

# 多変数多項式のベキ級数根の桁落ち誤差…その 2

筑波大学数学系 佐々木 建昭(Tateaki SASAKI)  
奈良女子大学理学部 加古 富士雄(Fujio KAKO)

## 概要

多変数多項式の主変数に関するベキ級数根を Newton 法で、浮動小数を用いて計算する際、特異点の近傍で巨大な誤差が生じ得ることを 1994 年に発表した。その当時は原点から遠方での解析が不十分であったので、本稿では特に遠方での解析に重点をおいて報告する。展開点が原点から遠方の場合、展開点の近くに特異点がなければ展開次数  $k$  に比例する大きな桁落ちが発生しないが、近くに特異点があれば、場合によって  $k$  に比例する大きな桁落ちが発生し得ることを理論的に証明し、数値例で確認する。また、特異点近傍での安全な (大きな誤差を生じない) 計算法も示す。

本稿では定理の証明等は省略するので、詳細は論文 [SKK00] を参照されたい。

## 1 Newton 法と巨大な誤差

与式  $F(x, u_1, \dots, u_\ell) \in \mathbf{C}[x, u_1, \dots, u_\ell]$  を簡単に  $F(x, u)$  と表す：

$$F(x, u) = f_n(u)x^n + f_{n-1}(u)x^{n-1} + \dots + f_0(u) \tag{1}$$

多項式  $f(u)$  の  $u_1, \dots, u_\ell$  に関する全次数 (total-degree) を  $\text{tdeg}(f)$  と表す。 $f(u)$  の中で全次数最低の項の全次数を位数 (order) といい  $\text{ord}(f)$  と表す。有理式  $f(u)/g(u)$  の位数は  $\text{ord}(f/g) = \text{ord}(f) - \text{ord}(g)$  と定める。多項式  $F(x, u)$  のノルムを  $\|F\|$  と表す。ノルムとしては、たとえば  $F(x, u)$  の絶対値最大の係数とすればよい。 $O(\varepsilon)$  は、計算量のオーダー記号と同じで、 $\varepsilon$  によらない定数倍を除いて  $\varepsilon$  程度の大きさの数を表す。

$f_n \neq 1$  のときは、よく知られたモニック変換  $F(x, u) \mapsto \tilde{F}(x, u) \stackrel{\text{def}}{=} f_n^{n-1}F(x/f_n, u)$  を施せば、 $F(x, u)$  の  $x$  に関する根  $\bar{\chi}(u)$  は  $\tilde{F}(x, u)$  の根  $\tilde{\chi}(u)$  により  $\bar{\chi}(u) = \tilde{\chi}(u)/f_n(u)$  と与えられる。したがって、一般性を失うことなく、 $F(x, u)$  は無平方でモニックである ( $f_n = 1$ ) と仮定する。さらに  $F(x, u)$  は次のように正規化されていると仮定する。

$$\|f_n\| \simeq \max\{\|f_{n-1}\|, \dots, \|f_0\|\} \approx 1 \tag{2}$$

正規化は適当な数値  $a, b$  により  $F(x, u) \mapsto aF(bx, u)$  と変換することにより行える。

(s)  $\stackrel{\text{def}}{=} (s_1, \dots, s_\ell) \in \mathbf{C}^\ell$  とし、 $F(x, s) \in \mathbf{C}[x]$  の根を  $\alpha$  とする。

$$F(\alpha, s) = 0 \tag{3}$$

**定義 1**  $F(x, s)$  が無平方とならないとき  $(s)$  を  $F(x, u)$  の Newton 法に対する **特異点** (*singular point*) といい、そうでないとき **非特異点** (*non-singular point*) という。すなわち、 $(s)$  が特異点  $\iff \text{resultant}(F(x, s), dF(x, s)/dx) = 0$  である。 ■

$(s)$  が特異点ならば  $F(x, s)$  は重根を持つが、 $\alpha$  が重根とは限らない。 $\alpha$  が重根のとき、 $(\alpha, s)$  は代数幾何の意味で特異点となる ([Wal78] 参照)。

$F(x, u)$  の根  $\bar{\chi}(u)$  は一般に代数関数であるが、 $(\alpha, s)$  が非特異点の場合、 $(u) = (s) + (v)$  と変換して原点を移動すると、新しい変数  $v_1, \dots, v_\ell$  に関する (無限) 級数  $\chi(v)$  に展開できる。 $\chi(v)$  を **ベキ級数根** と呼ぶ。 $\chi(v)$  を全次数  $k$  で打ち切った (打ち切り) ベキ級数を  $\chi^{(k)}(v)$  と表す。 $\chi^{(0)} = \alpha$  を初期値として、 $\chi^{(1)}(v), \chi^{(2)}(v), \dots$  を順に次の Newton 法で計算できる ([KT78],[GCL92] 参照)。

$$\chi^{(k)}(v) \equiv \chi^{(k-1)}(v) - \frac{F(\chi^{(k-1)}(v), s+v)}{F'(\alpha, s)} \pmod{(v)^{k+1}} \quad (4)$$

この式では  $\alpha$  をどう計算するかが決定的に重要である。計算代数では従来、 $\alpha$  を代数的数として計算したが、そうすると  $\chi^{(k)}(v)$  の計算は非常に重くなる。応用面ではベキ級数根を近似的に定めればよい場合も多いので、我々は  $\alpha$  を浮動小数を用いて数値計算で決定するものとする。この場合、 $\alpha$  には必然的に誤差が入り込み、ベキ級数根  $\chi^{(k)}(v)$  にも当然、誤差が入り込むことになる。その誤差が非常に大きくなり得ることを例で示す。

**例 1** 2 変数多項式の場合の巨大な誤差 ([SY99] も参照されたい)。

$$F(x, u) = x^6 - 3(u-1)x^4 - 2ux^3 + 3(u^2 - 2u + 1)x^2 - 6(u^2 - u)x - u^3 + 4u^2 - 3u + 1$$

