

ON GOUVÊA'S CONJECTURES ON THE
UNIVERSAL DEFORMATION RINGS OF RESIDUAL
GALOIS REPRESENTATIONS

北大理 山上 教士 (ATSUSHI YAMAGAMI)

0. はじめに

本稿では、剰余 Galois 表現の普遍変形環に関する Gouvêa の予想を特別な場合に定式化し、それらに関する主結果を述べる。

まず、ここで考えられる Gouvêa の予想とはどのようなものであるかを簡単に解説したい。

$p \geq 7$ を素数とし、 S を p と ∞ を含む有理素点の有限集合とする。 $G_{\mathbb{Q}}$ を有理数体 \mathbb{Q} の絶対 Galois 群として、

$$\bar{\rho}: G_{\mathbb{Q}} \rightarrow \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{F}}_p)$$

を既約であって、 S の外不分岐な、ある保型形式に付随するモジュラーな剰余 Galois 表現とする。

本稿で考えたい予想というのは、だいたい次のようなものである：

‘予想’ $\bar{\rho}$ の勝手な S の外不分岐な変形は、(Katz の p 進固有関数に付随するという意味で) モジュラーな変形であろう。(以下、このような変形を Katz-モジュラーである、ということにする。)

Hida による [8] における “ordinary” な固有形式の族に付随する Galois 表現に関する結果を受けて、Mazur は [10] において、特別な仮定を満たす ordinary な剰余モジュラー表現 (“special dihedral representation” という) に対する ordinary な変形はモジュラーであることを証明している (Prop. 14).

この段階では、考える変形に対して “ordinary” という条件を付けているが、その後、Gouvêa は [4] において、Katz の p 進固有関数を用いることで、変形に対してとくに条件をつけずに、この予想を定式化した。本稿で対象とするのは、この Gouvêa による定式化である。

また、“ordinary” という条件のついた変形問題に関しても、Gouvêa により [5] で定式化された予想があり、本稿で紹介したい主結果というのは、“非常に特別な場合に” これらの予想は正しい、といった内容のものである。

以下、第 1 節では、Gouvêa による二つの予想を特別な場合に定式化し、第 2 節で、これらの予想に関する主結果を述べたい。

1. Gouvêa の予想

1.1. 変形の定義と予想 1

ここでは、剰余 Galois 表現の変形の定義をし、本稿で紹介したい予想は二つあるが、まず一つ目の予想を特別な場合において定式化する。

$p \geq 7$ を素数とし、 N を p と互いに素な正整数とする。

$$\bar{\rho}: G_{\mathbb{Q}} \rightarrow \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p)$$

を絶対既約であって、 \mathbb{Z}_p 上定義された tame level N の古典的な固有形式 f に付随するモジュラーな剰余 Galois 表現とする。

$S = \{ Np \text{ の素因数} \} \cup \{\infty\}$ とおくと、 $\bar{\rho}$ は \mathbb{Q} の S の外不分岐な最大 Galois 拡大の Galois 群 G_S を經由することがわかり、經由した後の表現 $G_S \rightarrow \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p)$ のことも $\bar{\rho}$ と呼んで、以下、

$$\bar{\rho}: G_S \rightarrow \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p)$$

の変形問題を考える。

定義 (cf. [10]). A を \mathbb{F}_p を剰余体とする完備局所 Noether 環とし、その極大イデアルを \mathfrak{m}_A とする。 $\bar{\rho}$ の二つの持ち上げ

$$\begin{array}{ccc} \rho, \rho' : G_S & \longrightarrow & \mathrm{GL}_2(A) \\ & & \downarrow \text{mod } \mathfrak{m}_A \\ & & \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p) \end{array}$$

が strictly equivalent であるということを、ある $M \in \mathrm{Ker}(\mathrm{GL}_2(A) \rightarrow \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p))$ があって、

$$\rho'(\sigma) = M^{-1}\rho(\sigma)M \quad (\sigma \in G_S)$$

となることとする。そして、 $\bar{\rho}$ の A への 変形 を、これらの持ち上げの strict equivalence class のこととする。

普遍変形環 (Mazur [10]).

