

DE 変換公式と FFT による水面重力波の解の 高精度計算について

小林 健太 (Kenta Kobayashi), 岡本 久 (Hisashi Okamoto)
 京都大学・数理研 (Research Institute for Mathematical Sciences, Kyoto Univ.)
 朱 景輝 (Jinghui Zhu) アモイ大学 (Xiamen Univ.)

1 Introduction

無限の深さを持つ水面上を速度 c で伝播する波の運動 (Fig.1) を記述した方程式として Levi-Civita's equation

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{e^{2Hv}}{2} + qe^{Hv} \frac{dv}{ds} \right) - pe^{-Hv} \sin v = 0$$

が知られている。ここで $v(s)$ は水面が水平方向と為す角度であり

$$H : \text{Hilbert transform}$$

$$p = gL/(2\pi c^2) \quad q = 2\pi T/(mc^2 L)$$

ただし L は波長, g は重力定数, T は表面張力, m は密度である。

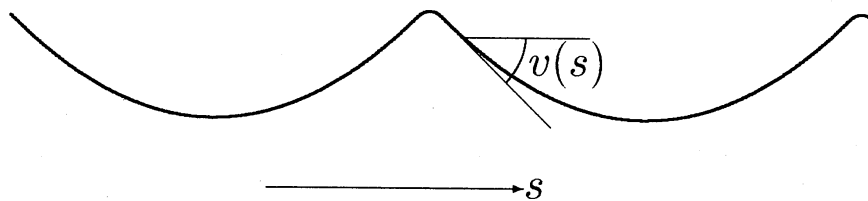


Fig 1: Progressive water-wave

Nekrasov[1] は $q = 0$ つまり表面張力を無視した時, Levi-Civita's equation を変形する事により次の方程式を得た。ここで $\mu = 3p \exp(-3Hv(0))$

$$(1.1) \quad \begin{cases} v(s) = \frac{1}{3\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log \left(\frac{1}{|2 \sin((s-t)/2)|} \right) \frac{\mu \sin v(t)}{1 + \mu \int_0^t \sin v(w) dw} dt, & s \in [-\pi, \pi], \\ v(-s) = -v(s), \\ v(s + 2\pi) = v(s), \\ v(s) \geq 0, & s \in [0, \pi]. \end{cases}$$

この方程式の数値解の概形を Fig.2 に示す。 μ が大きくなればなるほど $s = 0$ における立ち上がりが急になり計算が困難になる。

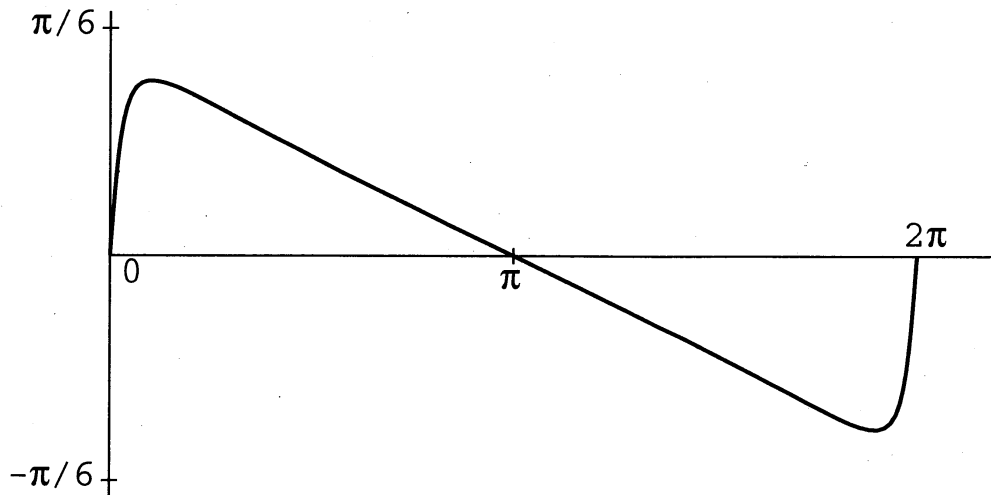


Fig 2: The shape of the numerical solution when $\mu = 40$

Chandler and Graham [4] は $[0, \pi]$ を 3つの領域に分け, それぞれの領域について違った分点の取り方をし区分的一次関数で近似を行った. 彼らの解法は非常に人工的であるため応用性に乏しく, さらに領域の継ぎ目で精度が悪くなっている. よって, 自然な数値解法を提案するという事には大きな意味があると思われる.

