

3 次元渦電流問題の数値解法

金山 寛 田上 大助 (九大 工研)
菊地 文雄 (東大 数理)

KANAYAMA Hiroshi TAGAMI Daisuke (Kyushu Univ.)
KIKUCHI Fumio (Univ. of Tokyo)

1 序論

渦電流の振る舞いを解析することは、例えば変圧器や発電機などの設計といった実用問題において重要であり、これまでも渦電流問題に関する多くの数値計算や理論結果が得られている; 例えば Alonso and Valli [1], Bossavit [2], Fujiwara and Nakata [3] やその参考文献を参照. 文献 [3] にあるように、渦電流問題には多くの定式化が用いられている. この中で我々は、静磁場問題に対して数学的正当性が保証された計算手法の一つである Kikuchi [10], [11] の結果に関連した混合型の有限要素法を用いてきた; Kanayama et al. [6] や Kanayama and Kikuchi [7] を参照. しかし、混合法による定式化により、反復法の適用が困難である、0 である Lagrange 乗数の導入が必要である、といった大規模化の障害となる面もあった. 本論文では、磁気ベクトルポテンシャルを未知数とする渦電流問題の混合法による定式化からある直和分解に基づいて Lagrange 乗数を消去し、問題を簡略化できることを示す (ただし元となる定式化は、従来我々が用いてきた混合型の定式化 [6], [7] とは異なり、むしろ文献 [1] の定式化に関連している).

簡略化では、近似電流密度の連続性が重要となる. この条件は物理的に自然であるだけでなく、反復法の収束性の改善に効果があるため、連続性を課す手法はいくつか提案されている; 例えば Fujiwara et al. [4], Kameari and Koganezawa [5] 参照. 本論文では、簡略化の際に用いる直和分解に関連して、スカラーポテンシャルの勾配の成分を取り除くことで近似電流密度に連続性を課す手法を用いた. また、連立 1 次方程式に対し双共役勾配 (BiCG) 法を適用した結果も紹介する.

2 混合法の簡略化

Hilbert 空間 V, Q を考える. 以下、上付き添字 $'$ は対応する双対空間を表す. 空間 $V \times V, V \times Q$ 上の連続双一次形式をそれぞれ a, b とし、線形写像 A, B , 双対写像 B' を $\langle Au, v \rangle \equiv a(u, v)$, $\langle Bv, q \rangle = \langle B'q, v \rangle \equiv b(v, q)$ で定める. この時次の問題を考える: 任意に $(f, g) \in V' \times Q'$ を与えた時、

$$\begin{cases} Au + B'p = f & \text{in } V', \\ Bu = g & \text{in } Q' \end{cases} \quad (1a)$$

$$\quad (1b)$$

を満足する $(u, p) \in V \times Q$ を求めよ.

さらに写像 B の核を V_0 , 空間 V での V_0 の直交補空間を V_1 , 双対空間 V' から V'_0 への連続線形写像 P を

$$\langle Pf, v \rangle = \langle f, v \rangle \quad \forall f \in V', \forall v \in V_0$$

で定める. 以下では双一次形式 a が V_0 上で強圧条件を, 双一次形式 b が $V \times Q$ 上で下限上限条件をそれぞれ満たすとする. 写像 P を用いれば, 問題 (1) は方程式

$$PAu_0 = P(f - Au_1) \quad \text{in } V'_0 \quad (2)$$

を満たす $u_0 \in V_0$ を求める問題に帰着できる. ただし関数 u_1 は空間 V_1 の元で $Bu_1 = g$ およびある正定数 β に対して $\|u_1\|_V \leq \beta^{-1} \|g\|_{Q'}$ を満たす. ここで $\|\cdot\|_V, \|\cdot\|_{Q'}$ はそれぞれ V, Q' のノルムである.

最後に問題 (2) において

$$Au = 0, f = 0 \quad \text{in } V'_1, \quad g = 0 \quad \text{in } Q' \quad (3)$$

を仮定し問題を簡略化する. 以上のことから, 問題 (1) が

$$Au = f \quad \text{in } V' \quad (4)$$

を満たす $u \in V_0$ を求める問題に最終的に帰着できる.