Mazur は $\bar{\rho}$ の変形の間で普遍的な完備局所 Noether 環 $\mathbf{R}(\bar{\rho}, S)$ を定式化した。 $\mathbf{R}(\bar{\rho}, S)$ には $\bar{\rho}$ の変形

$$\rho^{\mathrm{univ}} : G_S \rightarrow \mathrm{GL}_2(\mathbf{R}(\bar{\rho}, S))$$

が付随していて、勝手な $\bar{\rho}$ の変形

$$\rho : G_S \rightarrow \mathrm{GL}_2(A)$$

に対して, 図式

$$\begin{array}{ccc} & \mathrm{GL}_2(\mathbf{R}(\bar{\rho}, S)) & \\ \rho^{\mathrm{univ}} \nearrow & & \downarrow \varphi \\ G_S & \xrightarrow{\rho} & \mathrm{GL}_2(A) \end{array}$$

が可換となる環準同型 $\varphi: \mathbf{R}(\bar{\rho}, S) \rightarrow A$ がただ一つ存在する.

普遍 Katz-モジュラー変形環 (Gouvêa [4]).

$\bar{\rho}$ が付随している固有形式 f を Katz の p 進固有関数とみなすことで, Gouvêa により, 普遍 Katz-モジュラー変形環 $\mathbf{T}(\bar{\rho}, N)$ が構成された.

この環は, Katz-モジュラーな変形の間で普遍的な環であり, \mathbb{Z}_p 上定義された tame level N の Katz の p 進放物的保型関数全体のなす環 $\mathbf{V}_{\mathrm{par}}(\mathbb{Z}_p, N)$ に作用する (制限された) Hecke 環 $\mathbf{T}_0^*(\mathbb{Z}_p, N)$ を, f に対応する極大イデアルに関して完備化したものが $\mathbf{T}(\bar{\rho}, N)$ であるが, ここでは, 詳しいことは省くことにする.

さて, $\mathbf{T}(\bar{\rho}, N)$ を構成した際に Gouvêa は, 自然な環準同型

$$\mathbf{R}(\bar{\rho}, S) \rightarrow \mathbf{T}(\bar{\rho}, N)$$

が全射であることを注意し, 次のような予想を述べた:

予想 1. 全射 $\mathbf{R}(\bar{\rho}, S) \rightarrow \mathbf{T}(\bar{\rho}, N)$ は同型であろう. つまり, $\bar{\rho}$ の勝手な変形は Katz-モジュラーであろう.

この予想に関しては, Gouvêa-Mazur による次の結果が知られている:

定理 (Gouvêa-Mazur [7]). ($N = 1$ の場合における結果)
 f のタイプを $(p, k, 1)_{\mathbb{Z}_p}$ とする (つまり, f はレベル p , 重さ k で自明な指標をもつ正規化された尖点固有形式). ここで, $k \geq 2$ とする.
 f の U_p -固有値 λ_p について,

$$0 < \mathrm{ord}_p(\lambda_p) < k - 1$$

と仮定し, さらに $\bar{\rho}$ に付随する随伴表現 $\mathrm{Ad}(\bar{\rho})$ について,

$$H^2(G_S, \mathrm{Ad}(\bar{\rho})) = 0$$

と仮定すると, 予想 1 は正しい:

$$\mathbf{R}(\bar{\rho}, S) \cong \mathbf{T}(\bar{\rho}, 1).$$

この定理については, あとで主結果を紹介するときに, もう一度触れたいと思う.

注意. 仮定における条件

$$H^2(G_S, \text{Ad}(\bar{\rho})) = 0$$

が満たされる時、 $\bar{\rho}$ の変形問題には 障害が無い、という。

このとき、 $\bar{\rho}$ に対する普遍変形環 $\mathbf{R}(\bar{\rho}, S)$ が \mathbb{Z}_p を係数とする 3 変数の形式的巾級数環と同型になることが、Mazur によって示されている ([10], Prop. 2 と Cor. 3).

