

## ダム問題に対する時間概周期解

NORIAKI YAMAZAKI (山崎教昭), MASATO TAKAHASHI (高橋正人)  
Department of Mathematics  
Graduate School of Science and Technology, Chiba University (千葉大・自然科学)

AND

TAKANOBU OKAZAKI (岡崎貴宣)  
Department of Mathematics  
Faculty of Education, Chiba University (千葉大・教育)

### §1. 序

以下の楕円-放物型自由境界問題を考察する：

$$\rho(v)_t - \Delta v = f(t, x) \quad \text{in } Q := R \times \Omega, \tag{1.1}$$

$$v = g_D(t, x) \quad \text{on } \Sigma_D := \bigcup_{t \in R} \{t\} \times \Gamma_D(t), \tag{1.2}$$

$$\partial v = 0 \quad \text{on } \Sigma_N := \bigcup_{t \in R} \{t\} \times \Gamma_N, \tag{1.3}$$

$$v \leq g_U(t, x), \quad \partial v \leq 0, \quad \partial v \cdot (v - g_U(t, x)) = 0 \\ \text{on } \Sigma_U := \bigcup_{t \in R} \{t\} \times \Gamma_U(t). \tag{1.4}$$

ここで、 $\Omega$  は  $R^N$  ( $1 \leq N < +\infty$ ) の有界領域で滑らかな境界  $\Gamma$  をもち、その境界  $\Gamma$  は、互いに素な3つの部分  $\Gamma_D(t)$ ,  $\Gamma_U(t)$ ,  $\Gamma_N$  で構成されているとする。つまり、

$$\Gamma = \Gamma_D(t) \cup \Gamma_U(t) \cup \Gamma_N \quad \text{そして} \quad \text{meas}_\Gamma(\Gamma_D(t)) > 0, \quad \forall t \in R$$

とする。また、 $\rho: R \rightarrow R$  は非減少リップシッツ連続関数で、 $f(t)$ ,  $g_D(t)$ ,  $g_U(t)$  は与えられたデータである。上記のシステム (1.1) – (1.4) は、溜池の水位が時間とともに変化するダム問題を記述している。

上記のシステム (1.1)-(1.4) の初期値問題の解の存在・一意性そしてその漸近挙動については、既に [8, 9, 10] で議論されている。また周期問題については、[5, 6] により周期解の存在とその周期安定性が議論されている。

さて本稿では、問題 (1.1)-(1.4) の時間概周期問題を考察する。つまり「ダムの両側にある溜池の水位が時間概周期に変化する」として、

- 時間大域的に有界な解  $v^*$  が一意に存在する
- $\rho(v^*)$  が時間概周期であり、漸近安定である

ことを議論する。

さらに、空間 2 次元の場合の数値実験結果についても述べる。その数値実験結果により、[5, 6, 8, 9, 10] で得られた理論結果を容易に理解することができる。

記号. 本稿を通じて、以下の記号を用いる：

$$H := L^2(\Omega), \quad (\cdot, \cdot) := \text{the inner product in } H;$$

$$X := H^1(\Omega), \quad a(u, v) := \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx.$$

## §2. 仮定と主定理

まず、概周期関数の定義を思い出そう。

**定義 2.1.**  $W$  を完備距離空間としその距離を  $d_W$  とする。このとき、任意の定数  $\varepsilon > 0$  に対して、

$$[t, t + l_\varepsilon] \cap E_{\varepsilon, h} \neq \emptyset \quad \text{そして} \quad d_W(h(t), h(t + \tau)) < \varepsilon, \quad \forall t \in R, \forall \tau \in E_{\varepsilon, h}$$

を満たす正定数  $l_\varepsilon > 0$  と (長さ  $l_\varepsilon$  をもつ相対稠密な集合と呼ばれる)  $R$  の部分集合  $E_{\varepsilon, h}$  が存在するとき、関数  $h: R \rightarrow W$  を  $W$ -概周期であると言う。

概周期関数の特徴付けとして次のボッホナー判定条件がよく使われる。

- (ボッホナー判定条件) 関数  $h$  が  $W$ -概周期であるための必要かつ十分条件は、集合  $\{h_t \equiv h(\cdot + t), t \in R\}$  がバナッハ空間  $C_B(R; W)$  で相対コンパクトになるときである。ここで、 $C_B(R; W)$  は、 $R$  から  $W$  への連続で有界な関数の全体集合である。

概周期関数の他の性質については、例えば [2, 13] を参照する。

次に、 $\bar{\Omega}$  上で定義された微分同相写像  $\Theta$  の族を定義する。

**定義 2.2.** それぞれの正定数  $R_1, R_2 > 0$  に対して、次の性質を持つ微分同相写像  $\Theta := (\theta^1(\cdot), \dots, \theta^N(\cdot)): \bar{\Omega} \rightarrow \bar{\Omega}$  の族を  $\mathcal{M}(\bar{\Omega}, R_1, R_2)$  で表す：

$$\left| \frac{\partial}{\partial x_j} \theta^i(x) \right| \leq R_1, \quad \left| \frac{\partial}{\partial x_j} \bar{\theta}^i(x) \right| \leq R_1,$$

$$R_2 \leq \det J(\Theta(x)) \leq R_1, \quad R_2 \leq \det J(\bar{\Theta}(x)) \leq R_1$$

for  $x \in \bar{\Omega}$ ,  $i, j = 1, 2, \dots, N$ .

