数理解析研究所講究録 1200巻 2001年 137-148

The Multiple Zeta Value Algebra And The Stable Derivation Algebra

京大数理研　古庄英和 (Hidekazu Furusho)

Research Institute for Mathematical Sciences, Kyoto Univ

Abstract 多重ζ値(multiple zeta value)で生成された$\mathbb{Q}$ベクトル空間は積によって閉じているから代数構造を持っています。これが多重ζ値代数(multiple zeta value algebra)です。安定導分Lie環(stable derivation algebra)というのはGT(Grothendieck-Teichmüller群)の$\mathbb{Q}$上のLie環versionに相当します。l進Galois Lie環($\mathbb{P}^1_{\bar{\mathbb{Q}}}-\{0,1,\infty\}$のpro-$l$基本群への外Galois表現の像から作った$\mathbb{Q}_l$上のLie環)は安定導分Lie環の$l$進化($\otimes\mathbb{Q}_l$したもの)にcanonicalにうめこまれることが知られています。実はこのうめこみ射は同型だろうという予想が伊原先生によりされています。今回の私の主結果とはこのストーリーをHodge側でパラレルに作ったことです[F]。くわしく説明しますと安定導分Lie環のdual線型空間からnewζ空間(多重ζ値代数のalgebraic generatorの空間)に向かって(同型かもしれないような)canonicalな全射を作ったのです(ch2. Th & Cor)。これより安定導分Lie環の構造予想から多重ζ値代数の次元予想の上限パートが従うことが系として出ます。

(実は最近、多重ζ値代数とGT(の副代数群版)との関係が付けられました。) □

目次

Ch1 Galois Side

$\boxed{\text{profinite group world}}$

$$0 \longrightarrow \pi_1(\mathbb{P}^1_{\overline{\mathbb{Q}}} - \{0,1,\infty\}) \longrightarrow \pi_1(\mathbb{P}^1_{\mathbb{Q}} - \{0,1,\infty\}) \longrightarrow \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \longrightarrow 0$$

これは2元生成の自由群の副有限完備化です。略して $\hat{F}_2$ とかきます

略して $G_{\mathbb{Q}}$ とかきます

上のスキーム論的基本群のホモトピー完全列から外Galois表現

$$\begin{tikzcd} \varphi : G_{\mathbb{Q}} \arrow[rr, hook] \arrow[dr, bend right] & & \mathrm{Out}\,\hat{F}_2 \\ & GT \arrow[ur, bend right] & \end{tikzcd}$$

が生じます。

$\mathrm{Out}\,\hat{F}_2 := \mathrm{Aut}\,\hat{F}_2 / \mathrm{Inn}\,\hat{F}_2$
自己同型群を内部自己同型群で割った商群です。これを外部自己同型群といいます。

実は、Belyiにより、これが単射であることが示されています([Be])。そこで

“このGalois像を $\mathrm{Out}\,\hat{F}_2$ の中で具体的に特徴付けよう！”

という試みが始まりました。Grothendieck-Teichmüller群 GT というのは Drinfel'd により定義された $\mathrm{Out}\,\hat{F}_2$ の部分群のことです([Dr])。そして実は $G_{\mathbb{Q}}$ の像がこれに含まれていることが知られています([Ih], [Nak])。$\varphi(G_{\mathbb{Q}}) = GT$ かどうかはまだ未解決です。

では、次にこの世界のパラレルワールドに移ることにしましょう。

$\boxed{\ell\text{-adic Lie algebra world}}$ (くわしくは[Ih99]を見て下さい。)

素数 ℓ を1つ固定して先のpro-ℓ版の外Galois表現 $\varphi^{\ell} : G_{\mathbb{Q}} \longrightarrow \mathrm{Out}\,F_2^{\ell}$ を考えましょう。

<u>ℓ進Galois Lie環</u>　F_2^{ℓ} の降中心列で切った表現で考えることにより

拡大体の塔　$\mathbb{Q}^{\ell}(1) = \mathbb{Q}(\mu_{\ell^{\infty}}) \subset \mathbb{Q}^{\ell}(2) \subset \mathbb{Q}^{\ell}(3) \subset \cdots\cdots$ が作れます。

$$\mathfrak{g}^{\ell} := \bigoplus_{m=1}^{\infty} \mathfrak{g}^{\ell}_m \quad , \quad \mathfrak{g}^{\ell}_m := \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}^{\ell}(m+1)/\mathbb{Q}^{\ell}(m)) \otimes_{\mathbb{Z}_{\ell}} \mathbb{Q}_{\ell}$$