注意. この講演後に東大の落合理さんから、Böckle による $\mathbf{R}(\bar{\rho}, S) \cong \mathbf{T}(\bar{\rho}, N)$ に関するごく最近のプレプリント [1] があることを教えていただいた。その中で得られている結果が、非常に注目すべきものであるので、ここで少し触れたいと思う。

Böckle は [1] において、Wiles [14], Taylor-Wiles [13] により示された “small rings” (すなわち、 $\mathbf{R}(\bar{\rho}, S)$ や $\mathbf{T}(\bar{\rho}, N)$ の商環として表される “条件付き変形” の普遍変形環) の同型を用いて、“big rings” (すなわち、 $\mathbf{R}(\bar{\rho}, S)$ と $\mathbf{T}(\bar{\rho}, N)$) の同型を導くという手法を示している。この手法は、 $\bar{\rho}$ に対していくつかの仮定をつけなければならないが、変形の障害を許した状況でも用いることができるという点で、非常に興味深いものである。

1.2. 予想 2

ここでは、付随する固有形式のレベルが $\bar{\rho}$ の導手と一致するという状況で、[5] において Gouvêa により主張された予想を、特別な場合に定式化する。

再び始めに戻って、絶対既約な剰余 Galois 表現

$$\bar{\rho}: G_{\mathbb{Q}} \rightarrow \text{GL}_2(\mathbb{F}_p)$$

から議論を始めたいと思う。 $N = N(\bar{\rho})$ を $\bar{\rho}$ の導手とする (剰余 Galois 表現の導手の定義、またその性質については、[12] や [5] を参照のこと)。そして、 $\bar{\rho}$ は \mathbb{Z}_p 上定義されたレベル N の固有形式 f に付随すると仮定し、 $S = \{ Np \text{ の素因数} \} \cup \{\infty\}$ とおけば、前述したように $\bar{\rho}$ は G_S を経由することがわかり、以下、剰余 Galois 表現

$$\bar{\rho}: G_S \rightarrow \text{GL}_2(\mathbb{F}_p)$$

の変形問題を考える。

普遍 “ S^0 -ordinary” 変形環 (Gouvêa [5]).

$S^0 = \{l \mid N \text{ の素因数, } \bar{\rho} \text{ は “}l\text{-ordinary.”}\}$ とおく (表現が “ l -ordinary” であるという定義については、[10] や [5] を参照のこと)。このとき、Gouvêa は [5] において、普遍 “ S^0 -ordinary” 変形環 $\mathbf{R}(\bar{\rho}, N)$ の存在を示した。ここで、 S^0 -ordinary 変形とは、 S^0 に属する各素数において ordinary な変形のこと、 $\mathbf{R}(\bar{\rho}, N)$ は $\bar{\rho}$ の S^0 -ordinary 変形の間で普遍的な環である。(Gouvêa は、 S^0 -ordinary 変形の導手もま

た N となることも証明しているが、ここでは $R(\bar{\rho}, N)$ の性質に関する詳しい説明は省く.)

Gouvêa は、予想 1 の自然な全射 $R(\bar{\rho}, S) \rightarrow T(\bar{\rho}, N)$ が

$$\begin{array}{ccc} R(\bar{\rho}, S) & \longrightarrow & T(\bar{\rho}, N) \\ & \searrow & \nearrow \\ & & R(\bar{\rho}, N) \end{array}$$

と $R(\bar{\rho}, N)$ を経由することを示し、次のような予想を述べた:

予想 2. 全射 $R(\bar{\rho}, N) \rightarrow T(\bar{\rho}, N)$ は同型であろう. つまり, $\bar{\rho}$ の勝手な S^0 -ordinary 変形は Katz-モジュラーであろう.

2. 主結果とそれらの証明の概略

この節において、前節で定式化した Gouvêa の二つの予想に関する主結果と、それらの証明の概略を述べたい.

まず一つ目の定理は、前述した予想 1 に対する Gouvêa-Mazur による定理を、レベル Np の場合へ一般化したものである. 定理の主張を述べる前に一つ、言葉の定義をしたい:

定義. レベル Np の固有形式 f が new away from p であるとは、レベル Np の newform であるか、あるレベル N の newform から作られるレベル Np の oldforms からなる 2 次元のベクトル空間に、 f が属していることをいう.