$s = 0.517$  とし ( $\implies u = 0.517 + v$ )、ベキ級数根を 4 次まで計算すると次式となる。

$$\begin{aligned} \chi^{(4)}(v) = & (-\underline{0.4012978676277880536} - \underline{0.00008628154461670816683} i) \\ & + (-\underline{0.2587349243255296906} - \underline{1.167585113458430428} i) v \\ & + (\underline{0.1668181426979336807} - \underline{0.08344507519359525892} i) v^2 \\ & + (-\underline{0.1793895553538013117} - \underline{0.6958222465143548943} i) v^3 \\ & + (2.002104809488503015 - 2.156471842392122295 i) v^4 \end{aligned}$$

ここで、下線部は意味ある数字だが、それ以外は無意味な誤差である。展開次数  $k$  に比例する巨大な誤差が現れていることが分かる。

$$\text{resultant}_x(F, F') = -46656u^4(u-1)^3(64u^3 - 165u^2 + 192u - 64)^2$$

から特異点を計算すると、 $F(x, u)$  は次の 5 つの特異点を持つことが分かる。

$$u = 0, 1, 0.516926\dots, 1.030599\dots \pm 0.934011\dots i$$

したがって、今の場合、展開点は特異点の  $O(10^{-4})$  近傍にある。 ■

## 2 特異点での“級数”展開

本稿の主テーマは特異点近傍での桁落ち解析である。そのためには、特異点での級数展開が必要になる。特異点での展開法は、Sasaki-Kakoの特異点での Hensel 構成法を Newton 法に焼き直したものなので、詳細は文献 [SK99], [SKK00] を参照してもらうことにして、ここでは概略のみを記す。なお、本稿では特異点に関する記号には  $\hat{\phantom{x}}$  をつけて表す。

基本的アイデアは  $F(x, u_1, \dots, u_\ell) \mapsto F(x, tu_1, \dots, tu_\ell)$  なる変換で全次数変数  $t$  を導入し、2変数多項式の根の Puiseux 級数展開と同様、 $t$  に関する分数べき級数に展開することである。簡単のため、原点が特異点と仮定し、 $F(x, 0) = x^m$  なる場合を考える。 $F(x, u)$  の各項  $x^{e_x} t^{e_t} u_1^{e_1} \dots u_\ell^{e_\ell}$ ,  $e_1 + \dots + e_\ell = e_t$ , を2次元平面上の点  $(e_x, e_t)$  にプロットする(図1参照)。このとき、最高次数項  $x^m$  に対応する点  $(m, 0)$  を通る直線で、少なくとも他の一つのプロット点を通り、しかも全ての項がこの直線の下にはプロットされない、そのような直線が唯一つ定まる。この直線を  $\mathcal{L}_0$  と表し **Newton 線** と呼ぶ(図1参照)。 $\mathcal{L}_0$  上にプロットされる全ての項からなる多項式を  $F_{\text{New}}(x, u)$  と表し **Newton 多項式** と呼ぶ。直線  $\mathcal{L}_0$  の傾きを  $-\lambda$  とすれば、 $F_{\text{New}}(x, tu)$  は  $x$  と  $t^\lambda$  に関して同次多項式となる。

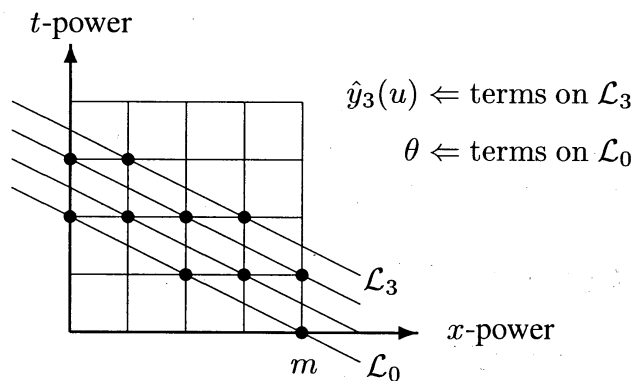


図1：特異点での展開法の図解

$F(x, tu)$  のべき級数根の初期値としては  $F_{\text{New}}(x, u) = 0$  から定まる代数関数  $\theta$  をとる： $F_{\text{New}}(\theta, u) = 0$ 。このとき、 $\theta$  の明示的表現が得られるとは限らないが、最小多項式は得られる。この  $\theta$  を初期値として、図1に示すごとく、 $\mathcal{L}_0 \Rightarrow \mathcal{L}_1 \Rightarrow \mathcal{L}_2 \Rightarrow \dots$  のように法を上げる形で  $F(x, tu)$  の根を  $t$  に関して級数展開する。法を上げるとき全ての格子点を通り過ぎさせるには次のようにする。Newton 線の傾き  $-\lambda$  に対し、正整数  $\hat{m}$  と  $\hat{\tau}$  を  $\hat{\tau}/\hat{m} = \lambda$ ,  $\text{gcd}(\hat{\tau}/\hat{m}) = 1$  を満たすように決める。次に、イデアル  $\hat{I}_k$  を  $\hat{I}_k = \langle x, t^\lambda \rangle^m \cdot \langle t^{k/\hat{m}} \rangle$  と定める。すると、 $\hat{\chi}^{(k)}(tu)$  を次式を満たすように決めることができる。

$$\hat{F}(\hat{\chi}^{(k)}(tu), tu) \equiv 0 \pmod{\hat{I}_{k+1}}, \quad \text{ord}_t(\hat{\chi}^{(k)}) = \lambda + k/\hat{m}$$