とおくことにより、$\mathfrak{g}^{\ell}$ には自然に $\mathbb{Q}_{\ell}$ 上の*)次数付Lie環の構造が入ります

これがℓ進Galois Lie環です。さて $\mathfrak{g}^\ell$ からLie環の単射準同型
が引き起されます。

$$\begin{tikzcd}
\Phi_\ell : \mathfrak{g}_\bullet^\ell \arrow[rr, hook] \arrow[dr, "\Phi_\ell"'] & & \mathrm{OutDer}\, \mathbb{L}_\bullet \otimes \mathbb{Q}_\ell \\
& \mathcal{D}_\bullet \otimes \mathbb{Q}_\ell \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

外微分のなすLie環

$\mathbb{L}_\bullet = \bigoplus_{w=1}^{\infty} \mathbb{L}_w = \mathbb{Q}x \oplus \mathbb{Q}y \oplus \mathbb{Q}[x,y] \oplus \mathbb{Q}[x,[x,y]] \oplus \mathbb{Q}[y,[x,y]] \oplus \cdots$ から作った、xとyによる2元生成の次数付Lie環です。次数は $\deg x = \deg y = 1$ で入れます

やはり、こちらのワールドでも

"この像を $\mathrm{OutDer}\, \mathbb{L}_\bullet \otimes \mathbb{Q}_\ell$ の中で具体的に特徴付け そのLie構造を明らかにしよう!"

という問題が考えられています。

<u>安定導分Lie環 (stable derivation algebra)</u> $\mathcal{D}_\bullet$ というのは $\mathrm{OutDer}\, \mathbb{L}_\bullet$ の部分Lie環です。伊原先生によって定義されました([Ih 90])。これは $\mathbb{Q}$ 上*)定義された次数付Lie環になっていて $\mathfrak{g}^\ell$ の像はこれのℓ進化 $\mathcal{D}_\bullet \otimes \mathbb{Q}_\ell$ に含まれています。このうめこみを Φ_ℓ としておきましょう。('stable' という語が気になる方は [Ih 92] をご覧下さい。) $\mathcal{D}_\bullet$ の定義(正確には $\mathrm{Der}\, \mathbb{L}_\bullet$ への持上げ)は以下の通りです。

定義 $$\mathcal{D}_\bullet = \left\{ D_f \in \mathrm{Der}\, \mathbb{L}_\bullet \;\middle|\; \begin{array}{l} D_f(x) = 0, \quad D_f(y) = [y, f] \\ f \in \mathbb{L}_\bullet \text{ は関係式 (0)〜(iii) をみたす} \end{array} \right\}$$

関係式
$$\begin{cases}
\text{(0)} & f \in \bigoplus_{w=2}^{\infty} \mathbb{L}_w \\
\text{(i)} & f(x,y) + f(y,x) = 0 \\
\text{(ii)} & f(x,y) + f(y,z) + f(z,x) = 0 \quad \text{for } x+y+z=0 \\
\text{(iii)} & \sum_{i \in \mathbb{Z}/5} f(x_{i,i+1}, x_{i+1,i+2}) = 0 \quad \text{in } P_5
\end{cases}$$

※ P_5 というのは5本組紐Lie環です。詳しくは [Ih 91] [Ih 92] を見て下さい。

脚注*) [Ih 91] では $\mathcal{D}_\bullet$ ($\mathfrak{g}_\bullet^\ell$) は $\mathbb{Q}$ (resp. $\mathbb{Q}_\ell$) 構造でなく $\mathbb{Z}$ (resp. $\mathbb{Z}_\ell$) 構造で考えられています。実はそちらの方が面白いのですが、ここでは $\mathbb{Q}$ (resp. $\mathbb{Q}_\ell$) 構造で考えることにします。

次数 は $\mathfrak{D}_\bullet = \bigoplus_{w=1}^{\infty} \mathfrak{D}_w$, $\mathfrak{D}_w := \{ D_f \in \mathfrak{D}_\bullet \mid f \in \mathbb{L}_w \}$