ここで、 $\bar{\Theta}(\cdot) = (\bar{\theta}^1(\cdot), \dots, \bar{\theta}^N(\cdot))$  は  $\Theta(\cdot)$  の逆写像で、 $\det J(\Theta(x))$  は  $\bar{\Omega}$  上の写像  $y = \Theta(x)$  のヤコビアン  $J(\Theta(x))$  の行列である。

**Remark 2.1.** 2つの微分同相写像  $\Theta_1, \Theta_2 \in \mathcal{M}(\bar{\Omega}, R_1, R_2)$  に対し、距離

$$d_{\mathcal{M}}(\Theta_1, \Theta_2) := \max_{|\alpha| \leq 1} \sup_{x \in \bar{\Omega}} |D^\alpha(\Theta_1(x) - \Theta_2(x))|_{R^N},$$

を考える。ここで、 $|\cdot|_{R^N}$  はユークリッドノルムである。この距離により、 $\mathcal{M}(\bar{\Omega}, R_1, R_2)$  は完備距離空間となることに注意する。

さて、以下の仮定の下で問題 (1.1)-(1.4) に対する概周期問題を考察する。

(A1)  $\rho(\cdot) : R \rightarrow R$  は非減少リップシツツ連続関数である；

(A2) 次を満たす  $H^2(\Omega)$ -概周期関数  $g \in W_{loc}^{1,2}(R; X)$  が存在する：

(a) 任意の  $t \in R$  に対して、

$$g(t, x) = \begin{cases} g_D(t, x) & \text{for a.e. } x \in \Gamma_D(t), \\ g_U(t, x) & \text{for a.e. } x \in \Gamma_U(t) \end{cases}$$

となる；

(b)  $\sup_{t \in R} |g'|_{L^2(t, t+1; X)} < +\infty$ ；

(A3)  $f \in W_{loc}^{1,1}(R; H)$  が  $X$ -概周期で

$$\sup_{t \in R} |f'|_{L^1(t, t+1; H)} < +\infty$$

を満たす。

(A4) 次をみたす正定数  $C_1$  と  $C^1$ -級微分同相写像  $\Theta(t, \cdot) = (\theta^1(t, \cdot), \dots, \theta^N(t, \cdot)) \in \mathcal{M}(\bar{\Omega}, R_1, R_2)$  の族  $\{\Theta(t, \cdot)\}_{t \in R}$  が存在する：

(a)

$$\left| \frac{\partial}{\partial t} \theta^i(t, x) \right| \leq C_1, \quad \left| \frac{\partial^2}{\partial t \partial x_j} \theta^i(t, x) \right| \leq C_1,$$

for  $x \in \bar{\Omega}$  and  $i, j = 1, 2, \dots, N$ ；

(b)  $\Theta(0, \cdot)$  が  $\bar{\Omega}$  上で恒等写像で、

$$\Theta(t, \Gamma_\nu(0)) = \Gamma_\nu(t) \quad \forall t \in R \quad (\nu = D, N, U)$$

となる；

(c) 写像  $t \rightarrow \Theta(t)$  は  $\mathcal{M}$ -概周期である。

ここで、問題 (1.1)-(1.4) に対する弱形式を与える。そしてそれを今後、 $P(f, g)$  と呼ぶことにする。弱形式を与える前に、任意の時間  $t \in R$  に対する  $X$  の閉凸部分集合  $K(t)$  を

$$K(t) := \{z \in X; z = g(t) \text{ a.e. on } \Gamma_D(t), z \leq g(t) \text{ a.e. on } \Gamma_U(t)\}$$

と定義する。

**定義 2.3.** (i)  $J := [t_0, t_1]$ ,  $-\infty < t_0 < t_1 < +\infty$  とし、 $f \in L^2(J; H)$  とする。そのとき次を満たすとき、関数  $v : J \rightarrow X$  を  $J$  上の  $P(f, g)$  の解であるという： $v \in L^2(J; X)$ ,  $\rho(v) \in W^{1,2}(J; H)$ ,

$$v(t) \in K(t) \quad \text{for a.e. } t \in J,$$

そして

$$(\rho(v)_t - f(t), v(t) - z) + a(v(t), v(t) - z) \leq 0, \quad \forall z \in K(t) \text{ and a.e. } t \in J.$$

(ii)  $J'$  を  $R$  の任意の区間とし、 $f \in L^2_{loc}(J'; H)$  とする。このとき、 $v$  が  $J'$  の任意のコンパクト部分区間  $J$  上で  $P(f, g)$  の解であるとき、関数  $v : J' \rightarrow X$  を区間  $J'$  上の  $P(f, g)$  の弱解と呼ぶ。

(iii)  $J' = [t_0, +\infty)$ ,  $f \in L^2_{loc}(J'; H)$  そして  $u_0 \in H$  とする。このとき、関数  $v : J' \rightarrow X$  が  $J'$  上で  $P(f, g)$  の弱解で

$$\rho(v(t_0, \cdot)) = u_0 \quad \text{in } H$$

をみたすとき、 $v$  を  $J'$  上の  $P(f, g)$  に対する初期値問題  $CP(f, g)$  の弱解と呼ぶ。

さて、 $P(f, g)$  の概周期問題に対する主定理を述べる。

**定理 2.1.** (A1)-(A4) を仮定する。このとき、

$$\sup_{t \in R} |v^*(t)|_H < +\infty$$

となる  $R$  上の  $P(f, g)$  の大域解  $v^*$  が一意に存在する。

**定理 2.2.** 定理 2.1 と同じ仮定をし、 $v^*$  を定理 2.1 で得られた大域的に有界な一意解とする。そのとき、 $\rho(v^*)$  は  $H$ -時間概周期である。

**定理 2.3.** 定理 2.1 の条件を仮定する。そのとき、初期値  $\rho(v(t_0))$ ,  $v(t_0) \in K(t_0)$  をもつ  $[t_0, +\infty)$ ,  $(t_0 \in R)$  上の任意の  $CP(f, g)$  の解  $v$  に対して、

$$\rho(v(t, \cdot)) - \rho(v^*(t, \cdot)) \rightarrow 0 \quad \text{in } H \text{ and weakly in } X \text{ as } t \rightarrow +\infty$$