(4) に対応する具体的算式については [SSK00] を参照されたい。

**定理 2**  $\hat{F}(x, u)$  は原点に特異点を持ち、 $\theta$  は  $\hat{F}_{\text{New}}(x, u)$  の単根であるとする。このとき、初期値を  $\hat{\chi}^{(0)}(tu) = t^\lambda \theta$  とする近似“ベキ級数”根  $\hat{\chi}^{(k)}(tu)$  ( $k \geq 1$ ) は次の形となる。

$$\begin{cases} \hat{\chi}^{(k)}(tu) = t^\lambda \theta + \hat{y}_1(tu) + \cdots + \hat{y}_k(tu) \\ \text{ord}_t(\hat{y}_j(tu)) = \lambda + j/\hat{m} \quad (j = 1, 2, \dots, k) \\ \hat{y}_j(u) \text{ は } u_1, \dots, u_\ell \text{ の同次有理式を係数とする } \theta \text{ の多項式} \end{cases} \quad (5)$$

**例 2** 特異点 (原点) での“ベキ級数”展開。

$$\hat{F}(x, u) = x^2 - 2(u_1 + u_1^2)x + u_1^2 - u_2^2 - u_3^2 + 2u_1^3 + u_2^3 + u_3^3 + u_1^4$$

Newton 多項式は  $\hat{F}_{\text{New}}(x, tu) = x^2 - 2u_1x + (u_1^2 - u_2^2 - u_3^2)$  となり、 $\theta$  の定義多項式は  $\theta^2 - 2u_1\theta + (u_1^2 - u_2^2 - u_3^2) = 0$  となる。根を  $t$  に関して 2 次まで展開した級数根  $\hat{\chi}^{(2)}$  は次式となる。

$$\hat{\chi}^{(2)}(tu) = tu_1 + t^2u_1^2 + (t\theta - tu_1) \cdot \left[ 1 - t \frac{u_2^3 + u_3^3}{2(u_2^2 + u_3^2)} + t^2 \frac{(u_2^3 + u_3^3)^2}{8(u_2^2 + u_3^2)^2} \right]$$

$\theta$  の定義多項式が 2 次ゆえ  $\theta$  は 1 次までしか現れず、 $t$  の各係数部は  $u_2, u_3$  の同次有理式であることに注意されたい。

上記の定理と例から、特異点での“ベキ級数”展開の各項は多項式になったり、あるいは有理式を係数とする代数関数になったりする。

**定義 3** “ベキ級数”根  $\hat{\chi}^{(k)}(tu)$  が変数  $u_j$  について多項式のとき、すなわち

$$\hat{\chi}^{(k)}(u) = \chi_i^{(k)}(u) + \hat{\chi}_n^{(k)}(\dots, u_{j-1}, u_{j+1}, \dots), \quad \chi_i^{(k)}(u) \in \mathbf{C}[u_1, \dots, u_\ell] \quad (6)$$

と表せるとき、 $\hat{\chi}^{(k)}(tu)$  は  $u_j$  に関して *integral* といい、そうでないとき *non-integral (rational* あるいは *algebraic)* という。

例 2 においては、 $\hat{\chi}^{(k)}(tu)$  は  $u_1$  に関して *integral* であり、 $u_2, u_3$  に関して *non-integral* である。特異点で分岐する根は *non-integral* であり、直線的に交差する根は *integral* である。 $\ell \geq 2$  の場合、*integral* な根は稀にしか現れないが、 $\ell = 1$  の場合、*integral* な根は頻りに現れる。

### 3 ベキ級数根の性質

以下、 $F(x, u)$  を展開点  $(u) = (s)$  に移動した多項式を  $G(x, v)$  とする：

$$G(x, v_1, \dots, v_\ell) \stackrel{\text{def}}{=} F(x, s_1 + v_1, \dots, s_\ell + v_\ell) \quad (7)$$

$G(x, v)$  を  $v_1, \dots, v_\ell$  に関する同次多項式の和に分解する :

$$G(x, v) = G_0(x) + G_1(x, v) + \dots + G_r(x, v) \quad (8)$$

ここで  $G_j(x, v)$  は  $v_1, \dots, v_\ell$  の  $j$  次同次多項式

また、 $G_j(x, v)$  の  $x$  に関する  $i$  階微分を  $G_j^{(i)}(x, v)$  と表し、数値  $\beta$  を以下と定める :

$$G_j^{(i)}(x, v) \stackrel{\text{def}}{=} d^i G_j(x, v)/dx^i, \quad \beta \stackrel{\text{def}}{=} dG_0(x)/dx|_{x=\alpha} \quad (9)$$

**補題 4 (基本的補題)**  $\chi^{(k)}(v)$  を次のように全次数一定の項の和に分解する。

$$\chi^{(k)}(v) = \alpha + y_1(v) + \dots + y_k(v), \quad \text{tdeg}(y_j) = j \quad (j = 1, \dots, k) \quad (10)$$

$y_k(v)$  は Newton 法で  $k$  回目に計算される多項式である。 $y_k(v)$  は

$$(\gamma/\beta^e) \cdot \{G_{l_0}^{(0)}(\alpha, v)\}^{e_0} \{G_{l_1}^{(r_1)}(\alpha, v)\}^{e_1} \dots \{G_{l_\kappa}^{(r_\kappa)}(\alpha, v)\}^{e_\kappa} \quad (11)$$

なる項の和となる。ただし、 $\gamma \in \mathbf{C}$  で、かつ次式が成立する。

$$\begin{cases} e = e_0 + e_1 + \dots + e_\kappa & \geq 1 \\ l_0 e_0 + l_1 e_1 + \dots + l_\kappa e_\kappa & = k \\ r_1 e_1 + \dots + r_\kappa e_\kappa & = e - 1 \end{cases} \quad (12)$$

次に、展開点を特異点(今の場合、原点)に近づけた場合のベキ級数根の振舞いを調べる。特異点近傍では、ベキ級数根  $\chi^{(k)}(v)$  は、特異点での“ベキ級数”根  $\hat{\chi}^{(\infty)}(u)$  の変数  $u$  に  $v + s$  を代入して得られる。