3 渦電流問題の混合法の簡略化

多面体領域 Ω を考え, その境界を $\partial\Omega$, 境界上の外向き単位法線を n とする. 領域 Ω は互いに重ならない 2 つの部分領域 R および S からなるとし, それぞれの領域の境界の共通部分を Γ とする. ここでは領域 R が多面体であり, 領域 R と Ω の境界は共通部分を持たないとする. 電流密度 f を与え, 磁気ベクトルポテンシャル u を求める以下の渦電流問題を考える:

$$\begin{cases} \text{rot}(\nu \text{rot } u) - i\omega\sigma u = f & \text{in } \Omega, & (5a) \\ \text{div } u = 0 & \text{in } S, & (5b) \\ u \times n = 0 & \text{on } \partial\Omega, & (5c) \\ \int_{\Gamma} u \cdot n \, ds = 0. & & (5d) \end{cases}$$

ここに ν は磁気抵抗率, σ は導電率, ω は角速度, i は虚数単位である. 本論文では, 磁気抵抗率 ν は正の区分的定数関数, 導電率 σ は領域 R で正定数, 領域 S で 0 であるとし, 電流密度 f が

$$\text{div } f = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (6)$$

を満たすとする.

各成分が Ω 上で 2 乗可積分である複素数値関数からなる空間を $(L^2(\Omega))^3$ とし, その内積を (\cdot, \cdot) で表す. また 1 階導関数までが $L^2(\Omega)$ に含まれる関数からなる空間を $H^1(\Omega)$ とする. 関数空間 X, V および Q を

$$\begin{aligned} X &\equiv \{v \in (L^2(\Omega))^3; \text{rot } v \in (L^2(\Omega))^3\}, \\ V &\equiv \{v \in X; v \times n = 0 \text{ on } \partial\Omega\}, \\ Q &\equiv \{q \in H^1(\Omega); q = 0 \text{ on } \partial\Omega, \exists c \in \mathbb{C} \text{ such that } q = c \text{ in } R\}. \end{aligned}$$

と定める.

方程式 (5) に対する以下の混合型の定式化を考える: 任意の $(u, q) \in V \times Q$ に対して

$$\begin{cases} a(u, v) + b(v, p) = (f, v), & (7a) \\ b(u, q) = 0 & (7b) \end{cases}$$

を満たす $(u, p) \in V \times Q$ を求めよ. ただし

$$\begin{aligned} a(u, v) &\equiv (\nu \operatorname{rot} u, \operatorname{rot} v) - (i\omega\sigma u, v), \\ b(v, q) &\equiv (v, \operatorname{grad} q) \end{aligned}$$

である.

領域 Ω に対する一様に正則な 4 面体分割を考える. Nedelec の 1 次要素によって張られる空間を X_h , 通常の 4 面体 1 次要素によって張られる空間を M_h とし $V_h \equiv X_h \cap V$, $Q_h \equiv M_h \cap Q$ と定める. また, 線形写像 A_h, B_h , 双対写像 B'_h を $\langle A_h u_h, v_h \rangle \equiv a(u_h, v_h)$, $\langle B_h v_h, q_h \rangle = \langle B'_h q_h, v_h \rangle \equiv b(v_h, q_h)$, 写像 B_h の核を V_{0h} , 空間 V_h での V_{0h} の直交補空間を V_{1h} で定める. なお $V_{1h} = \operatorname{grad} Q_h$ が成り立ち, 写像 A_h の核は V_{1h} である. この時方程式 (7) に対する以下の方程式を考える:

$$\begin{cases} A_h u_h + B'_h p_h = f & \text{in } V'_h, & (8a) \\ B_h u_h = 0 & \text{in } Q'_h & (8b) \end{cases}$$

を満たす $(u_h, p_h) \in V_h \times Q_h$ を求めよ.