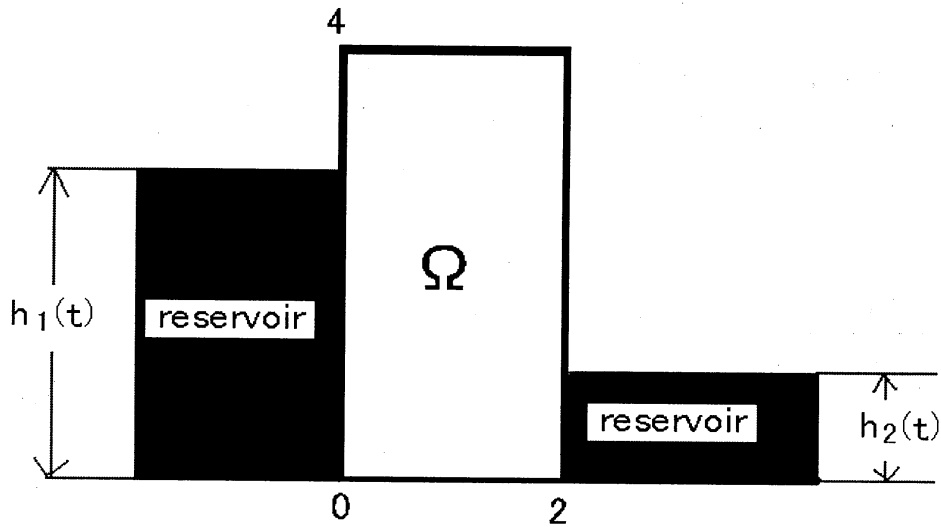
となる。ここで、 $v^*$  は定理 2.1 で得られた大域的に有界な一意解である。

定理 2.1, 2.2, 2.3 の詳しい証明は、[12] を参照する。

### 3. 数値実験データ

この節では、 $P(f, g)$  の数値実験を行う際のデータについて述べる。

実際、空間 2 次元の数値実験を行う。そのとき、ダムを長方形領域  $\Omega := (0, 2) \times (0, 4)$  とし、ダム  $\Omega$  の両側の溜池の水位をそれぞれ  $h_1, h_2$  とする。



そして、数値実験の為の空間刻みは、

$$\Delta x = \Delta y = \frac{1}{20}$$

とし、時間刻みは、

$$\Delta t = \frac{1}{1000}$$

とする。

また、ダム内の湿気を表す saturation 関数  $\rho: R \rightarrow R$  として、

$$\rho(z) := \begin{cases} 1 & \text{if } z \in [0, +\infty) \\ \frac{1}{1 - 0.05z} & \text{if } z \in (-\infty, 0] \end{cases}$$

を考える。

#### 4. 定常問題の数値実験

この節では、2次元ダム問題  $P(f, g)$  の定常問題について考察する。 $P(f, g)$  の定常問題については、既に [9, 10] で議論されている。その理論結果は、以下のとおりである。

**(定常問題)** (cf. [9, 10]) 溜池の水位  $h_1, h_2$  と source term  $f$  がそれぞれ定数であるとする。このとき、ダム問題  $P(f, g)$  の定常解  $v^\infty$  が一意に存在する。

そして、任意の初期値問題  $CP(f, g)$  の解  $v$  on  $[t_0, +\infty)$ , ( $t_0 \in R$ ) に対して、

$$\rho(v(t)) \longrightarrow \rho(v^\infty) \quad \text{in } H \text{ and weakly in } X \quad (\text{as } t \rightarrow +\infty)$$

となる。

数値実験を通してこの理論結果を検証してみる。

(数値データ) 簡単にする為、source term  $f$  を無視する。つまり、 $f \equiv 0$  とする。そして、ダム  $\Omega := (0, 2) \times (0, 4)$  の両側の溜池の水位をそれぞれ

