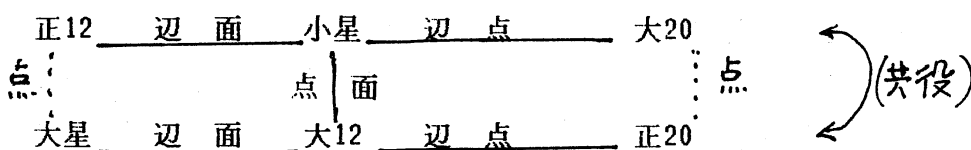
結局真の星形正多面体は、正二十面体群に所属するものだけであり、 p, q には5, 3以外に $5/2$ が許されるだけである。—このことから何故 $(5/2, 4)$ が不可能かもわかる。強いてそれを作ろうとしても、有限面数で閉じなくなるのである。

残された課題は自己双対である $(5/2, 5/2)$ の不可能性である。Cauchyは直接にそれを作ろうとしても、有限面数では閉じないことを示した。それは正しいがこの証明がややAd Hocな印象である。今日では正二十面体群関連の図形について、3をそのままにし、5と $5/2$ とを交換する「共役変換」が可能ながわっている。 $(5, 5)$ という正多面体が不可能なことから、 $(5/2, 5/2)$ が不可能なが直ちにわかる。なお共役変換は4次元の場合にも有効である。

但しCauchyはその後群を忘れてしまったような印象を受ける。

1. 5 4種の星形正多面体の構成法は色々あるが、下記の図の関係を活用するとよい。この図は線で結んだ同志が、線の脇に記入した要素を共有していることを表す。具体的には以下の通りである。

1. 正12面体の各辺を延長して、正五角形の面を星形正五角形にすると小星ができる。
2. 小星の各面をその凸包である正五角形にすると大12を得る。
3. 大12の各辺を延長して、面を星形正五角形にすると大星を得る。
4. 大12の辺の囲む正三角形を面にすると、正二十面体になる。逆に正二十面体の各面を凹ませ、各頂点の隣にある5点のなす正五角形を面にすると大12になる。
5. 大20は最も作り難い。しかしその面を除いて点と辺のなす骨格（フレームワーク）にすると、それは小星のと同じである。実際小星の骨格をよく見ると、隣り同志の辺は36度で交わっているが、頂点で一つ先の辺との角は60度である。—これは計算しなくても、初等幾何学的に簡単に証明できる。頂点を3点ずつうまく組合せると大きな正三角形が20枚でき、それらを面として大20ができる。



1. 6 歴史ではなく数学の話になるが、星形正多面体についていくつかの注意を述べておく。

小星と大12とは、頂点と面とが12個ずつで辺が30本なので、オイラーの定理が成立しない。このために19世紀中頃のSchläfliは、これらを多面体と認なかったという。現在の我々は、その表面が球面と同位相でなく、示性数4の曲面というだけの話であって、矛盾ではないと理解する。しかし過去にはこのような「誤解」もあった。

模型を作ってみて初めて気がついたのだが、同じ長さの一边をもつ小星と大星とでは、小星のほうが体積が大きい。芯における重複を表す密度を補正しても、やはりそうである。しかしこれは誤りや誤訳ではない。大・小は立体そのものを修飾しているのではなく、その面をなす星形五角形の大小を意味する形容詞である。大12を標準とすると、その面の正五角形を対角線で結んで小さい星形五角形にしたのが小星であり、その辺を延ばして大きい星形五角形にしたのが大星なのである。—漢語ではしばしば形容詞と修飾される語との対応が曖昧な例。

1. 7 これまでにも何度か使った「密度」とは、その表面が中心の周りを何重に被覆しているかを表す数である。普通の正多面体(p,q)では、辺の数Eが

$$1/p + 1/q - 1/2 = 1/E$$

と表されるが、星形正多面体では $E=30$ であり

$$1/p + 1/q - 1/2 = d/E, \quad d \text{ は密度}$$

と表される。大12と大20では、その面の大きさから密度の値3,7 が直にわかるが、小星・大星の密度では、芯に当たる部分が二重になっているのに注意する。

その他色々面白い性質が知られているが、歴史と関係が薄いので省略する。

II. 4次元の場合

2. 1 4次元星形正多胞体は全部で十種ある。それらを表2に示した。便宜上同じ変換群に属する通常の正多胞体をも加えた。

これまで個々のこれらの図形に対して正式の名前がなかった。Coxeterが組織的に命名したが、それを直訳してもしっくりしない。ここでは彼の精神を活して仮の名を表に載せた。その命名基準は以下の通りである。