で入れます。このdegreeを'weight'と呼んだりもします([Ih99])。

さて、先の問題に関して、次の2つの予想がされています。

Conjecture A ([Ih99]) うめこみ $\Phi_\ell : \mathfrak{g}_\bullet^\ell \hookrightarrow \mathfrak{D}_\bullet \otimes \mathbb{Q}_\ell$ は同型だろう。

この予想は、ℓ進Galois Lie環が各素数ℓに対しててんでまちまちに存在するものではなく共通な$\mathbb{Q}$-構造がとれて、しかもそれがこのようなcombinatoriallyに定義されている安定導分Lie環でとれてしまうことを主張しています。

Conjecture B ([De], [Ih99]) $\mathfrak{g}_\bullet^\ell$ は次数が3以上の奇数の所に1つずつ生成元がとれるような自由Lie環であろう。

この予想は、R. Hainと松本眞さんによって〰〰の部分は正しいことが示されています([HM])。Conj A と Conj B を組合わせることによって得られるのが安定導分Lie環の構造予想です。

Conjecture B' ([Ih99]) $\mathfrak{D}_\bullet$ は次数が3以上の奇数の所に1つずつ生成元がとれるような自由Lie環であろう。

角皆宏さんと松本眞さんは計算機を用いて安定導分Lie環のlower weightの各次元を求めてConj B' がweight 12の所までは正しいことを確かめました([Tsu])。

w	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\dim \mathfrak{D}_w$	0	0	1	0	1	1	1	1	1	1	2	2

Ch 2. Hodge Side

多重ζ値 (multiple zeta value：略してMZVとかいたりします。)

既に大野さんの報告で説明されていると思うので くわしい話はそちら ([Kan] もとてもよい文献です。) を参照して下さい。天下り的ですが記号は以下のようにしておきましょう。

記号 $\mathbb{k}=(k_1,\cdots,k_m)$; admissible index (i.e. $k_i\in\mathbb{N}_{\geq 1}$, $k_m>1$)

これはMZVの収束条件

$$\mathrm{wt}\,\mathbb{k}:=k_1+\cdots+k_m \quad : \text{weight of } \mathbb{k}$$

$$\zeta(\mathbb{k}):=\sum_{0<n_1<\cdots<n_m}\frac{1}{n_1^{k_1}n_2^{k_2}\cdots n_m^{k_m}} \quad : \text{MZV of } \mathbb{k} \quad \in\mathbb{R}$$

$$Z_0:=\mathbb{Q}$$

$$Z_w:=\langle\zeta(\mathbb{k})\mid \mathrm{wt}\,\mathbb{k}=w\rangle_{\mathbb{Q}}\subseteq\mathbb{R}$$; wt=w の MZV で生成された $\mathbb{Q}$ ベクトル空間

多重ζ値代数 とは $Z_\bullet:=\bigoplus_{w=0}^{\infty}Z_w$ のことです。これは実際、次数付 $\mathbb{Q}$ 代数の構造をしています。(これの代数構造に関しては [Gon] の予想を見て下さい。) さて、金子昌信先生、大野泰生さん、M.Hoffmanさん (それからEulerも!) などなどによりMZV間に成り立つ関係式がいっぱい見つかっています。今まで見つかっているこのMZVの関係式をすべて総動員すると多重ζ値代数のlower weight部分は以下のように生成系がとれます。

$$Z_0=\langle 1\rangle_{\mathbb{Q}}$$

$$Z_1=0$$

$$Z_2=\langle \pi^2\rangle_{\mathbb{Q}}$$

$$Z_3=\langle \zeta(3)\rangle_{\mathbb{Q}}$$

$$Z_4=\langle \pi^4\rangle_{\mathbb{Q}}$$

$$Z_5=\langle \pi^2\zeta(3),\ \zeta(5)\rangle_{\mathbb{Q}}$$

- $\zeta(2)=\frac{\pi^2}{6}$ (Euler)
- $\zeta(3)=\zeta(1,2)$ (Euler)
- $\zeta(4)=4\zeta(1,3)=\frac{4}{3}\zeta(2,2)=\zeta(1,1,2)$ $=\frac{\pi^4}{90}$ (Euler)

$$Z_6 = \langle \pi^6,\ \zeta(3)^2 \rangle_{\mathbb{Q}}$$

$$Z_7 = \langle \pi^4\zeta(3),\ \pi^2\zeta(5),\ \zeta(7) \rangle_{\mathbb{Q}}$$

$$Z_8 = \langle \pi^8,\ \pi^2\zeta(3)^2,\ \zeta(3)\zeta(5),\ \zeta(3,5) \rangle_{\mathbb{Q}}$$