$$h_1 \equiv 3 \quad h_2 \equiv 1$$

とする。

(数値実験結果 (I)) 次の初期状態を考察する。

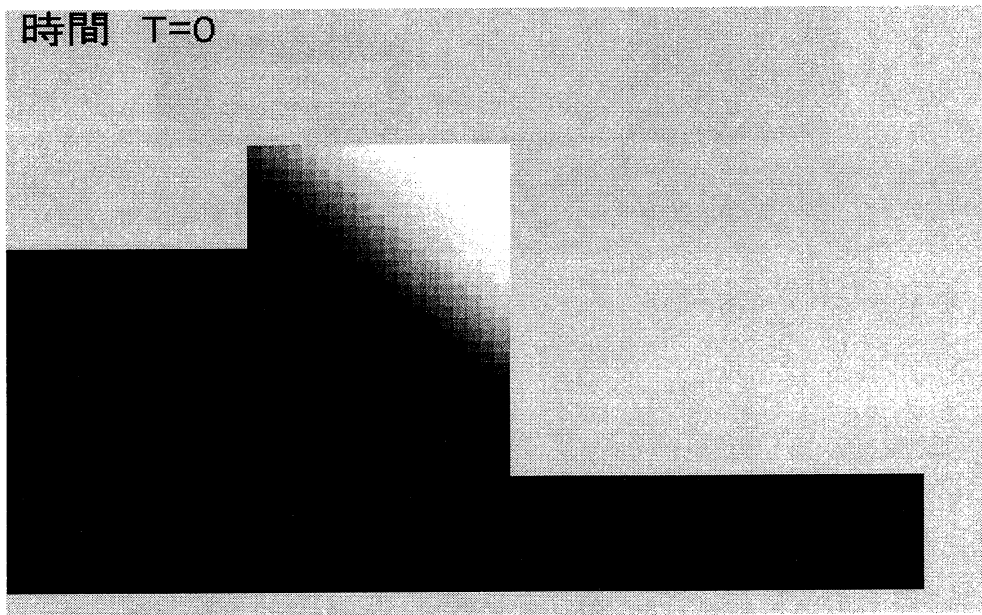
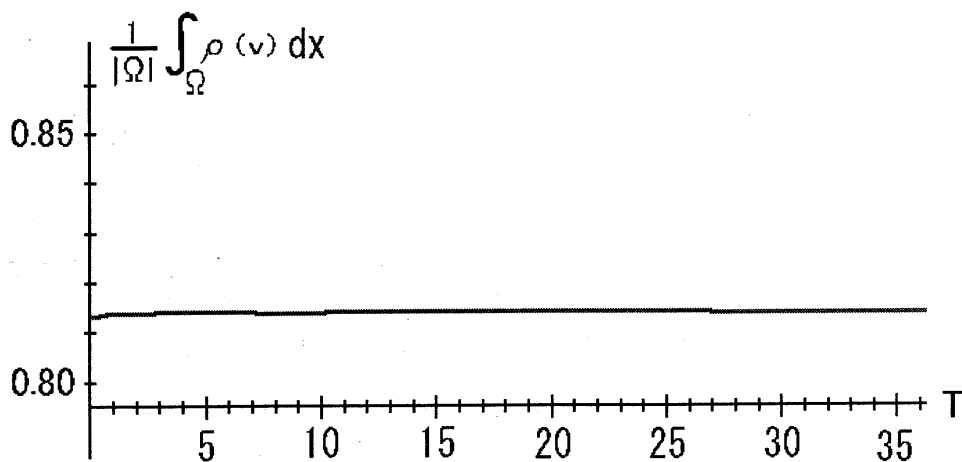
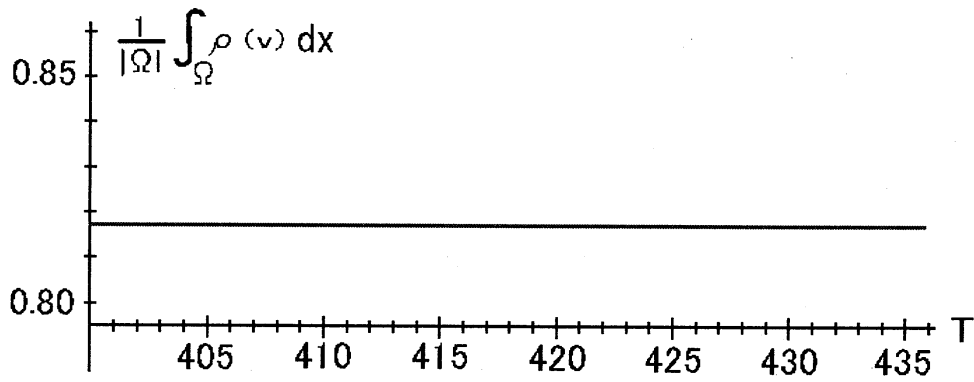


図 1

さて、ダム内の湿気を表す関数  $\rho(v)$  の積分値  $\frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \rho(v(t, x)) dx$  の値の時間変化を考察する。その積分値は、おおざっぱに言うと、ダム内の水の量を表している。図 1 を初期値とした場合、次の数値実験結果を得た。





始めは、積分値が増えたり減ったりしている。しかし、ある程度時間が経つと一定の値になった。

(数値実験結果 (II)) 次の初期状態を考察する。

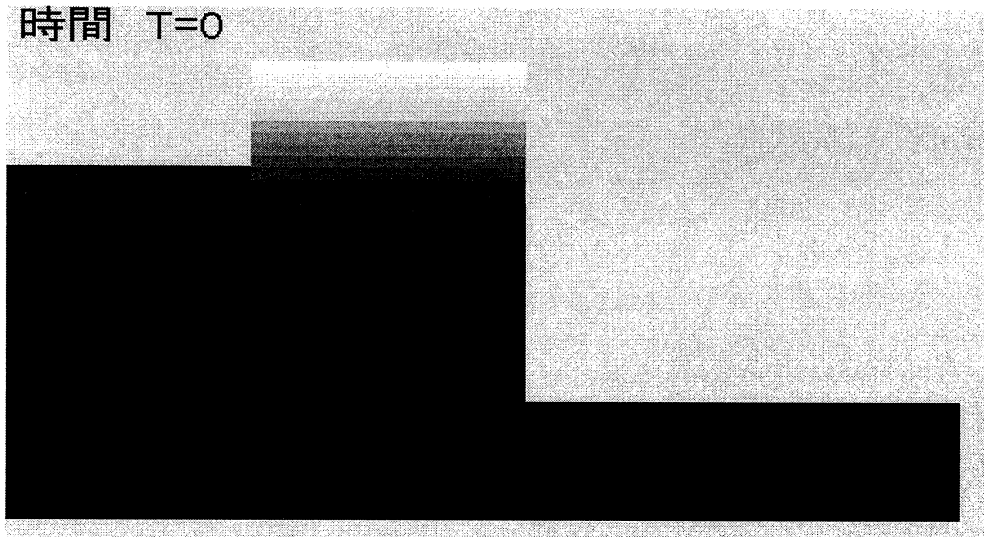
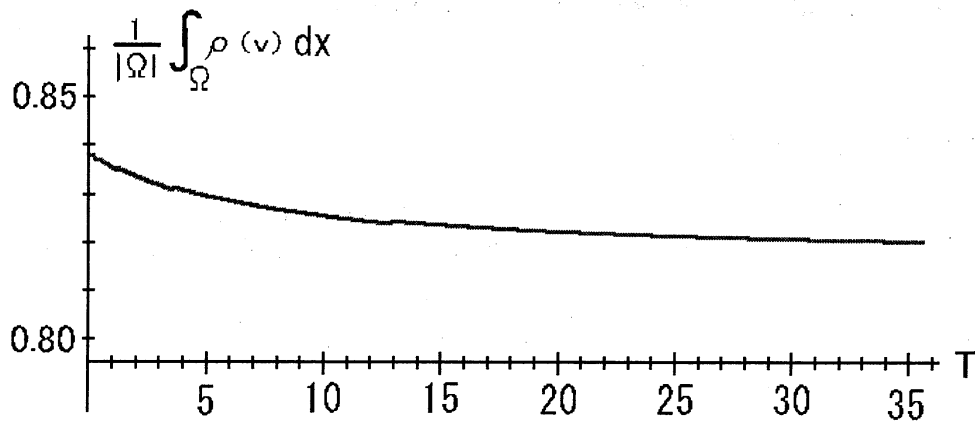
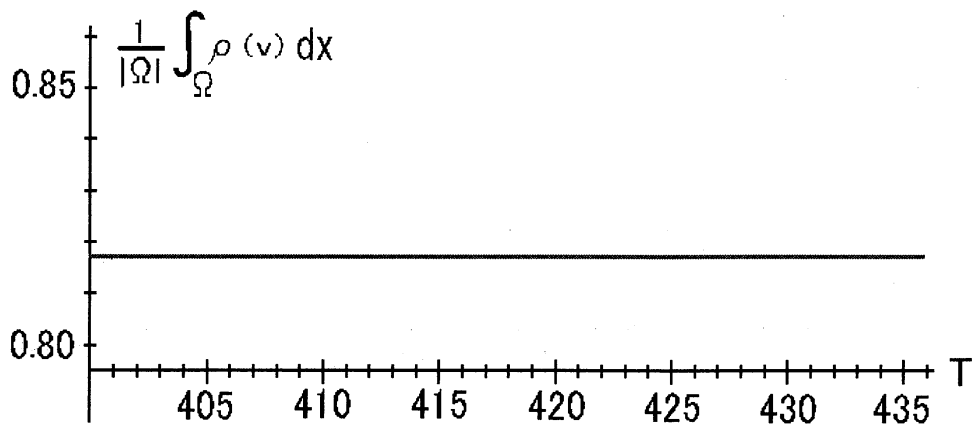