仮定 (6) より渦電流問題では条件 (3) に対応して

$$A_h u_h = 0, f = 0 \quad \text{in } V'_{1h} \quad (9)$$

が成り立つことに注意すれば, 方程式 (8) は

$$A_h u_h = f \quad \text{in } V'_h \quad (10)$$

を満たす $u_h \in V_{0h}$ を求める問題に簡略化できる.

実際の計算では, 方程式 (10) における電流密度 f は何らかの近似を用いて f_h と計算する. ところが, 一般には条件 $f_h = 0$ in V'_{1h} は成り立たない. そこで方程式

$$(\operatorname{grad} r_h, \operatorname{grad} q_h) = (f_h, \operatorname{grad} q_h) \quad \forall q_h \in Q_h \quad (11)$$

を満たす $r_h \in Q_h$ を用いて補正近似電流密度 f'_h を

$$f'_h \equiv f_h - \operatorname{grad} r_h \quad (12)$$

で定める.

Remark 3.1 写像 A_h の核が V_{1h} ($= \operatorname{grad} Q_h$) であるから式 (12) で定まる補正は連立一次方程式の既知ベクトルから係数行列の核の成分を取り除くことに対応する. 従って適当な反復法のもとでは, V_{0h} の元を初期値に選択することで, 基底が V_h の元であっても得られる解 u_h が V_{0h} に入ることが示せる.

Remark 3.2 実際問題では電流が流れるのは解析領域の一部である場合が多い. この時, 方程式 (11) を Ω の代わりに対応する部分領域上でのみ考えることができる.

4 数値計算結果

4.1 TEAM モデル

本節では数値計算モデルとして Fig. 1 に示す The Testing Electromagnetic Analysis Methods workshop が設定した非対称穴あき導体を持つ精度検証用モデル Problem 7 (以下 TEAM モデル) を考える. TEAM モデルについては文献 [2], [3], [6], [8], およびその参考文献を参照のこと. 解析領域は導体とコイルをその内部に含む $3\text{ [m]} \times 3\text{ [m]} \times 0.749\text{ [m]}$ の直方体で, 境界では条件 (5c) が成り立つとする. 磁気抵抗率 ν は $1/(4\pi) \times 10^7\text{ [m/H]}$, 導電率 σ は $3.526 \times 10^7\text{ [S/m]}$, 角速度 ω は $2\pi \times 50\text{ [rad/sec]}$, 励磁電流密度の実部, 虚部の絶対値はそれぞれ $1.0968 \times 10^6\text{ [A/m}^2\text{]}$, $0\text{ [A/m}^2\text{]}$ とする.

Fig. 2 の様に解析領域を 4 面体分割する. 用いたメッシュの要素数, 複素自由度数はそれぞれ 47716, 74341 である. 電流密度を通常の 4 面体 1 次要素で近似する. 電流はコイルにのみ流れているので, 補正をコイル領域で行う. 連立 1 次方程式の解法には双共役勾配 (BiCG) 法を用いた. 前処理には対角スケールリングまたは加速係数付きの不完全 Cholesky 分解 [12] を用いた. 加速係数は 1.3 を用いた. 初期ベクトルには $\mathbf{0}$ を用い, 収束判定は残差 $\|\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{Ax} - \mathbf{b})\|/\|\mathbf{M}^{-1}\mathbf{b}\|$ が 1.0×10^{-7} 以下になることで行った. ここに \mathbf{M} は前処理行列, \mathbf{A} は剛性行列, \mathbf{x} は解ベクトル, \mathbf{b} は既知ベクトル, $\|\cdot\|$ は Euclid ノルムである. 計算には補助記憶装置を 512MB 搭載した Alpha 600MHz を用いた.

Fig. 3 は BiCG 法の残差の履歴である. 縦軸は残差の対数スケールで横軸は BiCG 法の反復回数である. 補正を加えることによって BiCG 法が収束するようになっていくことがわかる. Table 1 は BiCG 法の使用メモリーおよび計算時間である. 加速係数付き不完全 Cholesky 分解前処理を用いると使用メモリーは 1.4 倍となるものの, 計算時間がおおよそ 1/3 になっていることがわかる.