現在までの所，上記の生成系の間に成り立つ $\mathbb{Q}$-linear な関係式は（異なる weight 間も込めて）見つかっていないです。

<u>new ζ 空間</u>　上の表の〰印を見て下さい。まず，〰が付いていない MZV はそれより weight の小さい MZV の product でかけている old comer です。一方，〰が付いている MZV はそこでの weight になって初めて出現するから new comer ですね。この new comer はいうなれば「多重ζ値代数の algebraic generator」です。そこでこの new comer を取り出した次のような $Z_\bullet$ の商空間を new ζ 空間と呼ぶことにしましょう。

$$NZ_\bullet := Z_{>2}/Z_{>0}^2 \simeq Z_\bullet / \overbrace{\mathbb{Q}}^{Z_0} \oplus \overbrace{\mathbb{Q}\pi^2}^{Z_2} \oplus Z_{>0}^2 \quad : \text{new } \zeta \text{ 空間}$$

これは，多重ζ値代数を 'modulo product' して考えた空間です。次数付 $\mathbb{Q}$ ベクトル空間になってます。都合上 π^2 は old にしておきました。何故でしょう？

<u>Main Results</u>　さて，ch1でうめこみ $\Phi_\ell : \mathfrak{g}_\bullet^\ell \hookrightarrow \mathfrak{D}_\bullet \otimes \mathbb{Q}_\ell$ がありましたが，私の結果はこれを Hodge Side で作ったことです。（証明は ch3 を見て下さい。）

$\boxed{\text{Theorem}}$　次のような（次数付 $\mathbb{Q}$ ベクトル空間としての）canonical な全射が作れました。　$\Phi_{DR} : \mathfrak{D}_\bullet^\vee \twoheadrightarrow NZ_\bullet$

$\mathfrak{D}_\bullet^\vee$ とは $\mathfrak{D}_\bullet$ の graded dual のことです。
即ち $\mathfrak{D}_\bullet^\vee = \bigoplus_{w=0}^{\infty} \mathfrak{D}_w^\vee$，$\mathfrak{D}_w^\vee = \mathfrak{D}_w$ の双対空間

これより $\dim NZ_w \leq \dim \mathfrak{D}_w$ です。そこで

$$d'_w := \left[\begin{array}{l} \pi^2 : \deg \pi^2 = 2 \ ,\ z_{ik} : \deg z_{ik} = k \quad (1 \leq i \leq \dim \mathfrak{D}_k,\ k \in \mathbb{N}) \\ \text{で生成された次数付多項式環の}\deg = w\text{部分の次元} \end{array}\right]$$

とおくことにしましょう。これは具体的に

$$\sum_{k=0}^{\infty} d'_k t^k = \frac{1}{1-t^2} \prod_{w=1}^{\infty} \frac{1}{1 - \dim \mathfrak{D}_w t^w}$$ で計算できます。

すると次のような bound が得られます。

Corollary $\quad \dim Z_w \leq d'_w \quad$ for all w

では、これが $\dim Z_w$ の予想値 d_w（この講究録の中の大野さんの記事を見て下さい）にどの位近付いているのかなと思って、ch 1 の $\dim \mathfrak{D}_w$ の表を用いて d'_w を計算してみました。すると、

$$d'_w = d_w \quad \text{for } w \leq 12$$

参考までに

w	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
d_w	1	0	1	1	1	2	2	3	4	5	7	9	12

です。

でした。つまり、計算機で計算されている所 ($w \leq 12$) までは、上の bound は予想値になっていることが確められたのです。

さて、一般の weight w に対しては、次のようなことまでいえてしまいました。

Proposition. もし、Conj B′ (ch 1) が正しいのならば
$$d'_w = d_w \qquad \text{for all } w$$

即ち、Galois Side で述べた安定導分 Lie 環の構造予想から多重ζ値の次元予想の bounding に関する部分の結果が従ってしまうのです。だから次のような予想をしてもよいと思います。