**場合 I** 特異点での“ベキ級数”根が integral な場合。

式(6)の  $\chi_i^{(k)}(u)$  のみを考える。 $\chi_i^{(k)}(u) \in \mathbf{C}[u_1, \dots, u_\ell]$  ゆえ、

$$\lim_{\|s\| \rightarrow 0} \chi^{(k)}(v) \equiv \lim_{\|s\| \rightarrow 0} \chi_i^{(k)}(s+v) \pmod{(v)^{k+1}} \implies \text{convergent} \quad (13)$$

すなわち、展開点を特異点に近づけたとき  $\chi^{(k)}(v)$  は多項式へ収束する。

**場合 II** 特異点での“ベキ級数”根が non-integral な場合。

$A(u)$  は位数  $\kappa$  の同次有理式あるいは代数関数とする :  $\deg_t(A(tu)) = \kappa$ 。  $A(s+v)$  の Taylor 展開の  $k$  次項は、 $\|s\| \rightarrow 0$  のとき  $O(1/\|s\|^{k-\kappa})$  と振舞う。

$$\begin{aligned} \text{有理式例} & : \frac{u_2^2 + u_3^2}{u_2 + u_3} \implies \frac{(s_2 + v_2)^2 + (s_3 + v_3)^2}{(s_2 + v_2) + (s_3 + v_3)} \\ & = \frac{(s_2^2 + s_3^2) + 2(s_2 v_2 + s_3 v_3) + v_2^2 + v_3^2}{(s_2 + s_3)[1 + v_2/(s_2 + s_3) + v_3/(s_2 + s_3)]} \end{aligned}$$

$$\|s\| \rightarrow 0 \implies v^k \text{ 項 } (k > 1) \text{ は } O(1/\|s\|^{k-1}) \text{ で発散する。}$$

## 4 桁落ち誤差の解析

まず、Newton 法を各ステップ毎に振り返る。各ステップで計算するものは  $\chi^{(k)}(v)$  ではなく、 $y_k(v) = \chi^{(k)}(v) - \chi^{(k-1)}(v)$  であり、その算式は次である。

$$y_k(v) = -[G(\alpha + y_1 + \cdots + y_{k-1}, v)] \text{の } k \text{ 次項} / \beta \quad (14)$$

$y_k(v)$  の計算は、さらに次の 3 ステップに分解される。

- Step 0 :  $\alpha$  を  $G_j^{(i)}(x, v)$  に代入 ( $\Rightarrow$  桁落ち?)。
- Step 1 :  $y_k(v)$  を補題 4 の積項の和に展開する。
- Step 2 : 積項を展開して加える ( $\Rightarrow$  桁落ち?)。

以上より、Newton 法における桁落ちは次の方針で解析できる。

- (1)  $|\alpha|, |\beta|$  の値を決める。
- (2)  $\|G_j^{(i)}(\alpha, v)\|$  の値を決める。
- (3)  $\|G_j^{(i)}(\alpha, v)$  の積項  $\|$  の値を決める。
- (4)  $\|y_k(v)\|$  の値を別の方法で決める。
- (5) 桁落ち量 =  $\max \|G_j^{(i)}(\alpha, v)$  の積項  $\| - \|y_k(v)\|$ 。

この方法では桁落ち量を詳細に計算することは難しいので、展開点を特異点近傍あるいは遠方に限定し、桁落ち量のオーダー解析を行うことにする。

### 4.1 展開点が特異点 (原点) の近傍のとき

一般性を失うことなく  $F(x, u)$  は原点に特異点を持つと仮定し、展開点は原点の  $\delta$  近傍にあるとする :  $\delta \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{s_1^2 + \cdots + s_l^2} \ll 1$ 。  $F(x, u)$  を原点で特異な因子  $\hat{F}(x, u)$  と非特異な因子  $\tilde{F}(x, u)$  に分解する (この分解は Hensel 構成で行える) :

$$F(x, u) = \hat{F}(x, u)\tilde{F}(x, u), \quad \hat{F}(x, 0) = x^m, \quad \tilde{F}(0, 0) \neq 0 \quad (15)$$

$\alpha$  は特異点で重根になるとするので、 $\hat{F}(x, s)$  の根とする。  $\hat{F}(x, u)$  に対する Newton 線の傾きを  $-\lambda$  とすれば、 $\alpha, \beta$  および  $\|G_j^{(i)}(\alpha, v)\|$  は次のようにオーダー評価できる。

$$\begin{cases} \alpha = O(\delta^\lambda), & \beta = O(\delta^{(m-1)\lambda}) \\ \|G_j^{(i)}(\alpha, v)\| = O(\delta^{\max\{0, (m-i)\lambda-j\}}) \end{cases} \quad (16)$$

正確に言うと、上式の評価は  $G_j^{(i)}(x, v)$  が主要項である場合にのみ成立し、非主要項に対する評価は小さくなる。これらのオーダー評価を (11) に代入すると次式を得る (ここで、

$\gamma$  は  $k$  には依存するが  $\delta$  には依存しない数で、 $O(1)$  の大きさである。

$$\begin{aligned} & \| \gamma \{G_{j_0}^{(0)} / \beta\}^{e_0} \{G_{j_1}^{(i_1)} / \beta\}^{e_1} \dots \{G_{j_\kappa}^{(i_\kappa)} / \beta\}^{e_\kappa} \| \\ &= O(\gamma) O(\delta^{(1-0)\lambda-j_0})^{e_0} O(\delta^{(1-i_1)\lambda-j_1})^{e_1} \dots O(\delta^{(1-i_\kappa)\lambda-j_\kappa})^{e_\kappa} \\ &= O(\gamma) O(\delta^{(\sum e_r)\lambda - (\sum i_r e_r)\lambda - (\sum j_r e_r)}) = O(\gamma) O(\delta^{\lambda-k}) \end{aligned}$$