4.2 変圧器モデル

Fig. 4 に示す, タンク, シールド, コア, 3 層のコイルおよび空気部分からなる変圧器モデルを考える. 変圧器モデルについては例えば [9] 参照. 空気の磁気抵抗率は $1/(4\pi) \times 10^7\text{ [m/H]}$ で, 比磁気抵抗率はタンク部分で 600, シールドおよびコア部分で 10000, コイル部分で 1 である. 導電率 σ はタンク部分で $6.67 \times 10^6\text{ [S/m]}$, その他の部分で 0.0 [S/m] である. 角速度 ω は $2\pi \times 50\text{ [rad/sec]}$ である. 励磁電流密度の実部の絶対値はコアに近い側からそれぞれ $1.544 \times 10^6\text{ [A/m}^2\text{]}$, $1.190 \times 10^6\text{ [A/m}^2\text{]}$, $1.524 \times 10^6\text{ [A/m}^2\text{]}$ 励磁電流密度の虚部の絶対値はいずれも $0\text{ [A/m}^2\text{]}$ とする. コアから見て一番外側のコイルに流れる励磁電流のみ逆方向に流れており, 3 層のコイルすべての励磁電流の和は 0 [A] となる. 境界条件は Fig. 4 の底面で $(\nu \text{rot } \mathbf{u}) \times \mathbf{n} = 0$ および $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$, 他の面で $\mathbf{u} \times \mathbf{n} = 0$ を課す.

解析領域を 4 面体分割する. 用いたメッシュの要素数, 複素自由度数はそれぞれ 76380, 92937 である. 電流密度を通常の 4 面体 1 次要素で近似する. 電流はコイルにのみ流れているので, 補正をコイル領域で行う. 連立 1 次方程式の解法およびその設定は TEAM モデルと同様に行った.

Fig. 5 は BiCG 法の残差の履歴である. 縦軸は残差の対数スケールで横軸は BiCG 法の反復回数である. TEAM モデルと同様に補正を加えることによって BiCG 法が収束するようになっていくことがわかる. Table 2 は BiCG 法の使用メモリーおよび計算時間である. TEAM モデルと同様に, 加速係数付き不完全 Cholesky 分解前処理を用いると使用メモリーは 1.4 倍となるものの, 計算時間がおおよそ 1/3 になっていることがわかる.

5 結論

磁気ベクトルポテンシャルを未知数とする 3 次元渦電流問題の混合型有限要素解析において、ある直和分解に基づいて問題を簡略化することができた。また簡略化に必要な、電流密度の連続性を考慮する手法を提案した。これにより連立 1 次方程式に BiCG 法を適用することができた。