Conjecture C 全射 $\Phi_{DR} : \mathfrak{D}^{\vee} \twoheadrightarrow NZ.$ は同型だろう。

Galois Side の予想 Conj A に対してこのような予想を Hodge Side でも立てることにしました。

Ch3. Proof of the main theorem

$\boxed{\text{材料}}$ ここでは必要な道具をざっと紹介します。くわしくは[Dr] [Kas]をご覧下さい。

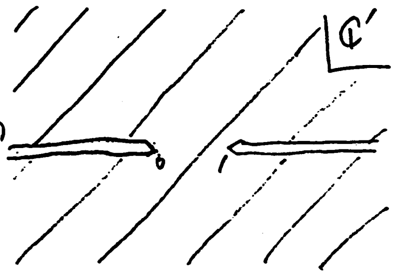
KZ方程式 $\quad \hat{A}_{\mathbb{C}} := \mathbb{C}\langle\langle X, Y\rangle\rangle$：$\mathbb{C}$係数2変数非可換形式的巾級数環

$G(u)$：全平面$\mathbb{C}$のある領域上定義され$\hat{A}_{\mathbb{C}}$上に値をとる複素解析的関数

とします。次の微分方程式がKZ(Knizhnik-Zamolodchikov)方程式です。

$$G'(u) = \left(\frac{X}{u} + \frac{Y}{u-1}\right) \cdot G(u) \qquad \text{for } u \in \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} - \{0, 1, \infty\}$$

これは$u = 0, 1, \infty$で確定特異点を持つFuchs型の微分方程式であり初期条件を適当に決めると右の領域$\mathbb{C}'$上で定義された解が一意に決まります。



基本解 特に次のような初期条件を満たす解が$\mathbb{C}'$上でそれぞれuniqueに定まります。

$$\exists^1 G_0(u) \approx u^X \quad (u \to 0), \quad \exists^1 G_1(u) \approx (1-u)^Y \quad (u \to 1)$$

ただし $u^X := 1 + \dfrac{(X\log u)}{1!} + \dfrac{(X\log u)^2}{2!} + \dfrac{(X\log u)^3}{3!} + \cdots\cdots$

$G_0(u) \approx u^X \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} G_0(u) \cdot u^{-X}$ はuの近傍で解析的かつ

$u \to 0$で値1をとること です。

$G_1(u) \approx (1-u)^Y$ の定義も同様にできますね。

$G_0(u)$のlower degree部分を手計算で求めてみました。$Li_{k_1, \ldots, k_m}(u) = \displaystyle\sum_{0 < n_1 < \cdots < n_m} \frac{u^{n_m}}{n_1^{k_1} \cdots n_m^{k_m}}$

：multiple poly logarithm を使って次のようにかけました。

$$\begin{aligned}
G_0(u) = {}& 1 + (\log u)X + (\log 1-u)Y + \frac{(\log u)^2}{2}X^2 - Li_2(u)XY + \{Li_2(u) + \log u(\log 1-u)\}YX \\
&+ \frac{(\log 1-u)^2}{2}Y^2 + \frac{(\log u)^3}{6}X^3 - Li_3(u)X^2Y + \{2Li_3(u) - \log u\, Li_2(u)\}XYX + Li_{12}(u)XY^2 \\
&- \left\{Li_3(u) - \log u\, Li_2(u) - \frac{(\log u)^2(\log 1-u)}{2}\right\}YX^2 + Li_{21}(u)YXY - \left\{Li_{12}(u) + Li_{21}(u) - \frac{\log u(\log 1-u)^2}{2}\right\} \\
&Y^2X + \frac{(\log 1-u)^3}{6}Y^3 + \frac{(\log u)^4}{24}X^4 - Li_4(u)X^3Y + \{3Li_4(u) - \log u\, Li_3(u)\}X^2YX + \cdots
\end{aligned}$$