上式と特異点近傍でのベキ級数根  $\chi^{(k)}(v)$  の振舞いを比較して次の定理を得る。

**定理 5**  $F(x, u)$  は原点に特異点を持ち、展開点は原点から  $\delta$  近傍にあるとする： $0 \ll \delta \ll 1$ 。原点での“ベキ級数”根  $\hat{\chi}^{(\infty)}(u)$  の項のうち、どれかの変数について *integral* な項で最低位数のものを  $\hat{T}_\kappa(u)$ , ただし  $\text{ord}_t(\hat{T}_\kappa(tu)) = \kappa$ , とする。また、 $T_k(v)$ , ただし  $\text{ord}_t(T_k(tv)) = k$ , は  $\chi^{(k)}(v)$  の主要項であるとする。このとき、 $k < \kappa$  ならば  $T_k(v)$  に  $O(\delta^{\lambda-k})$  の桁落ちが生じ、 $k \geq \kappa$  ならば  $T_k(v)$  に  $O(\delta^{\lambda-\kappa})$  の桁落ちが生じる。 ■

この定理の由来は次の通りである。まず、上記のオーダー評価によると、展開点を特異点に近づけると  $\chi^{(k)}(v)$  は  $O(\delta^{\lambda-k})$  の発散をする。特異点で non-integral な場合、 $\|s\| \rightarrow 0$  で  $\hat{\chi}^{(\infty)}(s+v)$  も同じオーダーの発散をするから、桁落ちは生じない。しかし、特異点で integral な場合、 $\|s\| \rightarrow 0$  で  $\hat{\chi}^{(\infty)}(s+v)$  は収束するから、差し引いた分だけ桁落ちが生じることになる。

### 4.2 原点から遠方での展開 (近くに特異点なし)

展開点は原点から十分遠方にあるとする： $D \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{s_1^2 + \dots + s_\ell^2} \gg 1$ 。今の場合、重要な役割を演じるのは各  $f_i(u)$  の中で全次数が最大の項である。たとえば、(1) の  $f_i(s)$  は次のように近似できる。

$$|f_i(s)| = O(D^{\tau_i}), \quad \tau_i = \text{tdeg}(f_i(u)) \quad (i = 0, 1, \dots, n).$$

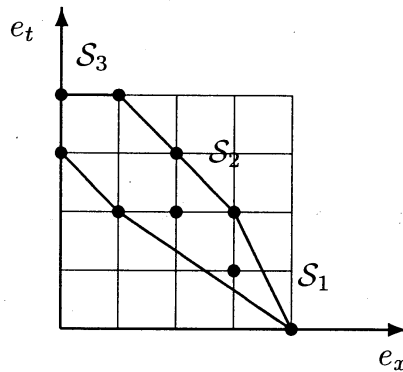


図 2 : 凸包  $\Omega$  とその上辺  $S_1, S_2, \dots$

$F(x, u)$  の各項を図1のようにプロットし、全てのプロット点を囲む最小の凸包を  $\Omega$  とする (図2参照)。  $\Omega$  の上辺を右から順に  $S_1, \dots, S_\sigma$  とし、各  $S_i$  上にプロットされる全ての項からなる多項式を  $F_{S_i}(x, u)$  とする。すると、 $\alpha$  は近似的に  $F_{S_i}(x, s)$  ( $1 \leq i \leq \sigma$ ) のどれかの根として定まることになる。

$\alpha$  が近似的に  $F_{S_i}(x, s)$  の根として定まるとすれば、次のオーダー評価を得る。

$$\alpha = O(D^{\bar{\lambda}}), \quad \bar{\lambda} > 0 \quad (17)$$

ここで、辺  $S_i$  の傾きを  $-\bar{\lambda}$  とした。次に、 $\beta$  の評価であるが、展開点の近傍に特異点はないと仮定する。 $(F_{S_i}(x, s)$  が近接根を持てば、 $F(x, u)$  は  $(s)$  の近傍 ( $\hat{s}$ ) に特異点を持つ可能性が高い。したがって、この仮定は「 $F_{S_i}(x, s)$  は近接根を持たない」と言い換えてもよい。) このとき、 $\beta$  は次のようにオーダー評価できる。

$$\beta = O(D^{(\bar{n}-1)\bar{\lambda}+\bar{\tau}}), \quad \bar{n} = \deg_x(F_{S_i}(x, u)), \quad \bar{\tau} = \text{tdeg}(f_{\bar{n}}) \quad (18)$$

さらに、 $\|G_j^{(i)}(\alpha, v)\|$  は次のようにオーダー評価できる。

$$\|G_j^{(i)}(\alpha, v)\| = O(D^{\max\{0, (\bar{n}-i)\bar{\lambda}-j\}+\bar{\tau}}) \quad (19)$$

これらより、(11) は次のようにオーダー評価される。

$$\begin{aligned} & \| \hat{\gamma} \{G_{j_0}^{(0)}/\beta\}^{e_0} \{G_{j_1}^{(i_1)}/\beta\}^{e_1} \dots \{G_{j_\kappa}^{(i_\kappa)}/\beta\}^{e_\kappa} \| \\ &= O(\hat{\gamma}) O(D^{(1-0)\bar{\lambda}-j_0})^{e_0} O(D^{(1-i_1)\bar{\lambda}-j_1})^{e_1} \dots O(D^{(1-i_\kappa)\bar{\lambda}-j_\kappa})^{e_\kappa} \\ &= O(\hat{\gamma}) O(D^{(\sum e_r)\bar{\lambda}-(\sum i_r e_r)\bar{\lambda}-(\sum j_r e_r)}) = O(\hat{\gamma}) O(D^{\bar{\lambda}-k}) \end{aligned}$$

この式の右辺は  $O(D^{-k})$  に比例し、ベキ級数根の収束半径が  $O(D)$  であることを示している。したがって、次の定理を得る。

**定理 6** 展開点は原点から遠方  $D \gg 1$  の点にあり、 $F(x, s)$  の根  $\alpha$  は他の根から  $O(|\alpha|)$  程度離れていると仮定する。このとき、任意の  $k$  に対し  $y_k(v)$  の計算で  $O(D^{ck})$ ,  $c > 0$ , の大きな桁落ちが生じることはない。 ■