2 DE 変換公式を用いた数値解法

我々はまず, この方程式の数値計算を行うにあたり, DE 変換公式と \arctan 関数によって生成される連続的な分点を用いた. これにより μ が非常に大きな値を取った時にも安定して, かつ, Chandler and Graham の方法に比べて精度良く解を求める事が出来た. ただし, 計算に際しては区分的一次関数による近似を用いているので, 精度良くとはいっても $10^{-4} \sim 10^{-5}$ 程度の誤差は発生してしまう.

3 DE 変換公式と FFT を用いた数値解法

我々は更に, 区分的一次関数による近似を用いない, 解の解析性を利用した数値解法を考案した. この方法においては, 分点を DE 変換公式によって生成し, 積分方程式中の原始関数を FFT を用いて計算する事によって, 分点数に対して指数的に誤差を減少させる事ができる. ただし, DE 変換公式は解の解析性と周期性を生かすために少し変形した.

まず (1.1) を次のように解きやすい形に書き換える.

$$(3.1) \quad v(s) = \frac{1}{6\pi} \int_0^{2\pi} \frac{G(t) - G(s)}{\tan((t-s)/2)} dt, \quad s \in [0, 2\pi].$$

ただし $G(\theta) = \log \left(\mu^{-1} + \int_0^\theta \sin v(w) dw \right)$

ここで (3.1) の右辺を $\Gamma v(s)$ と書いて

$$v^{(0)}(s) = \frac{\pi - s}{6}, \quad v^{(p+1)}(s) = \Gamma v^{(p)}(s), \quad s \in [0, 2\pi].$$

なる反復を収束するまで繰り返す.

さらに DE 変数変換 $\varphi(y)$ を以下のように定義し

$$\varphi(y) = \pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \tanh \left(\frac{\pi}{2} \sinh(y + 2n)l \right) - \alpha(n) \right\}$$

$$\text{ただし } \alpha(n) = \begin{cases} 1 & (n > 0), \\ -1 & (n \leq 0). \end{cases}$$

これを用いて積分変数を変換した. $\varphi(y)$ の概形を Fig.3 に示す. また, 定積分の計算には DE 積分公式を利用し, $G(t)$ 中に現れる原始関数は FFT で Fourier 級数展開して項別に積分する事により求めた.

具体的には $n = 2m$ を決め y_j, t_j, w_j を

$$y_j = \frac{j}{m}, \quad t_j = \varphi(y_j), \quad w_j = \varphi'(y_j), \quad j = -m, \dots, m.$$

で定め, $v^{(p)}(t_j)$ の近似値を $v_j^{(p)}$ と書く.

その上で次のように $v_j^{(0)}, v_j^{(1)}, v_j^{(2)}, \dots$ を計算していく

$$v_{-m}^{(0)} = v_m^{(0)} = 0 \quad v_j^{(0)} = \frac{\pi - t_j}{6}, \quad -m + 1 \leq j \leq m - 1$$

$$a_k^{(p)} = \frac{1}{n} \sum_{j=-m+1}^{m-1} \sin v_j^{(p)} \cdot w_j \exp \left(-i \frac{kj\pi}{m} \right), \quad -m \leq k \leq m - 1$$

$$b_j^{(p)} = \sum_{\substack{k=-m+1 \\ k \neq 0}}^{m-1} \frac{a_k^{(p)}}{ik\pi} \exp \left(i \frac{kj\pi}{m} \right), \quad -m \leq j \leq m - 1$$

$$c_j^{(p)} = b_j^{(p)} - b_{-m}^{(p)}, \quad G_j^{(p)} = \log(\mu^{-1} + c_j^{(p)}), \quad -m + 1 \leq j \leq m - 1$$