Drinfel'd associator とは $\Phi_{KZ}(X,Y)=G_1^{-1}(u)\cdot G_0(u)$ のことです。

これはuによらない定数関数です。(即ち $\widehat{A_{\mathbb{C}}}$ の元と思えます。) さらに、各係数がMZVになっています。

$$\Phi_{KZ}(X,Y)=1-\zeta(2)XY+\zeta(2)YX-\zeta(3)X^2Y+2\zeta(3)XYX+\zeta(1,2)XY^2$$
$$-\zeta(3)YX^2-2\zeta(1,2)YXY+\zeta(1,2)Y^2X-\zeta(4)X^3Y+\cdots$$

関係式 さて Drinfel'd は [Dr] において「$\Phi_{KZ}\left(\frac{X}{2\pi i},\frac{Y}{2\pi i}\right)$ は quasi-triangular quasi-Hopf quantized universal envelopping algebra over $\mathbb{C}[[\hbar]]$ の $\mathbb{C}$-universal formula になる」ことを、$\Phi_{KZ}(X,Y)$ に以下の関係が成り立つことを示してそれより導いています。

$$\begin{cases}
(0) & \log\Phi_{KZ}(X,Y)\in\prod_{w=2}^{\infty}\mathbb{L}_w\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{C}\\
(\mathrm{i}) & \Phi_{KZ}(X,Y)\Phi_{KZ}(Y,X)=1\\
(\mathrm{ii}) & e^{\pi iX}\Phi_{KZ}(Z,X)e^{\pi iZ}\Phi_{KZ}(Y,Z)e^{\pi iY}\Phi_{KZ}(X,Y)=1 \quad \text{for } X+Y+Z=0\\
(\mathrm{iii}) & \Phi_{KZ}(x_{12},x_{23})\Phi_{KZ}(x_{34},x_{45})\Phi_{KZ}(x_{51},x_{12})\Phi_{KZ}(x_{23},x_{34})\Phi_{KZ}(x_{45},x_{51})=1 \quad \text{in } (U\mathfrak{P}_5\otimes\mathbb{C})^\wedge
\end{cases}$$

構成法 定理の証明をします。

① まずreduction

次数は $\deg X=\deg Y=1$ で入れます。

$\widehat{A_{\mathbb{Q}}}:=\prod_{w=0}^{\infty}A_w:=\mathbb{Q}\langle\langle X,Y\rangle\rangle$: $\mathbb{Q}$係数2変数非可換次数付多項式環

とします。Drinfel'd associator $\Phi_{KZ}(X,Y)$ は $\prod_{w=0}^{\infty}Z_w\otimes A_w$ に属しています。

これを'modulo product'したもの $\overline{\Phi_{KZ}}(X,Y)$ を考えてみることにしました。

$$\begin{array}{ccc}
\prod_{w=0}^{\infty}Z_w\otimes A_w & \ni & \Phi_{KZ}(X,Y)\\
\downarrow & & \downarrow\\
\prod_{w=0}^{\infty}NZ_w\otimes A_w & \ni & \overline{\Phi_{KZ}}(X,Y)
\end{array}$$: "reduction Drinfel'd associator"

② $\overline{\Phi_{KZ}}(X,Y)$ と $\mathfrak{D}_\bullet$ との関係

Φ_{KZ} の関係式より $\overline{\Phi_{KZ}}$ は次の関係を満たします。

$$
\begin{cases}
(0) & \overline{\Phi_{KZ}}(X,Y) \in \prod_{w=2}^{\infty} NZ_w \otimes \mathfrak{L}_w \\
(\mathrm{i}) & \overline{\Phi_{KZ}}(X,Y) + \overline{\Phi_{KZ}}(Y,X) = 0 \\
(\mathrm{ii}) & \overline{\Phi_{KZ}}(X,Y) + \overline{\Phi_{KZ}}(Y,Z) + \overline{\Phi_{KZ}}(Z,X) = 0 \qquad \text{for } X+Y+Z=0 \\
(\mathrm{iii}) & \sum_{i\in\mathbb{Z}/5} \overline{\Phi_{KZ}}(x_{i,i+1}, x_{i+1,i+2}) = 0 \qquad \text{in } \prod_{w=0}^{\infty} NZ_w \otimes (P_5)_w
\end{cases}
$$

これより $\overline{\Phi_{KZ}} \in \prod_{w=0}^{\infty} NZ_w \otimes \mathfrak{D}_w$ であることがわかります。