定理 1. N を p と素な正整数とする. f をタイプ $(Np, k, 1)_{\mathbb{Z}_p}$ で new away from p な固有形式とする. ここで、 $k \geq 2$ とする. f の U_p -固有値 λ_p について、

$$0 < \text{ord}_p(\lambda_p) < k - 1, \quad (\lambda_p)^2 \neq p^{k-1}$$

と仮定し、さらに、

$$H^2(G_S, \text{Ad}(\bar{\rho})) = 0$$

と仮定すると、予想 1 は正しい:

$$R(\bar{\rho}, S) \cong T(\bar{\rho}, N).$$

証明の概略. この定理は、[7] における Gouvêa-Mazur のレベル p の場合での議論を、レベル Np の場合へ一般化して得られる. ここでは、講演で詳しく触れることのできなかった、証明に用いる大切な‘道具’である“Coleman の族”と“infinite fern”について紹介したい.

Coleman の族 (Coleman [2], [3]).

いま仮定で与えられている固有形式 f は, レベル Np , 重さ k で, 自明な指標をもつ, \mathbb{Z}_p 上定義された new away from p な固有形式であり, $\alpha := \text{ord}_p(\lambda_p)$ が $k-1$ よりも小さいものとしている.

一般に, p 進数係数の固有形式 f の, p 番目の Hecke 作用素 (レベルが p で割り切れるときは U_p , p と素なときには T_p と表記する) に対する固有値 λ_p の p 進付値 $\text{ord}_p(\lambda_p)$ のことを, f の slope という.

[3] において Coleman は, f と同じレベル, 指標を持ち, slope も f と同じ α であるような, \mathbb{Z}_p 内の k を含むある開円盤 D により重さがパラメトライズされる, \mathbb{Z}_p 上定義された “overconvergent” な固有形式からなる族を構成した. この族のことを, Coleman の族 という (Cor. B. 5.7).

次に解説する “infinite fern” の構成において, Coleman の族の性質の中で重要となるのは, この族をなす固有形式のうちで, 古典的なものは全て new away from p なレベル Np の固有形式である, というものである.

この族をなす固有形式 $f_d = \sum_{n \geq 1} a_n(d)q^n$ ($d \in D$) 達の Fourier 展開の係数 $a_n(d)$ は, 各 n ごとに, D 上の p 進解析的な関数で与えられていて, とくに, $k' \in D \cap \mathbb{Z}, k' > \alpha + 1$ に対しては, $f_{k'}$ たちが全て古典的な重さ k' の固有形式であって, 付随する剰余 Galois 表現は f と同じく $\bar{\rho}$ であるとみなすことができる. すなわち, $f_{k'}$ に付随するモジュラーな Galois 表現

$$\rho_{k'} : G_S \rightarrow \text{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$$

は, $\bar{\rho}$ の \mathbb{Z}_p への変形となっているのである.

infinite fern (Mazur [11]).

$\bar{\rho}$ に対して,

$$X := \text{Hom}_{\mathbb{Z}_p\text{-alg}}(\mathbf{R}(\bar{\rho}, S), \mathbb{Z}_p)$$

を, $\bar{\rho}$ の 普遍変形空間 という. これは, $\bar{\rho}$ の \mathbb{Z}_p への変形全体を表していて, いま考えているように, 変形問題に障害が無い状況では,

$$\mathbf{R}(\bar{\rho}, S) \cong \mathbb{Z}_p[[t_1, t_2, t_3]]$$

であることが知られているから ([10]),

$$X \cong p\mathbb{Z}_p \times p\mathbb{Z}_p \times p\mathbb{Z}_p$$

となり, これをもって X を 3 次元の p 進多様体とみなすことができる.

この 3 次元の普遍変形空間 X 内には, p 進開円盤 D を必要ならば小さくとることで, Coleman の族をなす固有形式に付随する $\bar{\rho}$ の \mathbb{Z}_p への変形達からなる 1 次元のモジュラーな曲線が描かれる. この

X 内の slope α の曲線のことを C_α と書くことにする (Figure 1 を参照).

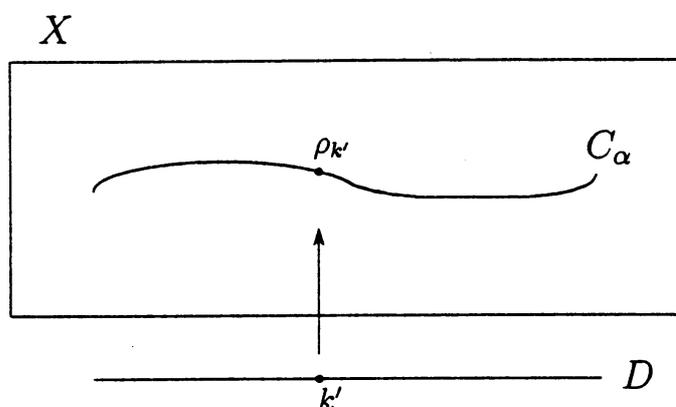


FIGURE 1. X 内のモジュラーな曲線 C_α

さて, X 内に infinite fern を構成することを解説するためには, new away from p なレベル N_p の固有形式 f に対して “twin” と呼ばれる, f と対をなすレベル N_p の固有形式について説明しなければならない.