### 4.3 原点から遠方での展開 (近くに特異点あり)

前節と同じく、展開点は原点から遠方とする： $D \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{s_1^2 + \dots + s_\ell^2} \gg 1$ 。前節と異なるのは、展開点の近傍に特異点があることである。すなわち、特異点の位置を  $(u) = (\hat{s})$  とするとき、次式を仮定する。

$$D' \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{|s_1 - \hat{s}_1|^2 + \dots + |s_\ell - \hat{s}_\ell|^2} \ll D \quad (20)$$



議論を明確にするため、 $(\hat{\alpha}, \hat{s})$  は多重度  $m$  の (代数幾何の意味での) 特異点とする :

$$\frac{\partial^{i_0}}{\partial x^{i_0}} \frac{\partial^{i_1}}{\partial u_1^{i_1}} \cdots \frac{\partial^{i_\ell}}{\partial u_\ell^{i_\ell}} F(x, u) \Big|_{x=\hat{\alpha}, (u)=\hat{s}} = 0 \quad \text{for } i_0 + i_1 + \cdots + i_\ell \leq m-1 \quad (21)$$

$\alpha$  は前節と同様、 $F_{S_i}(x, s)$  の根として定まるが、仮定より  $F_{S_i}(x, s)$  は  $\alpha$  の近傍に  $|\alpha - \alpha'| \ll |\alpha|$  なる根  $\alpha'$  を持つので、 $\beta$  と  $\|G_j^{(i)}(\alpha, v)\|$  の評価は慎重に行う必要がある。

$$G_j^{(i)}(\alpha, v) = \frac{1}{j!} \left[ v_1 \frac{\partial}{\partial u_1} + \cdots + v_\ell \frac{\partial}{\partial u_\ell} \right]^j \frac{\partial^i}{\partial x^i} F(x - \hat{\alpha} + \alpha, u - \hat{s} + s) \Big|_{x=\hat{\alpha}, (u)=\hat{s}}$$

と表し、 $F(x - \hat{\alpha} + \alpha, u - \hat{s} + s)$  を次のように Taylor 展開する。

$$F(x - \hat{\alpha} + \alpha, u - \hat{s} + s) = F(x, u) + \sum_{j'=1}^{\max\{n, \tau\}} \frac{1}{j'!} \left[ (\alpha - \hat{\alpha}) \frac{\partial}{\partial x} + (s_1 - \hat{s}_1) \frac{\partial}{\partial u_1} + \cdots + (s_\ell - \hat{s}_\ell) \frac{\partial}{\partial u_\ell} \right]^{j'} F(x, u)$$

これら 2 式より、 $G_j^{(i)}(\alpha, v)$  を  $\frac{\partial^{i_0}}{\partial x^{i_0}} \frac{\partial^{i_1}}{\partial u_1^{i_1}} \cdots \frac{\partial^{i_\ell}}{\partial u_\ell^{i_\ell}} F(x, u) \Big|_{x=\hat{\alpha}, (u)=\hat{s}}$  で表すことができる。

この計算法により、 $\|G_j^{(i)}(\alpha, v)\|$  に対して次のオーダー評価を得る。

$$\frac{\|G_j^{(i)}(\alpha, v)\|}{\hat{B}_{i,j}} = \begin{cases} O(1), & i+j \geq m \\ O(\max\{|\alpha - \hat{\alpha}|/|\hat{\alpha}|, \|s - \hat{s}\|/\|\hat{s}\|\}^{m-(i+j)}), & i+j < m \end{cases} \quad (22)$$

$$\hat{B}_{i,j} = \max \left\{ \frac{(n-1)!}{(n-i-1)!} |\hat{\alpha}^{n-i-1} g_{j,n-1}(\hat{s})|, \frac{(n-2)!}{(n-i-2)!} |\hat{\alpha}^{n-i-2} g_{j,n-2}(\hat{s})|, \cdots \right\}$$

ここで、 $G_j(x, u) = g_{j,n-1}(u)x^{n-1} + g_{j,n-2}(u)x^{n-2} + \cdots$  とおいた。 $F(x, u)$  の規格化 (2) より  $\|g_{j,n'}(u)\| = O(1)$  ( $n' = n-1, n-2, \dots$ ) である。

(22) によると、桁落ちは  $|\alpha - \hat{\alpha}|/|\hat{\alpha}|$  の大きさに依存する。 $\|s - \hat{s}\|/\|\hat{s}\| = D'/D$  ゆえ、次の三つの場合に分けて考察する。

$$\frac{|\alpha - \hat{\alpha}|}{|\hat{\alpha}|} \stackrel{\text{def}}{=} O([D'/D]^{\eta_\alpha}) = \begin{cases} \text{Case 1: } O([D'/D]^{\eta_1}), & 1/m \leq \eta_1 < 1 \\ \text{Case 2: } O([D'/D]^{\eta_2}), & \eta_2 = 1 \\ \text{Case 3: } O([D'/D]^{\eta_3}), & \eta_3 > 1 \end{cases} \quad (23)$$

まず、 $\beta$  は次のようにオーダー評価できる。

$$\beta = O(D^{(\bar{n}-1)\bar{\lambda}+\bar{\tau}}) \cdot O([D'/D]^{(m-1)\eta_\alpha}) \quad (24)$$

一方、(22) 右辺の  $O(\max\{|\alpha - \hat{\alpha}|/|\hat{\alpha}|, \|s - \hat{s}\|/\|\hat{s}\|\})$  を考慮すると

$$\begin{cases} \|G_0^{(i>1)}(\alpha)\| & = O(D^{(\bar{n}-i)\bar{\lambda}-0+\bar{\tau}}) \cdot O([D'/D]^{\max\{0, (m-i)\eta_\alpha\}}) \\ \|G_{j>0}^{(i)}(\alpha, v)\| & = O(D^{(\bar{n}-i)\bar{\lambda}-j+\bar{\tau}}) \cdot O([D'/D]^{\max\{0, (m-i-j)\eta_\alpha\}}) \end{cases} \quad (25)$$