$$v_q^{(p+1)} = \frac{1}{6m\pi} \left\{ \sum_{\substack{j=-m+1 \\ j \neq q}}^{m-1} \frac{G_j^{(p)} - G_q^{(p)}}{\tan((t_j - t_q)/2)} w_j + 2 \frac{\sin v_q^{(p)}}{\mu^{-1} + c_q^{(p)}} w_q \right\}, \quad -m + 1 \leq q \leq -1$$

$$v_q^{(p+1)} = -v_{-q}^{(p+1)}, \quad 1 \leq q \leq m - 1$$

$$v_{-m}^{(p+1)} = v_m^{(p+1)} = 0.$$

ここで $a_k^{(p)}, b_j^{(p)}$ の計算にはそれぞれ FFT と逆 FFT を用いている.

4 数値計算結果 (Nekrasov's equation)

反復の前後の間の相対誤差

$$E = \max_j |v_j^{(p+1)} - v_j^{(p)}|$$

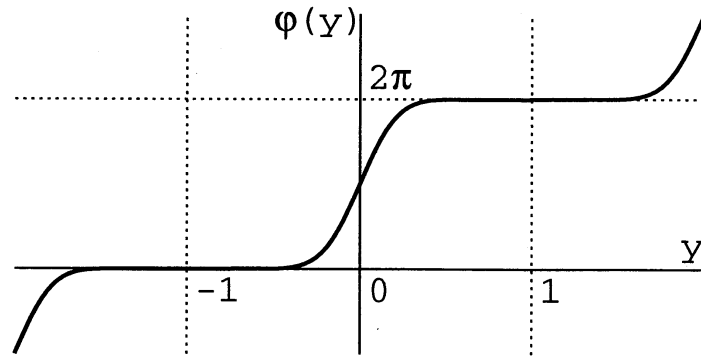


Fig 3: The shape of $\varphi(y)$ when $l = 3.2$

は反復する毎に小さくなるが、その相対誤差が小さくならなくなった時点で反復を終了している。 $n = 256$, $l = 3.2$, $\mu = 10^5$ のときの様子を Fig.4 に示す。他の n , l , μ でも状況はほとんど同じであり、反復回数は 24 ~ 33 回で収束する。一回の反復について相対誤差は約 0.26 倍のペースで減少している。

$l = 3.2$ の時の分点数と最大誤差の関係を表にしたものが Table.1 である。Fig.5 は 誤差の分布を詳しく表したものである (上のグラフは $n = 128$ のときの数値解)。0 付近を拡大するため横軸には対数を取っている。

これを見ると $\log(s) = -4.0$ 付近で誤差が大きくなっているのが分かるが、 $n = 512$ まで n を大きくすれば全ての s で十分な精度が得られている。これらの結果から、Nekrasov's equation の数値解を求める上で当計算法が極めて有効であるという事がわかる。

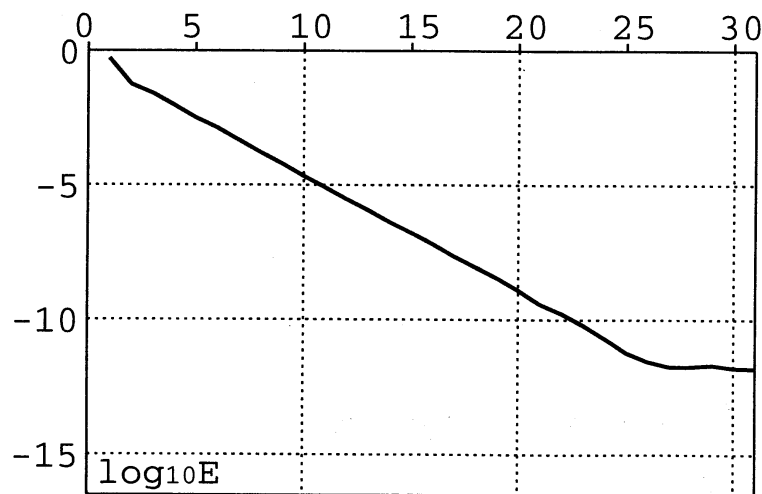


Fig 4: The relative error between two successive steps when $n = 256$ and $l = 3.2$