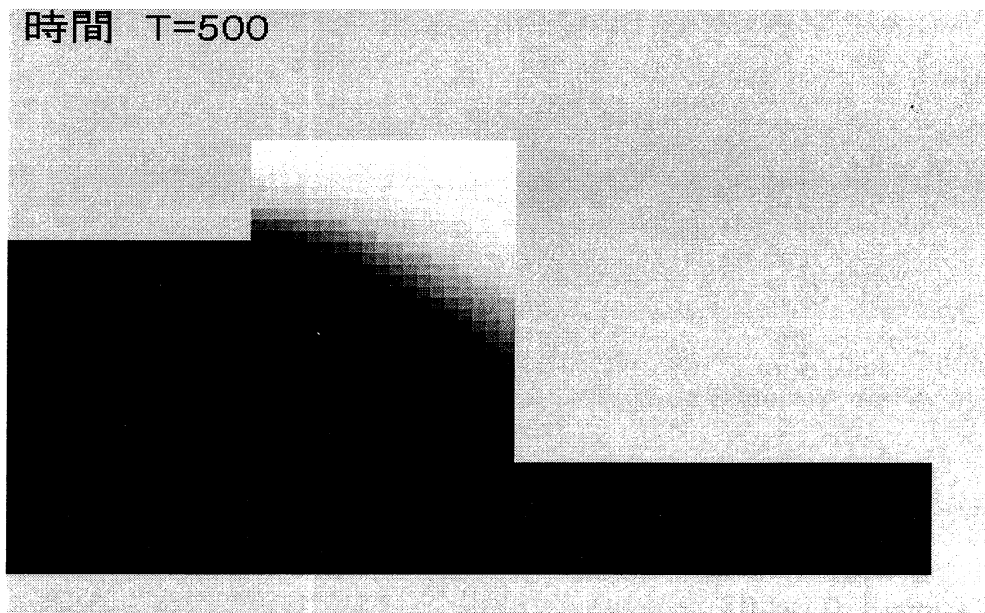
図 2

さて、図 2 を初期値とした場合、次の数値実験結果を得た。





始めのうちは、積分値が単調に減っていくが、ある程度時間が経つと一定の値になった。しかもその値は、数値実験結果 (I) とほぼ一致する。(その誤差は、 $10^{-8}$  であった。) つまり、有限時間で積分値がほぼ一致した。これは、[9, 10] で得られた理論結果が正しいということを意味している。実際、時間  $T = 500$  (計算回数 500000) のとき、以下の定常と思われる状態を得た。



## 5. 時間周期問題の数値実験

この節では、2次元ダム問題  $P(f, g)$  の時間周期問題について考察する。 $P(f, g)$  の時間周期問題については、既に [5, 6] で議論されている。その理論結果は、以下のとおりである。

(周期問題) (cf. [5, 6]) 溜池の水位  $h_1(t), h_2(t)$  と source term  $f(t)$  がそれぞれ時間周期であるとする。つまり、

$$h_1(t) = h_1(t + T_1), \quad h_2(t) = h_2(t + T_2) \quad \text{and} \quad f(t) = f(t + T_3), \quad \forall t \in \mathbb{R}$$



とする。ただし、周期  $T_1$  と  $T_2$  の比は有理数で、 $T_3$  は周期  $T_1$  と  $T_2$  の最小公倍数とする。このとき、ダム問題  $P(f, g)$  の時間  $T_3$ -周期解  $v_p$  が一意に存在する。

そして、任意の初期値問題  $CP(f, g)$  の解  $v$  on  $[t_0, +\infty)$ , ( $t_0 \in \mathbb{R}$ ) に対して、

$$\rho(v(t)) - \rho(v_p(t)) \rightarrow 0 \quad \text{in } H \text{ and weakly in } X \quad (\text{as } t \rightarrow +\infty)$$