1. 他と違う特長をもつものはそれによる(例:大六百胞体)。
2. 原則としてそれを囲む3次元胞の形を冠する。
3. 必要に応じて、自己双対など他と区別する接頭詞を付ける。
4. 大六百胞体以外はすべて120胞なので、正式には付けるべき「星形百二十胞体」という語尾を省略する。

なお密度は3次元のときと同様に、中心の周りの被覆度であり、色々な方法で計算できる。しかしその値の列は誠に奇妙な数値である。

表2 4次元星形正多胞体

p	q	r	密度	点数	辺数	面数	胞数	$\chi/120$	仮の名
5	3	3	1	600	1200	720	120	11	正百二十胞体
3	3	5	1	120	720	1200	600	11	正六百胞体
3	5	5/2	4	120	720	1200	120	13	二十面体型
5/2	5	3	4	120	1200	720	120	13	非双対小星型
5	5/2	5	6	120	720	720	120	9	自己双対大十二型
5	3	5/2	20	120	720	720	120	13	十二面体型
5/2	3	5	20	120	720	720	120	13	大星型
5/2	5	5/2	66	120	720	720	120	15	自己双対小星型
3	5/2	5	76	120	720	1200	120	13	大二十型
5	5/2	3	76	120	1200	720	120	13	非双対大十二型
5/2	3	3	191	600	1200	720	120	17	大百二十胞体
3	3	5/2	191	120	720	1200	600	17	大六百胞体

密度は中心の周りの被覆度、 χ は修正Euler-Poincaré量で

$$\chi = d_q r N_0 + d_p N_2 = d_q N_1 + d_r N_3; \text{ 実 は } \chi/120 = 30(1/p + 1/q + 1/r - 1/2)$$

2.2. 4次元正多胞体を初めて研究したのは Ludwig Schläfli (1814-1895; スイス) らしい。彼は「結晶学者」ともよばれるが、独学で数学特に高次元幾何学を学び、特殊関数の研究もある。星形正多胞体も4種を発見している。但し彼は Eulerの公式にこだわり、それを満たさない小星・大12を多面体と認なかったという。—今日の我々は、その表面が示性数4の多様体をなすので、矛盾ではないと理解するのだが。

しかも彼は生前フランス語と英語で少数の論文を発表しただけで、その主要な部分は死後刊行された *Theorie der Vielfachen Kontinuität* でようやく発表された。彼が生前ドイツ語で論文を書かなかったのは、終生ベルン方言でしか話も書くこともしなかったため、プロイセンの学者に理解して貰えなかったせいと伝えられる。—いわば一生郷里の方言でしか論文を書かなかったために無視された篤学者である。

2.3. その後フランスの Goursatの研究(1889)もあったが、今日知られている4次元正多胞体を全部挙げたのは、Edmund Hess(1843-1903; ドイツ) である。彼の学位論文は流体力学関係だが、その後幾何学の研究を主にしている。

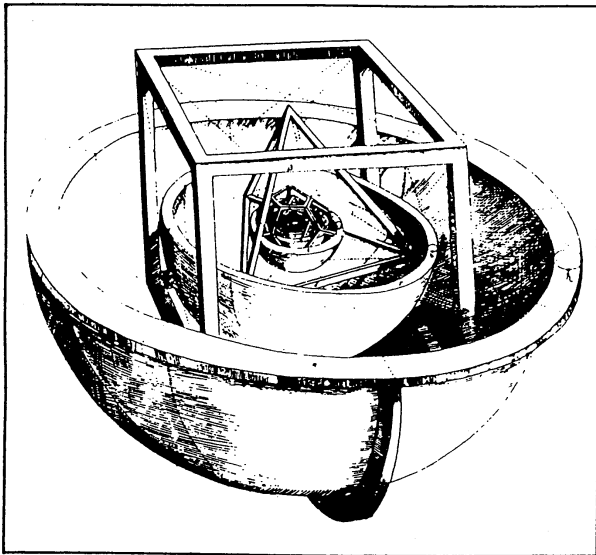
但し彼が挙げた命題について、完全に証明していない部分が多い。特に (5/2, 3, 5/2) と (3, 5/2, 3) の不可能性が未完成だった。独立に Pieter Hendrick Schoute(1846-1913; オランダ) の研究もある。彼も本職は土木工学だった。