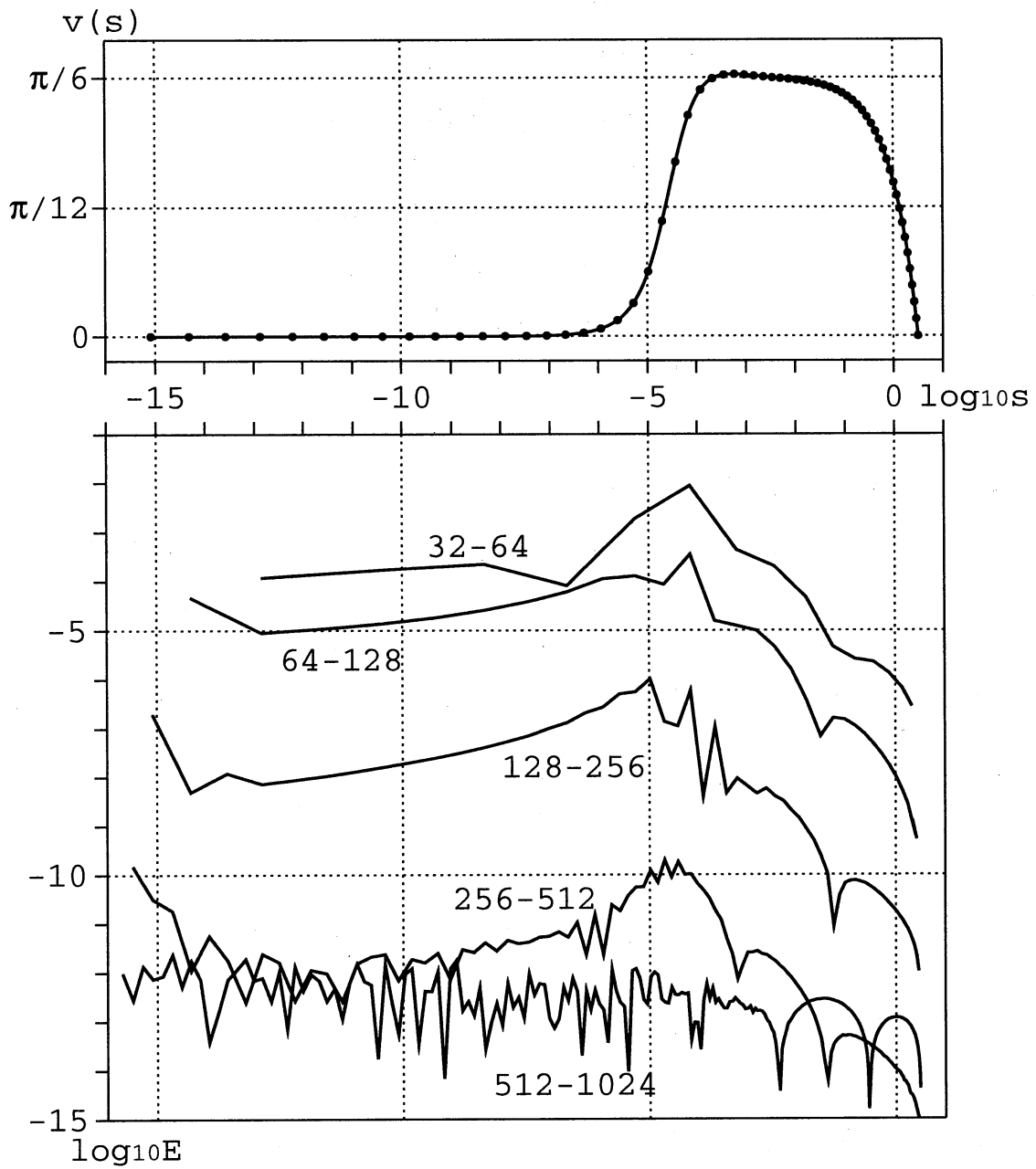


Fig 5: The relative error between different n when $l = 3.2$

Table 1: Numerical results of Nekrasov's eq.