③ 最後に代入

$$
\begin{array}{cccc}
\Phi_{DR} : \mathfrak{D}_\bullet^\vee = \bigoplus_{w=0}^{\infty} \mathfrak{D}_w^\vee & \longrightarrow & NZ_\bullet = \bigoplus_{w=0}^{\infty} NZ_w \\
\rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\
h & \longmapsto & h(\overline{\Phi_{KZ}})
\end{array}
$$

$\mathfrak{D}_\bullet^\vee$ の元に対して、reduction Drinfel'd associator $\overline{\Phi_{KZ}}$ で取る値を対応させる射が私の構成した射 Φ_{DR} です。(実はこの'DR'は de Rham と Drinfel'd の2人をかけています!!) これが全射になっていることもすぐ確められます。 □

問題 さて Ch2. Prop よりもし Conj B' が正しくてさらに MZV の次元予想 (即ち. $\dim Z_w \overset{?}{=} d_w$) も正しいとすると MZV の関係式は Drinfel'd associator $\Phi_{KZ}(X,Y)$ の関係式 (0)〜(iii) から得られる MZV の関係式だけで全て尽きていることになります。(実は(iii)から(i)が導けます。) ということは、(0)〜(iii)だけから今まで発見されている MZV の既存の関係式 (duality relation, double shuffle relation, Ohno relation, ……) が全て導けることになりますよね。本当でしょうか? ちなみにあの Euler の公式 $\zeta(2n) = \frac{-(2\pi i)^{2n}}{2(2n)!} B_{2n}$ は (0)〜(iii) を使って示せます。([De])

Ch4. Comparison

今までの Galois Side と Hodge Side の話を比べてみましょう。

<u>Conj A</u> これは同型だろう。 　　　　<u>Conj C</u> これも同型だろう

$\boxed{\ell\text{-adic}}$ 　　　　　　　　　　　　　　　　　　　$\boxed{\text{de Rham}}$

$$\begin{array}{ccccc}
\mathfrak{g}_\bullet^{\ell\vee} & \overset{\Phi_\ell^\vee}{\twoheadleftarrow} & \mathcal{D}_\bullet^\vee\otimes\mathbb{Q}_\ell & & \\
 & & \mathcal{D}_\bullet^\vee & \overset{\Phi_{DR}}{\twoheadrightarrow} & NZ_\bullet \\
\Psi & & \Psi & & \Psi \\
\dfrac{\kappa_m^\ell}{(m-1)!(\ell^{m-1}-1)} & \longleftarrow\!\shortmid & c_m & \shortmid\!\longrightarrow & \overline{-\zeta(m)}
\end{array}$$

Soulé 　　　　$(m=3,5,7,9,\cdots)$ Ihara 　　　　Riemann

<u>図の解説</u>

$\mathcal{D}_\bullet$ 　$m=3,5,7,\cdots$ に対して、$c_m:\mathcal{D}_m\twoheadrightarrow\mathbb{Q}$ という $\mathcal{D}_m^\vee$ の canonical な元が伊原先生によって構成されています([Ih99])。

$\mathfrak{g}_\bullet^\ell$ 　うめこみ 　$\Phi_\ell:\ \mathfrak{g}_\bullet^\ell \hookrightarrow \mathcal{D}_\bullet\otimes\mathbb{Q}_\ell$ 　の dual をとれば

全射 　$\Phi_\ell^\vee:\ \mathcal{D}_\bullet^\vee\otimes\mathbb{Q}_\ell \twoheadrightarrow \mathfrak{g}_\bullet^{\ell\vee}$ 　が得られます。

これが同型だろうというのが <u>Conj A</u> でした。さて、

$$H^1_{et}(\mathrm{Spec}\,\mathbb{Q},\ \mathbb{Q}_\ell(m)) = \begin{cases}\mathbb{Q}_\ell & m=3,5,7,9,\cdots \\ 0 & m:\ \text{other}\ (\geq 1)\end{cases}$$

です。Soulé 指標 $\tilde{\kappa}_m^\ell$ $(m=3,5,7,\cdots)$ とは、これの生成元になっており、具体的に以下のようにかけます。

$$\tilde{\kappa}_m^\ell:\ \underset{\sigma}{\overset{}{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}(\mu_{\ell^\infty}))}} \longrightarrow \mathbb{Z}_\ell$$