最終的に表2のような結果をまとめたのは van Oss(1915)らしい。もちろん今日では H.S.M. Coxeterに負うところが大きい。

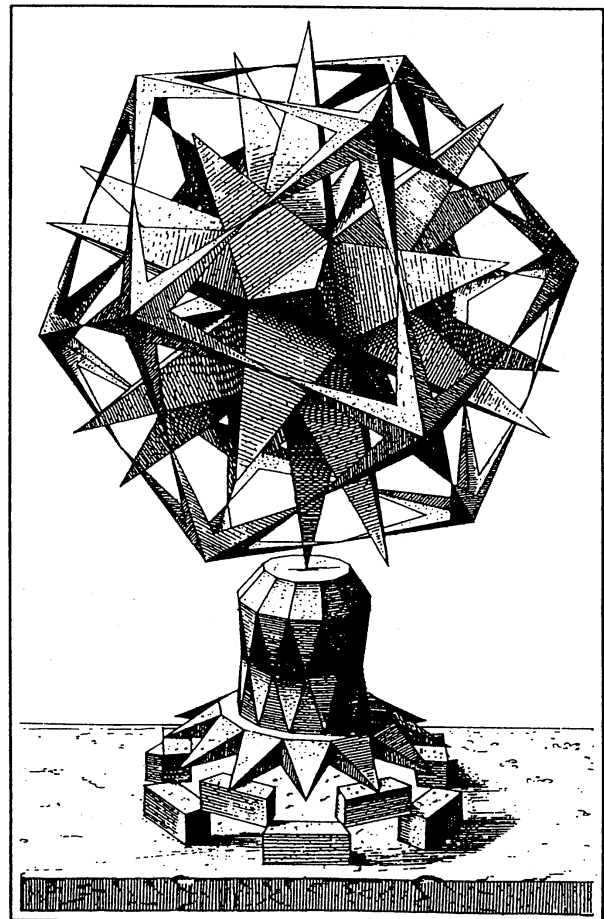
References

- [1] H.S.M.Coxeter, Regular Polytopes, 3rd ed., Dover 1973.
especially: Historical remarks on Chap. VI & XIV.
- [2] H.S.M.Coxeter, Star Polytopes and the Schläfli Function $f(\alpha, \beta, \gamma)$. Elemente der Mathematik, 44 (2), (1989)
pp. 25-36; reprinted in his Selecta:Kaleidoscopes,
Wiley, 1995, pp. 121-133.
- [3] P.K.Cromwell, Kepler's work on Polyhedra, The Math.
Intelligencer, Springer, vol. 17, no.3, 1995, p.23-33.

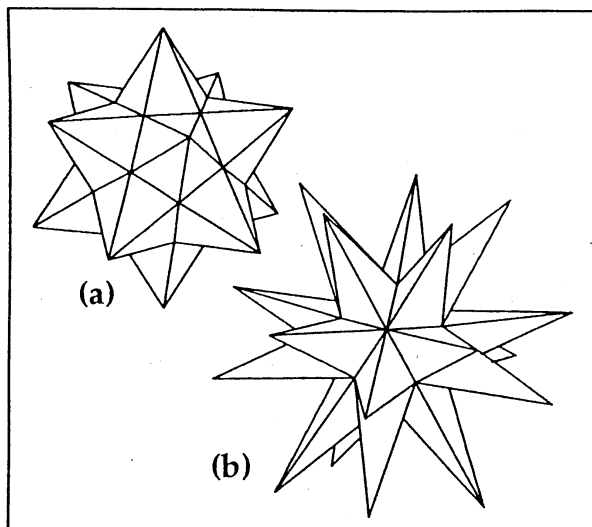
(参考図)



Keplerの太陽系模型



Jamnitzer (1568)の模型



(a) 星形小十二面体 } (様式図)
(b) 星形大十二面体 }