分点の数	誤差
32 - 64	8.6468×10^{-3}
64 - 128	3.4844×10^{-4}
128 - 256	1.0217×10^{-6}
256 - 512	1.9865×10^{-10}
512 - 1024	2.3188×10^{-12}
1024 - 2048	3.2182×10^{-12}

5 Yamada's equation

H.Yamada[3] は, solitary wave の運動を記述する以下のような方程式を考案した.

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{e^{2Hv}}{2} + q |\cos(s/2)| e^{Hv} \frac{dv}{ds} \right) - p \frac{e^{-Hv} \sin v}{|\cos(s/2)|} = 0$$

これは Yamada's equation と呼ばれている. 我々はこの方程式についても $q = 0$ の条件の下で数値計算を行った.

$q = 0$ の時, Nekrasov's equation と同じように変形すると

$$v(s) = \frac{1}{6\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\sin(t-s)}{1-\cos(t-s)} \{G(t) - G(s)\} dt, \quad s \in [0, 2\pi].$$

$$\text{ただし} \quad G(\theta) = \log \left(\mu^{-1} + \int_0^\theta \frac{\sin v(w)}{|\cos(w/2)|} dw \right)$$

ここで 上式の右辺を $\Gamma v(s)$ と書いて

$$v^{(0)}(s) = \frac{\pi - s}{6}, \quad v^{(p+1)}(s) = \Gamma v^{(p)}(s), \quad s \in [0, 2\pi].$$

なる反復を収束するまで繰り返す. 数値解の概形を Fig.6 に示す.

$s = \pi$ で解が不連続になるという点が Nekrasov's equation との違いである. そのため DE 変数変換として以下のようなものを用いた.

$$\varphi(y) = \pi \left\{ \frac{\exp \left((\pi/2) \sinh(2y - 1) l_1 \right)}{\exp \left((\pi/2) \sinh(2y - 1) l_1 \right) + \exp \left(-(\pi/2) \sinh(2y - 1) l_2 \right)} - \frac{\exp \left(-(\pi/2) \sinh(2y + 1) l_1 \right)}{\exp \left((\pi/2) \sinh(2y + 1) l_2 \right) + \exp \left(-(\pi/2) \sinh(2y + 1) l_1 \right)} \right\}$$

$\varphi(y)$ の概形を Fig.7 に示す.