となる。

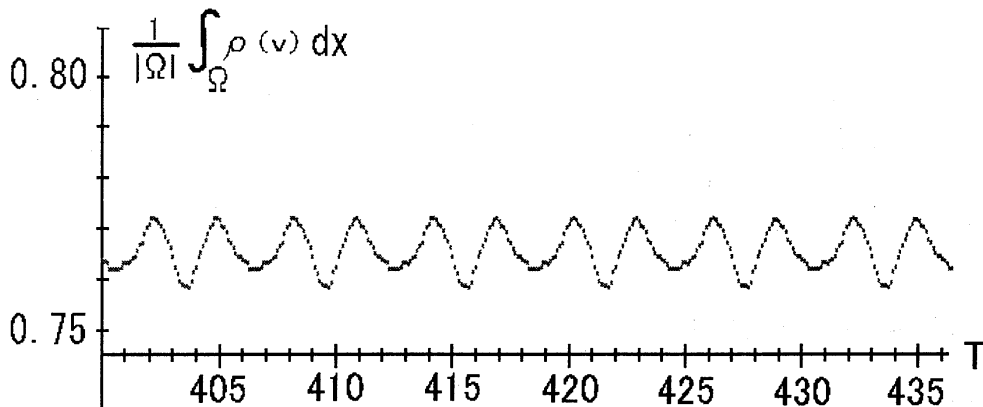
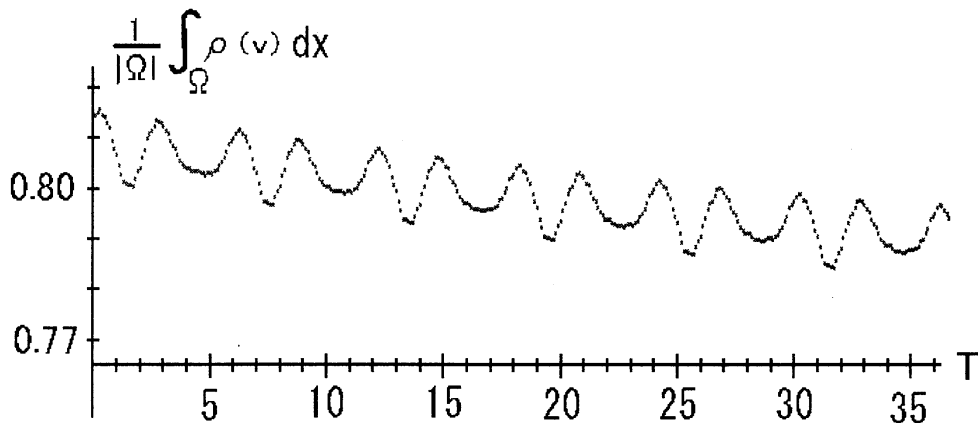
数値実験を通して立場からこの理論結果を検証してみる。

(数値データ) 簡単にする為、source term  $f \equiv 0$  とする。そして、ダム  $\Omega := (0, 2) \times (0, 4)$  の両側の溜池の水位をそれぞれ

$$h_1(t) = \cos\left(\frac{2}{3}\pi t\right) + 2.5, \quad h_2(t) = 0.5 \cos(\pi t) + 0.7, \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

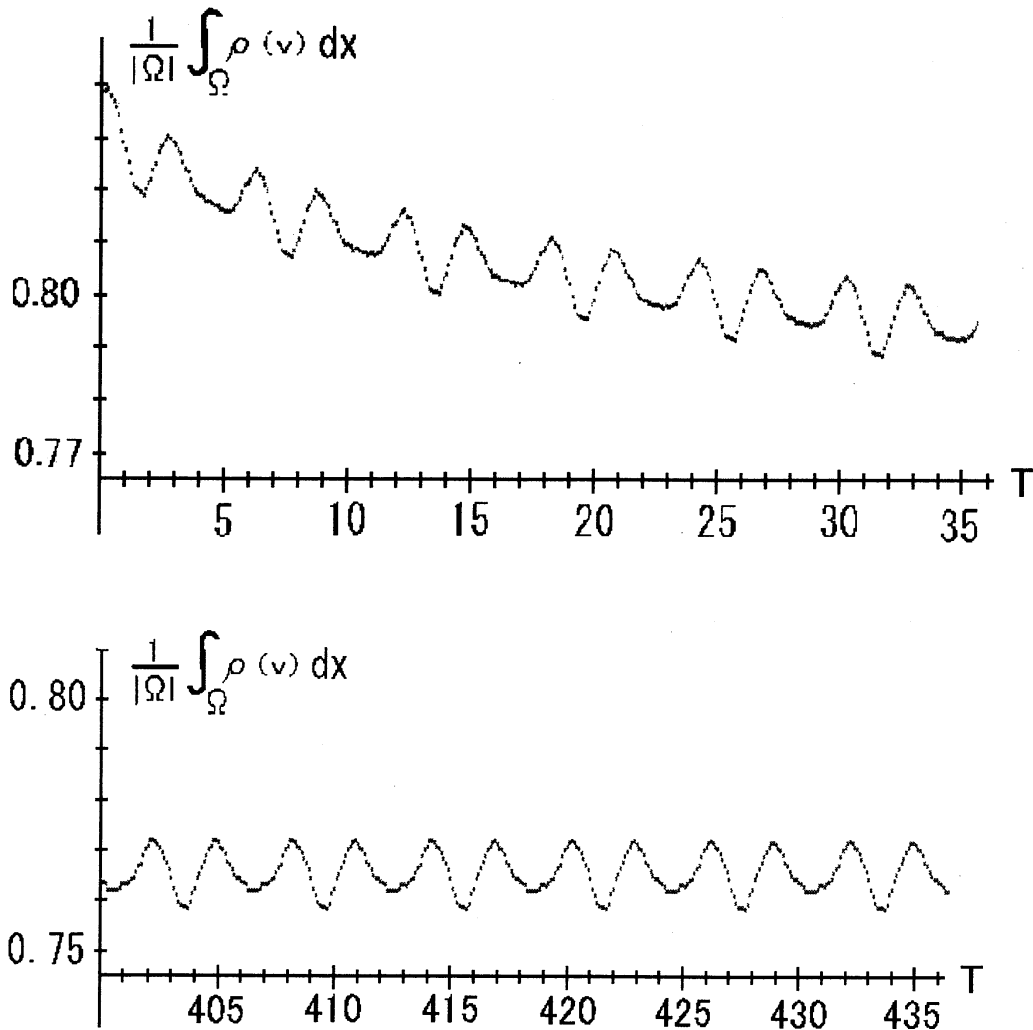
とする。すると、 $T_1 = 3$ ,  $T_2 = 2$  となるので、 $P(f, g)$  は時間周期  $T_3 = 6$  を持つ時間周期ダム問題となる。