謝辞: 実用モデルとして変圧器モデルを提供して頂いた富士電機株式会社に感謝致します。

参考文献

- [1] Alonso, A., and Valli, A., A domain decomposition approach for heterogeneous time-harmonic Maxwell equations, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, **143** (1997), 97–112.
- [2] Bossavit, A., *Computational Electromagnetism*, Academic Press, 1998.
- [3] Fujiwara, K., and Nakata, T., Results for benchmark problem 7 (asymmetrical conductor with a hole), *COMPEL*, **9** (1990), 137–154.
- [4] Fujiwara, K., Nakata, T., Takahashi, N., and Ohashi, H., On the continuity of the magnetizing current density in 3-D magnetic field analysis with edge element, *IEEE Trans. Magn.*, **31** (1995), 1364–1367.
- [5] Kameari, A. and Koganezawa, K., Convergence of ICCG method in FEM using edge elements without gauge condition, *IEEE Trans. Magn.*, **33** (1997), 1223–1226.
- [6] Kanayama, H., Ikeguchi, S., and Kikuchi, F., 3-D eddy current analysis using the Nedelec elements, in *Proc. of ICES '97*, (1997), 277–282.
- [7] Kanayama, H., and Kikuchi, F., 3-D eddy current computation using the Nedelec elements, *Information*, **2** (1999), 37–46.
- [8] Kanayama, H., Tagami, D., Saito, M., and Kikuchi, F., A finite element analysis of 3-D eddy current problems using an iterative method, *Trans. of JSCES*, (2000), 20000033, <http://homer.shinshu-u.ac.jp/jscs/trans/trans2000/No20000033.pdf>.
- [9] Kanayama, H., Tagami, D., Saito, M., Take, T., and Asakawa, S., A finite element method for 3-D eddy current problems using an iterative approach to appear in *Int. J. Comput. Fluid Dyn.*.
- [10] Kikuchi, F., Mixed formulations for finite element analysis of magnetostatic and electrostatic problems, *Japan J. Appl. Math.*, **6** (1989), 209–221.
- [11] Kikuchi, F., On a discrete compactness property for the Nedelec finite elements, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. IA Math.*, **36** (1989), 479–490.
- [12] Manteuffel, T. A., An incomplete factorization technique for positive definite linear systems, *Math. Comput.*, **34** (1980), 473–497.

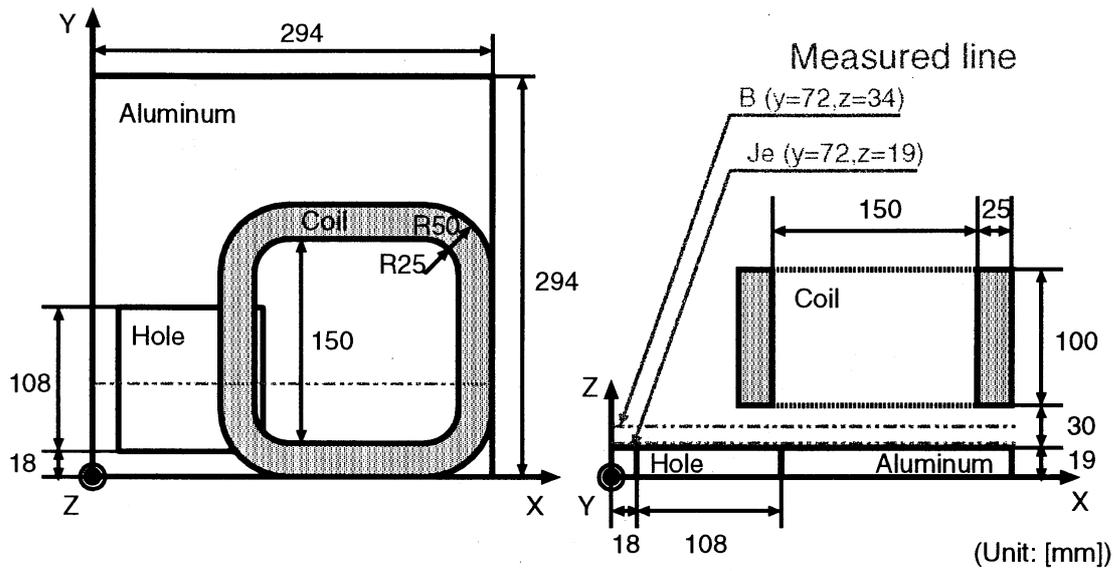


Fig. 1: The TEAM model.

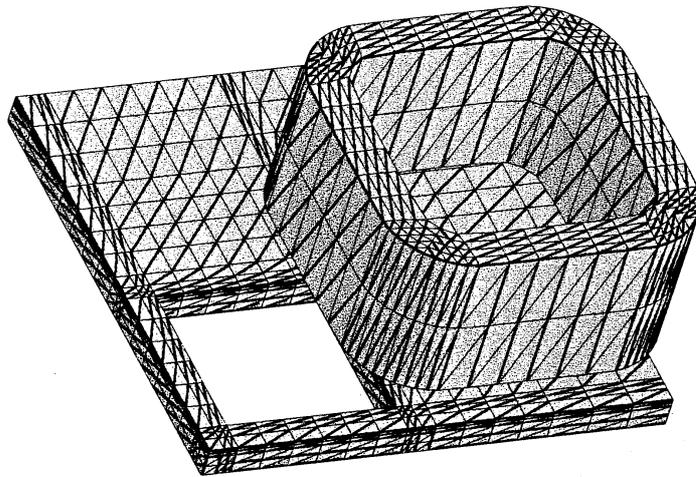


Fig. 2: A finite element mesh around the coil and the conductor for the TEAM model.