oldform, newform と slope との関係から, D を必要ならばさらに小さくすることで, D 内で稠密な整数列 K で, 全ての $k' \in K$ に対し, 固有形式 $f_{k'}$ は古典的で new away from p なレベル N_p の oldform となっている, というものをとることができる. 後々のために, $2\alpha + 1 \notin D$ ともししておく.

new away from p な固有形式 $f_{k'}$ が oldform であるということは, あるレベル N の newform から作られる 2次元の空間内に属していることになるが, $f_{k'}$ は正規化された固有形式なので, この 2次元空間の基底の一つとなっている. そして, もう一つの正規化された固有形式で $f_{k'}$ とともに基底をなす $f'_{k'}$ のことを $f_{k'}$ の twin と呼ぶのである (具体的な構成法については, 定理 2 の証明の概略を参照のこと).

この twin $f'_{k'}$ は, $f_{k'}$ とレベル, 重さが同じであるが, 大切なことは, $f'_{k'}$ の slope を α' とおいたときに,

$$\alpha + \alpha' = k' - 1$$

となることであり, いま $k' \neq 2\alpha + 1$ であるから, $f_{k'}$ と $f'_{k'}$ の slope は互いに相異なる. さらに, twin の構成法から, 付随する \mathbb{Z}_p -係数の Galois 表現が $f_{k'}$ のものと同じであるとみなしてよいことがわかり, X 内においては, $f_{k'}$ と $f'_{k'}$ は同じ点 $\rho_{k'}$ を与えることになる. そして, f に対するのと同様に $f'_{k'}$ に対しても, これを含む slope α' の Coleman の族が構成されて, この族から X 内に描かれる slope α' の

曲線 $C_{\alpha'}$ は点 $\rho_{k'}$ で C_{α} と交わり, slope が相異なることから, この一点だけでしか交わらないことが証明される ([11], section 17).

いま解説した, twin をとり, それを通る Coleman の族を用いて X 内にモジュラーな曲線を描く, という操作を $k' \in K$ を走らせて繰り返すことで, C_{α} と一点だけで交わる曲線を無限に描くことができる (Figure 2 を参照).

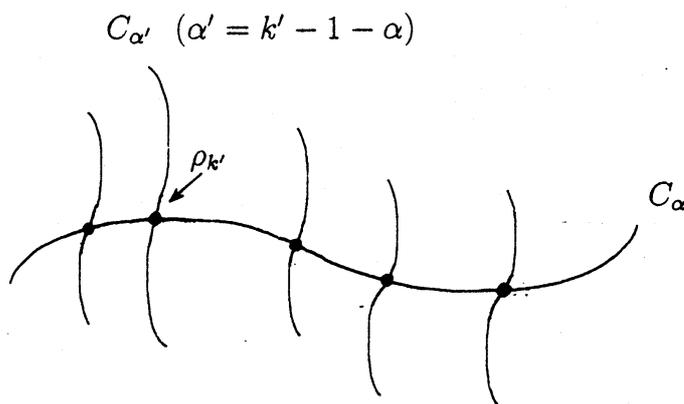


FIGURE 2. C_{α} と交わる曲線 $C_{\alpha'}$ 達

また, twin から得られる曲線 $C_{\alpha'}$ を軸に今までの操作を繰り返すことで, X 内に無限個のモジュラーな曲線からなるメッシュを描き続けることができる. この操作の結果として得られるであろうモジュラーな点の無限族のことを, X 内に描かれた infinite fern と呼ぶ (infinite fern の構成に関する解説については, [11] を参照のこと. 因みに, 'fern' とは 'シダ植物' という意味. Figure 3 を参照).