(数値実験結果 (I)) 図 1 と同様な初期状態を考察する。このとき、次の数値実験結果を得た。



始めは、積分値が増えたり減ったりしている。しかし、ある程度時間が経つと時間周期 6 をもつ時間周期の値になった。

**(数値実験結果 (II))** 図 2 と同様な初期状態を考察する。このとき、次の数値実験結果を得た。



この場合も同様に、始めは、積分値が増えたり減ったりし、ある程度時間が経つと時間周期  $T_3 = 6$  をもつ時間周期の値になった。しかもその値は、数値実験結果 (I) とほぼ一致する。つまり、有限時間で時間周期  $T_3 = 6$  をもつ時間周期状態になった。これは、[5, 6] で得られた理論結果が正しいということを意味している。

## 6. 時間概周期問題の数値実験

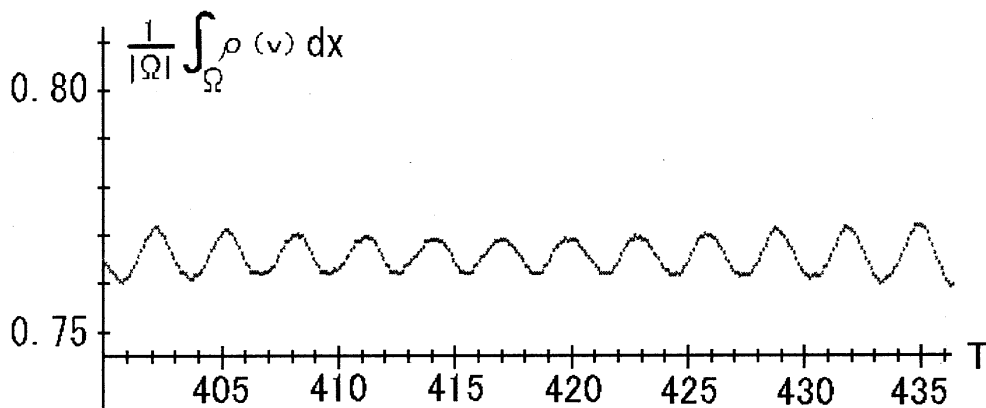
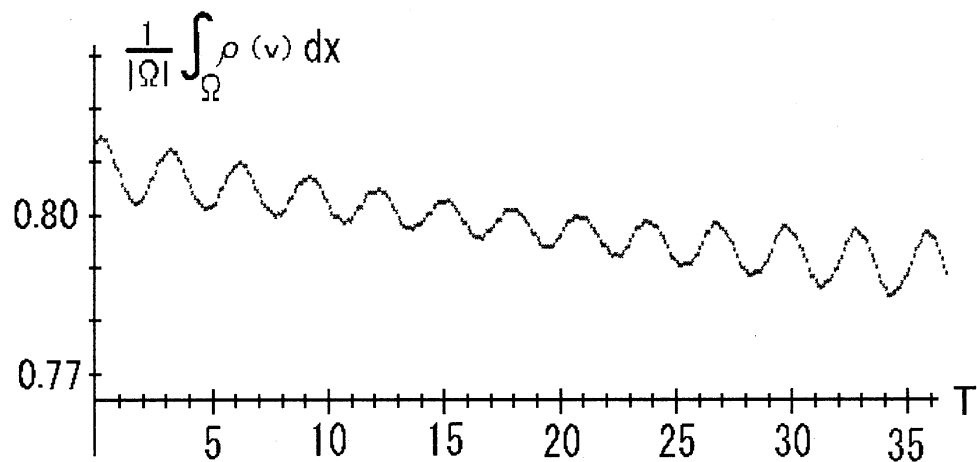
この節では、2次元ダム問題  $P(f, g)$  の時間概周期問題について考察する。つまり、2節で得られた  $P(f, g)$  の時間周期問題の理論結果を数値実験をとおして再確認する。

(数値データ) 簡単にする為、source term  $f \equiv 0$  とする。そして、ダム  $\Omega := (0, 2) \times (0, 4)$  の両側の溜池の水位をそれぞれ

$$h_1(t) = \cos\left(\frac{2}{3}\pi t\right) + 2.5, \quad h_2(t) = 0.5 \cos(2t) + 0.7, \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