Table 1: Required memory and CPU time.

Preconditioner	Diagonal	Incomplete Cholesky (Accel.=1.3)
Memory [MB]	30.7	42.8
Time [s]	1953.0	651.2

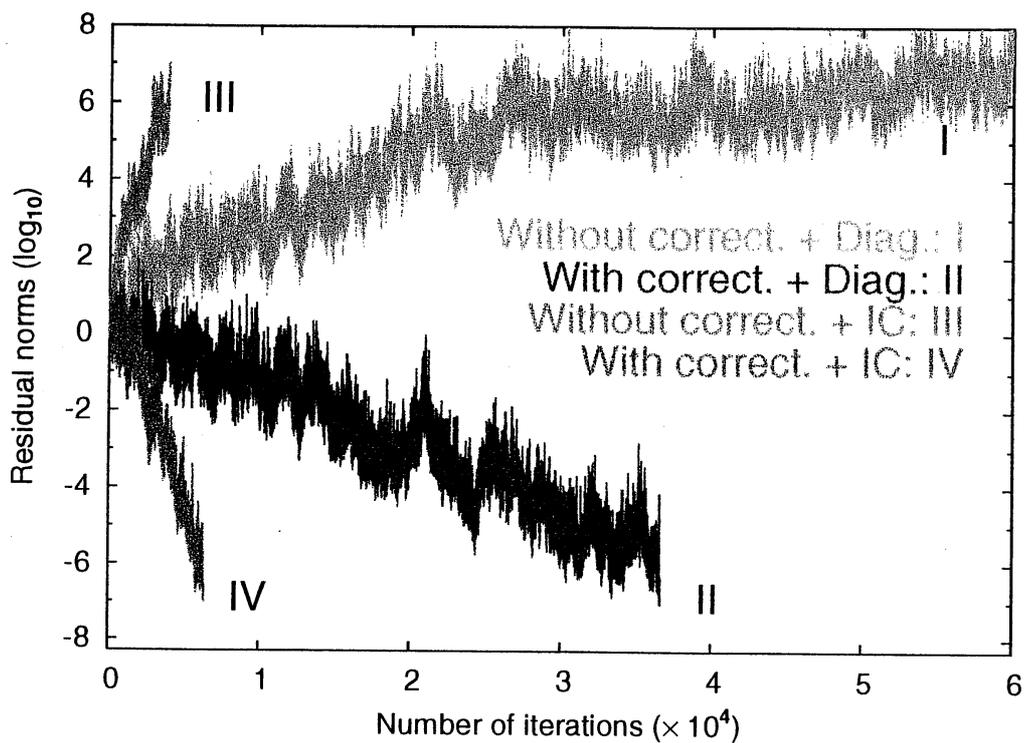


Fig. 3: The profile of $\|M^{-1}(b - Ax)\|/\|M^{-1}b\|$ versus the number of iterations of BiCG method for the TEAM model.