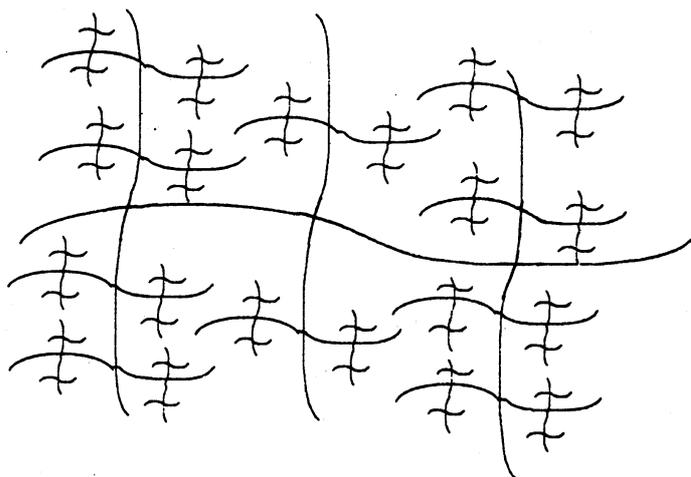


FIGURE 3. X 内に描かれた infinite fern

さて、定理の証明の方針は、この infinite fern を用いることで、 $\bar{\rho}$ の普遍変形空間 X 内に、モジュラーな点たちが稠密に入っていることを示すことであり、この稠密性から環の同型

$$\mathbf{R}(\bar{\rho}, S) \cong \mathbf{T}(\bar{\rho}, N)$$

を得るのである (infinite fern を用いた稠密性の証明については、[7] を参照のこと). \square

この定理を、導手をレベルとする剰余モジュラー表現に応用することで、予想 2 に対する次の定理を得る:

定理 2. $N = N(\bar{\rho})$ を $\bar{\rho}$ の導手とし、 f のタイプを $(N, k, 1)_{\mathbb{Z}_p}$ とする. ここで、 $k \geq 2$ とする. f の T_p -固有値 A_p について、

$$\text{ord}_p(A_p) > 0$$

であって、 \mathbb{Z}_p -係数の 2 次多項式

$$X^2 - A_p X + p^{k-1}$$

は \mathbb{Z}_p 内に単根を持つと仮定する. さらに、

$$H^2(G_S, \text{Ad}(\bar{\rho})) = 0$$

と仮定すれば、予想 2 は正しい:

$$\mathbf{R}(\bar{\rho}, N) \cong \mathbf{T}(\bar{\rho}, N).$$

証明の概略. 予想 2 を紹介した際に考えた可換図式

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{R}(\bar{\rho}, S) & \longrightarrow & \mathbf{T}(\bar{\rho}, N) \\ & \searrow & \nearrow \\ & & \mathbf{R}(\bar{\rho}, N) \end{array}$$

において、まず、環準同型

$$\mathbf{R}(\bar{\rho}, S) \rightarrow \mathbf{R}(\bar{\rho}, N)$$

が全射であることを示し (1), その上で、定理 1 を用いることで、自然な全射

$$\mathbf{R}(\bar{\rho}, S) \rightarrow \mathbf{T}(\bar{\rho}, N)$$

が同型であることを示す (2). そうすれば、上の可換図式において、全射

$$\mathbf{R}(\bar{\rho}, N) \rightarrow \mathbf{T}(\bar{\rho}, N)$$

が同型であることがわかる.

(1) 環準同型 $\mathbf{R}(\bar{\rho}, S) \rightarrow \mathbf{R}(\bar{\rho}, N)$ が全射であること、すなわち、普遍 S^0 -ordinary 変形環 $\mathbf{R}(\bar{\rho}, N)$ が普遍変形環 $\mathbf{R}(\bar{\rho}, S)$ の商環として表されることを示すために、Lenstra-de Smit により [9] の section

6において得られた判定条件を用いる. いま考えている S^0 -ordinary という条件が, この判定条件を満たすことは容易に確認することができ, 欲しい全射性が得られるのである.

(2) 次に, 定理 1 を応用することで, 自然な全射 $\mathbf{R}(\bar{\rho}, S) \rightarrow \mathbf{T}(\bar{\rho}, N)$ が同型であることを示す. 仮定において, $\bar{\rho}$ が付随する固有形式 f のレベル N が丁度 $\bar{\rho}$ の導手であることから, f はレベル N の newform であることがわかる ([5], Lemma 7, もしくは, [1], Theorem 2.8 を参照).