$\zeta_{\ell^n}=\exp\left(\frac{2\pi i}{\ell^n}\right)$

$\langle a^{m-1}\rangle$ とは $(0,\ell^n)$ 内で $\langle a^{m-1}\rangle \equiv a^{m-1} \bmod \ell^n$ を満たす自然数のこと

$$\text{s.t.}\quad \zeta_{\ell^n}^{\tilde{\kappa}_m^\ell(\sigma)} = \left[\left\{\prod_{a\in(\mathbb{Z}/\ell^n)^\times}\left(\zeta_{\ell^n}^a-1\right)^{\langle a^{m-1}\rangle}\right\}^{\frac{1}{\ell^n}}\right]^{\sigma-1} \quad \text{for all } n\in\mathbb{N}$$

$\tilde{\chi}^\ell_m$により誘導される射が　$\chi^\ell_m : \mathfrak{g}^\ell_m \longrightarrow \mathbb{Q}_\ell$　のことです。

このχ^ℓ_mはC_mの$\Phi^\vee_\ell$による像になっていました。

$$\Phi^\vee_\ell(C_m) = \frac{\chi^\ell_m}{(m-1)!\,(\ell^{m-1}-1)}$$

NZ.　一方．C_mのΦ_{DR}による像はRiemann ζ値になっていました。

$$\Phi_{DR}(C_m) = \overline{-\zeta(m)}$$

最後に　実は．D．とNZ．にはdepth filtrationという更なる付加構造が入っていて．Φ_{DR}はこの付加構造も込みできれいに対応しています。しかし．紙面の都合上割愛しました。くわしくは[F]を見て下さい。

References

[Be] Belyĭ, G. V.; Galois extensions of a maximal cyclotomic field. (Russian) Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. 43 (1979), no. 2, 267–276, 479.

[De] Deligne, P.; Le groupe fondamental de la droite projective moins trois points. Galois groups over Q (Berkeley, CA, 1987), 79–297, Math. Sci. Res. Inst. Publ., 16, Springer, New York-Berlin, 1989.

[Dr] Drinfel'd, V. G.; On quasitriangular quasi-Hopf algebras and a group closely connected with Gal($\overline{Q}/Q$). ; Leningrad Math. J. 2 (1991), no. 4, 829–860

[F] Furusho,H; The multiple zeta value algebra and the stable derivation algebra; available from http://xxx.yukawa.kyoto-u.ac.jp/abs/math.NT/0011261

[Gon] Goncharov, A. B. ; Multiple polylogarithms at roots of unity and motivic Lie algebras; MPI-preprint 97-62,1997

[HM] Hain,R,. Matsumoto,M.; Weighted Completion of Galois Groups and Some Conjectures of Deligne; available from http://xxx.yukawa.kyoto-u.ac.jp/abs/math.AG/0006158

[Ih90] Ihara, Y.; Braids, Galois groups, and some arithmetic functions. Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. I, II (Kyoto, 1990), 99–120, Math. Soc. Japan, Tokyo, 1991.

[Ih91] ——— Automorphisms of pure sphere braid groups and Galois representations. The Grothendieck Festschrift, Vol. II, 353–373, Progr. Math., 87, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1990.

[Ih92] ——— On the stable derivation algebra associated with some braid groups. Israel J. Math. 80 (1992), no. 1-2, 135–153.

[Ih99] ——— Some arithmetic aspects of Galois actions on the pro-p fundamental group of $\mathbf{P}^1 - \{0, 1, \infty\}$,RIMS-1229 preprint

[Kan] Kaneko, M. ; Introduction to multiple zeta values. Algebraic number theory and related topics(Japanese) (Kyoto, 1998). RIMS-kokyuroku No. 1097 (1999), 50–68.

[Kas] Kassel, C. ; Quantum groups. Graduate Texts in Mathematics, 155. Springer-Verlag, New York, 1995.

[Nak] Nakamura, H. ; Galois rigidity of pure sphere braid groups and profinite calculus. J. Math. Sci.Univ. Tokyo 1 (1994), no. 1, 71–136.

[Tsu] Tsunogai, H. ; On ranks of the stable derivation algebra and Deligne's problem. Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. 73 (1997), no. 2, 29–31

E-mail address: furusho@kurims.kyoto-u.ac.jp