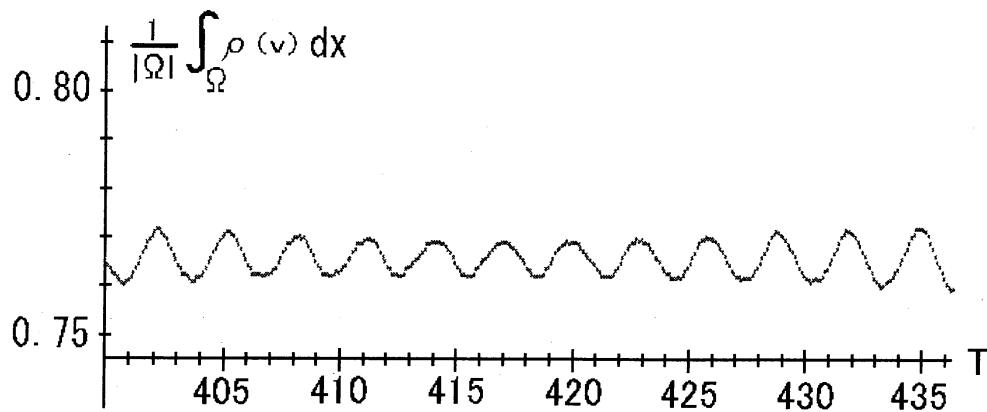
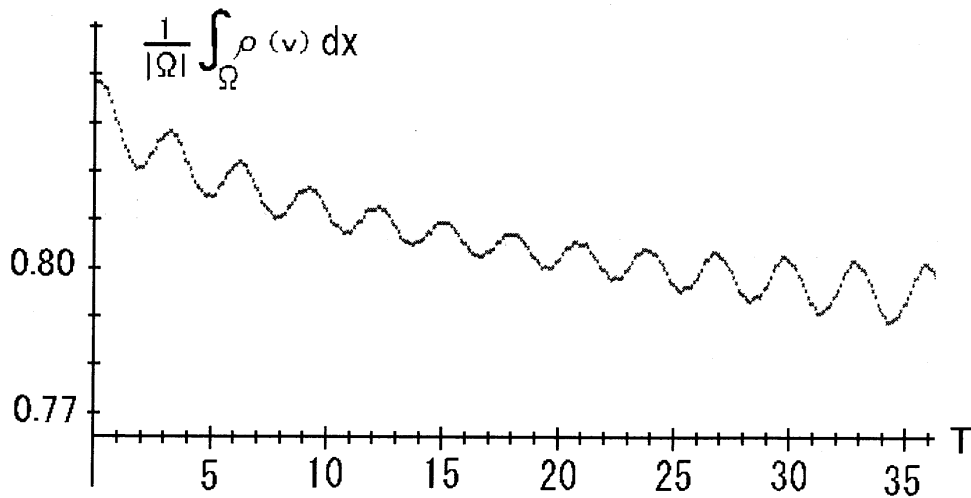
とする。すると、 $T_1 = 3, T_2 = \pi$  となり、その2つの周期の比は、無理数となる。よってこの場合、ダム問題  $P(f, g)$  は時間概周期となる。

(数値実験結果 (I)) 図1と同様な初期状態を考察する。このとき、次の数値実験結果を得た。



始めは、積分値が増えたり減ったりしている。しかし、ある程度時間が経つと上記のような時間変化することがわかった。

(数値実験結果 (II)) 図2と同様な初期状態を考察する。このとき、次の数値実験結果を得た。



この場合も同様に、始めは、積分値が増えたり減ったりし、ある程度時間が経つと数値実験結果 (I) とほぼ一致することがわかった。この一意な挙動が時間概周期であるかどうかは、数値実験結果のデータからは、わからない。しかしここで、定理 2.3 を適用することにより、上記のグラフが一意的な時間概周期であることがわかる。つまり、有限時間で定理 2.3 が成立することが、この数値実験から予想される。

## References

- [1] H. W. Alt and S. Luckhaus, Quasilinear elliptic-parabolic differential equations, *Math. Z.*, **183**(1983), 311-341.
- [2] L. Amerio and G. Prouse, *Almost Periodic Functions and Functional Equations*, Van Nostrand Reinhold, New York, (1971).
- [3] A. Damlamian and N. Kenmochi, Periodicity and almost periodicity of solutions to a multi-phase Stefan problem in several space variables, *Nonlinear Anal.*, **12**(1988), 921-934.

- [4] H. Ishii, Asymptotic stability and existence of almost-periodic solutions for the one-dimensional two-phase Stefan problem, *Math. Japon.*, **25**(1980), 379-393.
- [5] N. Kenmochi and M. Kubo, Periodic solutions to a class of nonlinear variational inequalities with time-dependent constraints, *Funk. Ekvac.*, **30**(1987), 333-349.
- [6] N. Kenmochi and M. Kubo, Periodic behavior of solutions to parabolic-elliptic free boundary problems, *J. Math. Soc. Japan*, **41**(1989), 625-640.
- [7] N. Kenmochi and M. Ôtani, Nonlinear evolution equations governed by subdifferential operators with almost periodic time-dependence, *Rend. Acc. Naz. Sci. XL, Memorie di Mat.*, **140**(1986), 65-91.
- [8] N. Kenmochi and I. Pawlow, A class of nonlinear elliptic- parabolic equations with time-dependent constraints, *Nonlinear Anal.* **10**(1986), 1181-1202.
- [9] N. Kenmochi and I. Pawlow, Parabolic-elliptic free boundary problems with time-dependent obstacles, *Japan J. Appl. Math.* **5**(1988), 87-121.
- [10] N. Kenmochi and I. Pawlow, Asymptotic behavior of solutions to parabolic-elliptic variational inequalities, *Nonlinear Anal.* **13**(1989), 1191-1213.
- [11] M. Kubo, Periodic and almost periodic stability of solutions to degenerate parabolic equations, *Hiroshima Math. J.*, **19**(1989), 499-514.
- [12] N. Yamazaki, Almost periodicity of solutions to elliptic-parabolic free boundary problems, *Proceedings of the international conference on dynamical systems and differential equations.* (to appear)
- [13] S. Zaidman, *Almost-periodic functions in abstract spaces*, Pitman Research Notes in Mathematics Series. **126**, Longman, Harlow, 1985.