を得る。ただし、 $\eta$  は次式で定義される。

$$\max \left\{ \frac{|\alpha - \hat{\alpha}|}{|\hat{\alpha}|}, \frac{\|s - \hat{s}\|}{\|\hat{s}\|} \right\} \stackrel{\text{def}}{=} O([D'/D]^\eta) = \begin{cases} \text{Case 1: } O([D'/D]^{\eta_1}) \\ \text{Case 2: } O([D'/D]) \\ \text{Case 3: } O([D'/D]) \end{cases} \quad (26)$$

これらより (11) の評価として次式を得る。

$$\begin{aligned} & \|\{G_0^{(i'_1)}/\beta\}^{e'_1} \cdots \{G_0^{(i'_\mu)}/\beta\}^{e'_\mu} \cdot \{G_{j_1}^{(i_1)}/\beta\}^{e_1} \cdots \{G_{j_\kappa}^{(i_\kappa)}/\beta\}^{e_\kappa}\| \\ &= O(D^{\bar{\lambda}-k}) \cdot O([D'/D]^{\eta(1-k)+(m-1)(\eta-\eta_\alpha)e}) \cdot O([D'/D]^{(\eta_\alpha-\eta)\sum_{r=1}^m(m-i'_r)e'_r}) \end{aligned}$$

これより、 $y_k(v)$  の主要項  $T_k(v)$  に対して次式のオーダー評価を得る。

$$\frac{\|T_k(v)\|}{D^{\bar{\lambda}-k}} = \begin{cases} \text{Case 1: } O([D'/D]^{\eta_1(1-k)}) \\ \text{Case 2: } O([D'/D]^{(1-k)}) \\ \text{Case 3: } O([D'/D]^{(1-k)-(\eta_3-1)(mk-m+1)}) \end{cases} \quad (27)$$

特異点と展開点との距離が  $D'$  であることを考えれば、 $\lim_{k \rightarrow \infty} \|y_k(v)\| \propto [D']^{-k}$  となるはずで、Case 2 はそれに当たる。Case 3 では主要項はそれより大きく、差の分が桁落ちとなって現れるはずである。しかし、Case 1 では主要項の大きさが必要とされるものより小さいので、Case 1 が現実に起きるかどうかわからない。以上より、Case 2 と 3 に対して次の定理を得る。

**定理 7** 展開点は原点から遠方にあるとする： $D \stackrel{\text{def}}{=} \|s\| \gg 1$ 。さらに、展開点に近い点 ( $\hat{s}$ ) に特異点があるとする： $\|s - \hat{s}\| \stackrel{\text{def}}{=} D' \ll D$ 。 $F(x, s)$  の根を  $\alpha$ 、 $F(x, \hat{s})$  の根を  $\hat{\alpha}$  とし、 $|\alpha - \hat{\alpha}|/|\hat{\alpha}| = O([D'/D]^\eta)$  とする。 $\eta = 1$  の場合、 $y_k(v)$  の計算で  $O([D/D']^{ck})$ 、 $c > 0$  の大きな桁落ちが生じず、 $\eta > 1$  の場合には  $O([D/D']^{(\eta-1)mk})$  の桁落ちが生じる。 ■

**例 3** 遠方での展開 (近くに特異点あり)、 $\eta = 1$  の場合。

$$\begin{aligned} F(x, u) &= x^6 - 3(u-1)x^4 - 2ux^3 + 3(u^2 - 2u + 1)x^2 \\ &\quad - 6(u^2 - u)x - (3/4)u^3 + 4u^2 - 3u + 1 \end{aligned}$$

これは例 1 とは  $u^3$  項の係数が異なるのみだが、特異点  $\hat{s}_1 = 1270.84 \cdots$ 、 $\hat{s}_2 = 753.57 \cdots$  を持つ。展開点を  $s = 1260$  に選ぶ： $D = 1260$ 、 $D' \approx 10.84$ 。 $F(x, \hat{s})$  は重根  $\hat{\alpha} = 39.644 \cdots$  を持ち、この重根は  $F(x, s)$  では二つの近接根に分離する： $\alpha_1 = 38.405 \cdots$ 、 $\alpha_2 = 40.096 \cdots$ 。したがって、 $|\alpha_i - \hat{\alpha}|/|\hat{\alpha}| = O(D'/D)$  である。 $\alpha = \alpha_2$  と選ぶ。

ベキ級数根を 8 次まで計算すると次式を得る。

$$\begin{aligned} \chi^{(8)}(v) &= 40.09 \cdots - 0.01232 \cdots v - 0.0006800 \cdots v^2 \\ &\quad - 3.119 \cdots \times 10^{-5} v^3 - 1.798 \cdots \times 10^{-6} v^4 - 1.160 \cdots \times 10^{-7} v^5 \\ &\quad - 8.029 \cdots \times 10^{-9} v^6 - 5.818 \cdots \times 10^{-10} v^7 - 4.359 \cdots \times 10^{-11} v^8 \end{aligned}$$

先頭2項を除き、 $v^k$ 項の係数  $c_k$  が  $k$  の増加とともに  $O(1/D')$  で減少することが分かる。 $c_1$  は  $O(D/D')$  の誤差を含むが、これは  $G_1(x, v) \sim \alpha$  を代入する際に生じた桁落ちである。しかし、理論どおり  $c_2 \sim c_8$  ではそれ以上の桁落ちは生じていない。 ■

## 5 特異点近傍での安全な計算法

Newton 法を正直に適用してべき級数根  $\chi^{(k)}(v)$  を計算すると、特異点近傍で展開次数  $k$  に比例する大きな桁落ちが生じ得ることを見た。本章では、特異点での展開を経由することにより、大した桁落ちを生じることなく  $\chi^{(k)}(v)$  を計算できることを示す。