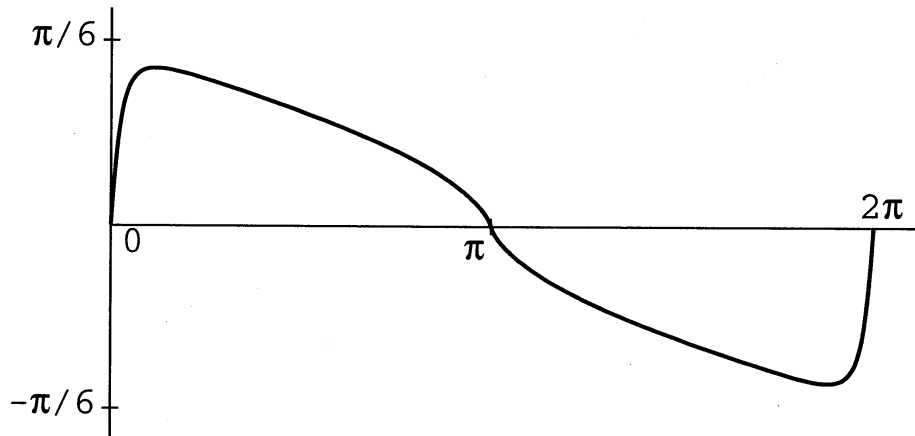


Fig 6: The shape of the numerical solution when $\mu = 40$

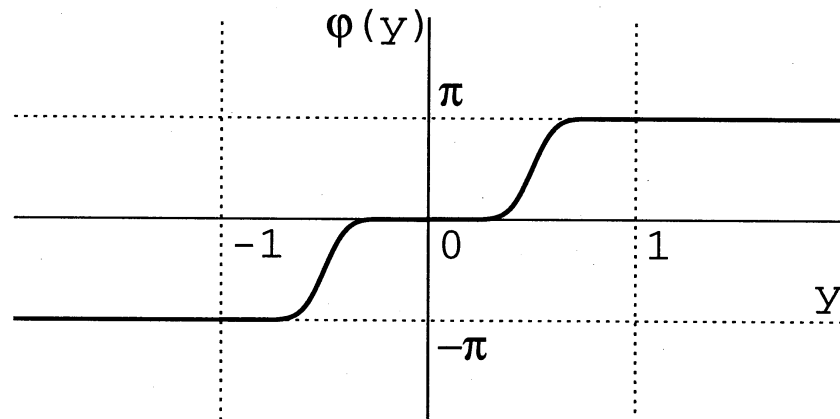


Fig 7: The shape of $\varphi(y)$ when $l_1 = l_2 = 3.2$

6 数値計算結果 (Yamada's equation)

Nekrasov's equation の場合と同じように, FFT を用いて数値計算した結果を示す. $l = 3.2$ の時の, 反復に伴う誤差の減少していく様子を表したものが Fig.8, 分点数と最大誤差の関係を表にしたものが Table.2である. また, 誤差の分布の様子を Fig.9 に示した (上のグラフは $n = 128$ のときの数値解).

解に特異点があり, その周辺に多数の分点を集中させねばならないため Nekrasov's equation の数値計算結果と比べると, 収束が若干遅く精度も悪くなっている. それでも $n = 1024$ の時には 10^{-11} のオーダーにまで誤差が押さえられており, 実用上は十分であるといえる.

7 まとめ

水面重力波の周期解に関する Nekrasov's equation 及び孤立波に関する Yamada's equation に対して, DE 変換公式と FFT を適用する事により, 分点数に対して飛躍的に誤差を減少

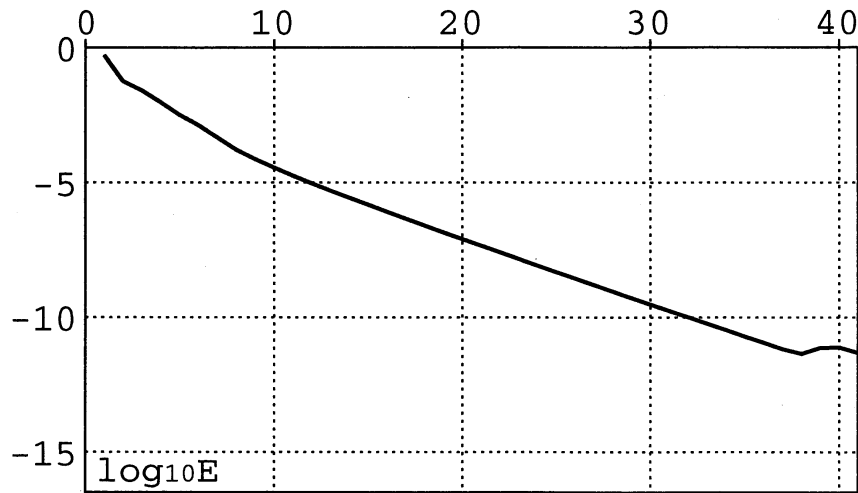


Fig 8: The relative error between two successive steps when $n = 256$ and $l_1 = l_2 = 3.2$

Table 2: Numerical results of Yamada's eq.

分点の数	誤差
32 - 64	3.1643×10^{-1}
64 - 128	1.1028×10^{-3}
128 - 256	2.9807×10^{-4}
256 - 512	6.1589×10^{-7}
512 - 1024	5.8268×10^{-11}

させる事のできるアルゴリズムを構築した。

これは、両方程式に対して自然で応用性の高い数値計算法を構築するという目的を達成するものである。

さらに実際の数値計算でその有効性を確かめる事ができた。

参考文献

- [1] A.I.Nekrasov, On waves of permanent type I, Izv. Ivanovo-Voznesensk. Polit. Inst., **3**(1921), pp.52-65.
- [2] H.Takahasi and M.Mori, Double exponential formulas for numerical integration, Publ. Res. Inst. Math. Soc., **9**(1974), pp.721-741.

- [3] H.Yamada, On the highest solitary wave, Report Res. Inst. Appl. Mech., Kyushu Univ., 5(1957), pp.53-67.
- [4] G.A.Chandler and I.G.Graham, The computation of water waves modelled by Nekrasov's equation, SIAM J. Numer. Anal., 30(1993), pp.1041-1065.