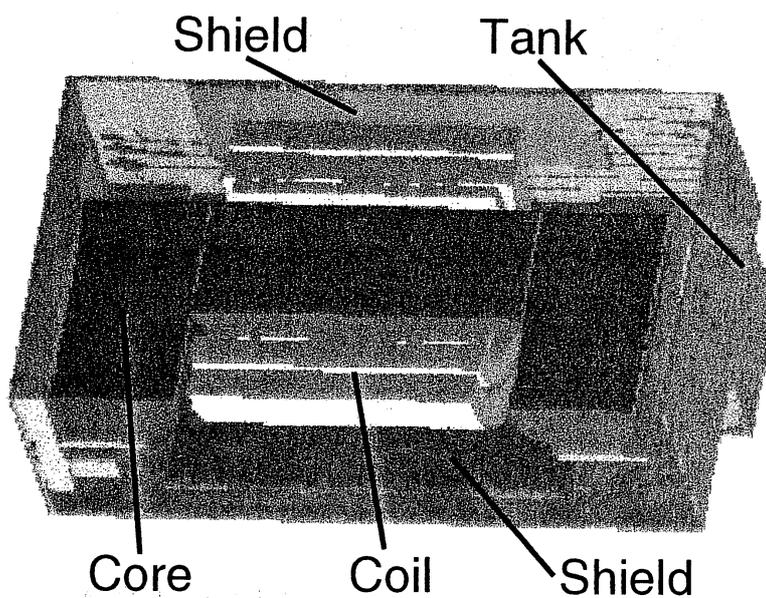


Fig. 4: A transformer model.

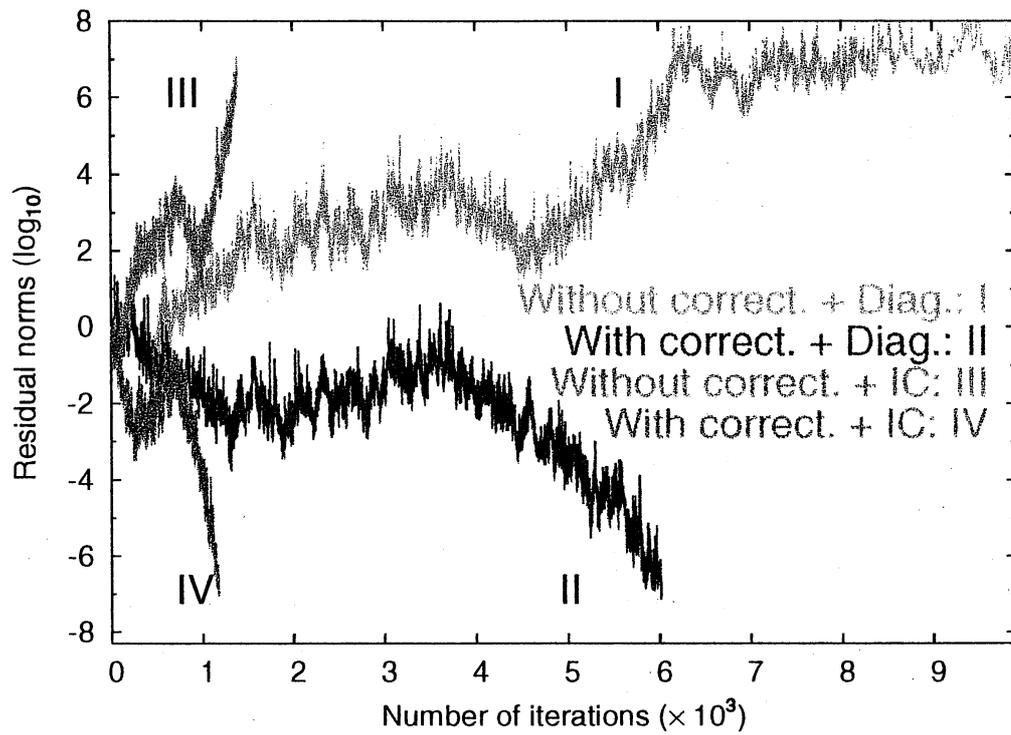


Fig. 5: The profile of $\|M^{-1}(b - Ax)\|/\|M^{-1}b\|$ versus the number of iterations of BiCG method for the transformer model.

Table 2: Required memory and CPU time.

Preconditioner	Diagonal	Incomplete Cholesky (Accel.=1.3)
Memory [MB]	37.7	52.9
Time [s]	4213.7	1570.6