大きな桁落ちは根が integral な部分に起きる。そこで、特異点で“べき級数”根  $\hat{\chi}^{(k')}(u)$  の integral な部分  $\chi_0^{(k')}(u)$  を計算し、 $\chi_0^{(k')}(s+v)$  から  $\chi^{(k)}(v)$  の大きな桁落ちを起こす部分を計算するのである。 $\chi_0^{(k')}(u) \in \mathbf{C}[u]$  ゆえ  $\chi_0^{(k')}(s+v)$  は簡単に展開でき、 $\|s\| \ll 1$  ゆえ、 $k'$  の値を  $k$  より幾分大きく選んでおけば、 $\chi^{(k)}(v)$  は十分な精度で計算できる。

例4 例1におけるべき級数根の桁落ちなしの計算。

$F(x, u)$  は  $\hat{s} = 0.5169261021\dots$  に特異点を持ち、 $F(x, \hat{s})$  は重根  $\hat{\alpha} = -0.4012787467\dots$  を持つ。そこで、まず  $F(x, u)$  を  $(x, u) = (\hat{\alpha}, \hat{s})$  の位置に原点移動する：

$$\begin{aligned} \hat{F}(\hat{x}, \hat{u}) &\stackrel{\text{def}}{=} F(\hat{x} - 0.40127874676866, \hat{u} + 0.51692610217531) \\ &= \hat{x}^6 - 2.407\dots\hat{x}^5 + (3.864\dots - 3\hat{u})\hat{x}^4 \\ &\quad + (4.652\dots + 2.815\dots\hat{u})\hat{x}^3 + (3.733\dots - 3.389\dots\hat{u} + 3\hat{u}^2)\hat{x}^2 \\ &\quad + (1.932\dots\hat{u} - 8.407\dots\hat{u}^2)\hat{x} + (5.339\dots\hat{u}^2 - \hat{u}^3) \end{aligned}$$

ここで、 $O(10^{-13})$  以下の項は棄却した(以下の計算でも同様)。この棄却により誤差のみの項は全て除外される。 $\hat{F}(\hat{x}, \hat{u})$  は次数2の特異因子と次数4の非特異因子を持つ。非特異因子の Newton 多項式は  $\hat{F}_{\text{New}}(\hat{x}, \hat{u}) = 3.733\dots\hat{x}^2 + 1.932\dots\hat{u}\hat{x} + 5.339\dots\hat{u}^2$  で、 $\hat{F}_{\text{New}}(\hat{x}, \hat{u})$  の根が  $\hat{F}(\hat{x}, \hat{u})$  の根の第1次近似  $\hat{\chi}^{(1)}(\hat{u})$  を与える(共役根のうち一方を選ぶ)：

$$\hat{\chi}^{(1)}(\hat{u}) = (-0.25875958225623 + 1.1675727920436 i)\hat{u}$$

この初期値から特異点での級数根をたとえば5次まで計算すると次式となる。

$$\begin{aligned} \hat{\chi}^{(5)}(\hat{u}) &= (-0.25875958225623 + 1.1675727920436 i)\hat{u} \\ &\quad + (0.1668578810829 + 0.083290774208661 i)\hat{u}^2 \\ &\quad + (-0.17932703036999 + 0.6959452980097 i)\hat{u}^3 \\ &\quad + (0.23127358645056 + 0.09797677528285 i)\hat{u}^4 \\ &\quad + (-0.32809453682074 + 1.2907084531487 i)\hat{u}^5 \end{aligned}$$

この式の  $\hat{u}$  に  $v + (0.517 - \hat{s})$  を代入し、 $v$  の 3 次まで計算すると次式となる。

$$\begin{aligned}\chi^{(3)}(v) &= (\underline{-0.40129786762779} - \underline{0.000086281544621635} i) \\ &+ (\underline{-0.25873492432482} - \underline{1.1675851134593} i) v \\ &+ (\underline{0.16681813302697} - \underline{0.083445063954989} i) v^2 \\ &+ (\underline{-0.17925868582708} - \underline{0.6959743295761} i) v^3\end{aligned}$$

ここで、下線部は正しい数値である。 $|0.517 - \hat{s}| \approx 10^{-4}$  であるから、 $\hat{\chi}^{(6)}$  の 6 次の項は  $\chi^{(3)}$  の  $v^i$  項には  $O(10^{-4(6-i)})$  の寄与しかしない。したがって、上式  $\chi^{(3)}(v)$  の各係数部は  $O(10^{-12})$  まで正しいはずで、実際、そうになっている。 ■

## 参 考 文 献

- [GCL92] K.O. Geddes, S.R. Czapor and G. Labahn: *Algorithms for Computer Algebra*, Ch. 6, Kluwer Academic, Boston-Dordrecht-London, 1992.
- [KT78] H.T. Kung and J.F. Traub: All algebraic functions can be computed fast, *J. ACM* **25** (1978), 245-260.
- [SK99] T. Sasaki and F. Kako: Solving multivariate algebraic equation by Hensel construction, *Japan J. Indus. Appl. Math.*, **16** (1999), 257-285. (This paper was submitted in March, 1993, and the authors received a referees' reports in September, 1996 and the letter of acceptance in June, 1998.)
- [SKK00] T. Sasaki, T. Kitamoto and F. Kako: On Cancellation Error in Newton's Method for Power Series Roots of Multivariate Polynomial, preprint (32 pages), 2000 (submitted).
- [SY98] T. Sasaki and S. Yamaguchi: An analysis of cancellation error in multivariate Hensel construction with floating-point number arithmetic, *Proc. of ISSAC'98*, pp. 1-8, ACM Press (1998).
- [Wal78] R. J. Walker: *Algebraic curves*, Ch. 4, Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlin, 1978.