多項式 $X^2 - A_p X + p^{k-1} = 0$ の根を λ_1, λ_2 とおくと, 仮定により, これらは \mathbb{Z}_p の相異なる元であり,

$$0 < \text{ord}_p(\lambda_i) < k - 1 \quad (i = 1, 2)$$

がわかる.

レベル N の newform f に対し, Hecke 固有形式

$$g_1 = f - \lambda_2 \cdot f|B_p,$$

$$g_2 = f - \lambda_1 \cdot f|B_p$$

たちは, f から作られるレベル Np の oldforms からなる 2 次元のベクトル空間の基底をなす. ここで, B_p は保型形式の Fourier 展開に対して,

$$(f|B_p)(q) = f(q^p)$$

と作用する作用素である. これらの固有形式のことを f から生じる twins と呼ぶ. (定理 1 の証明の概略の中でも触れた. cf. [6], [11].)

l を Np と素な素数としたとき, g_i たちの Hecke 作用素 T_l に対する固有値が, f のものと同じであることから, 剰余モジュラー表現 $\bar{\rho}$ が g_i に付随しているとみなすことができる.

いまの状況では, レベル Np の固有形式 g_i が定理 1 の仮定を満たすことがわかるので,

$$\mathbf{R}(\bar{\rho}, S) \cong \mathbf{T}(\bar{\rho}, N)$$

を得ることができる. □

謝辞. この研究集会における講演の機会を与えて下さった, 伊原康隆先生に心より感謝申し上げます. また, Böckle の興味深いプレプリント [1] を教えてくださった, 落合理さんに深く感謝いたします.

References

- [1] G. Böckle, On the density of modular points in universal deformation spaces, preprint.
- [2] R.F. Coleman, Classical and overconvergent modular forms, *Invent. Math.* **124** (1996), 215-241.

- [3] R.F. Coleman, p -adic Banach spaces and families of modular forms, *Invent. Math.* **127** (1997), 417-479.
- [4] F.Q. Gouvêa, "Arithmetic of p -adic Modular Forms," Lecture Notes in Math., Vol. 1304, Springer-Verlag, Berlin and New York, 1988.
- [5] F.Q. Gouvêa, Deforming Galois representations: controlling the conductor, *J. Number Theory* **34** (1990), 95-113.
- [6] F.Q. Gouvêa and B. Mazur, Families of modular eigenforms, *Math. Comp.* **58** (1992), 793-805.
- [7] F.Q. Gouvêa and B. Mazur, On the density of modular representations, pp. 127-142, in "Computational perspectives on number theory," AMS/IP Studies in Advanced Mathematics **7** (1998).
- [8] H. Hida, Galois representations into $GL_2(\mathbb{Z}_p[[X]])$ attached to ordinary cusp forms, *Invent. Math.* **85** (1986), 545-613.
- [9] H. W. Lenstra and B. de Smit, Explicit construction of universal deformation rings, pp. 313-326, in "Modular Forms and Fermat's Last Theorem" (G. Cornell, J. H. Silverman, and G. Stevens, Eds.), Springer-Verlag, New York, 1997.
- [10] B. Mazur, Deforming Galois representations, pp. 385-437, in "Galois Groups over \mathbb{Q} " (Y. Ihara, K. Ribet, and J.-P. Serre, Eds.), Springer-Verlag, Berlin and New York, 1989.
- [11] B. Mazur, An "infinite fern" in the universal deformation space of Galois representations, *Collect. Math.* **48** (1997), 155-193.
- [12] J.-P. Serre, Sur les représentations modulaires de degré 2 de $Gal(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$, *Duke Math. J.* **54** (1987), 179-230.
- [13] R. Taylor and A. Wiles, Ring-theoretic properties of certain Hecke algebras, *Ann. of Math.* **141** (1995), 553-572.
- [14] A. Wiles, Modular elliptic curves and Fermat's last theorem, *Ann. of Math.* **142** (1995), 443-551.

DEPARTMENT OF MATHEMATICS, HOKKAIDO UNIVERSITY, SAPPORO, 060-0810, JAPAN

E-mail address: yamagami@math.sci.hokudai.ac.jp