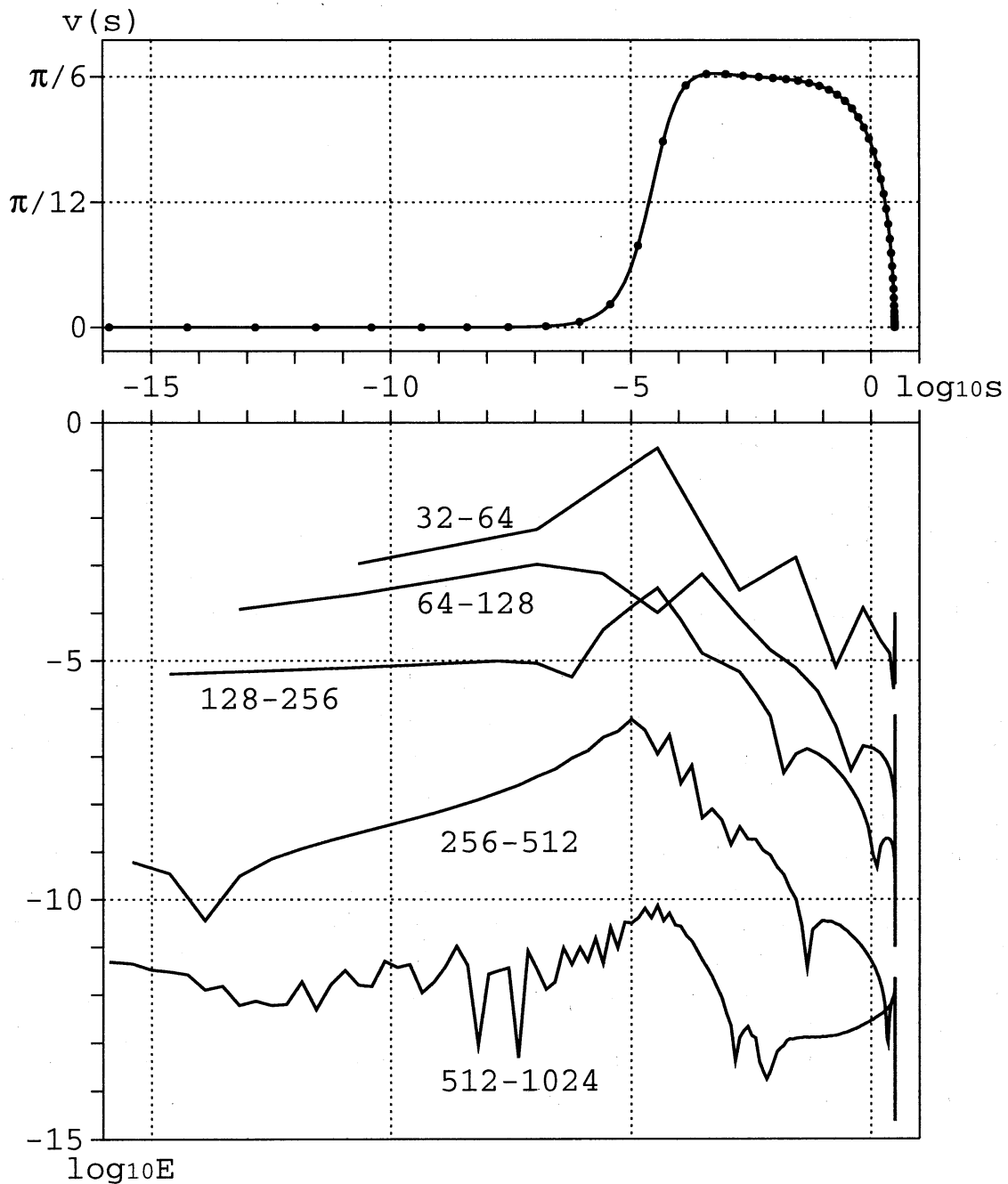


Fig 9: The relative error between different n when $l_1 = l_2 = 3.2$