数理解析研究所講究録 1202 巻 2001 年 75-82

半順序集合上のゲーム

吉信 康夫
YASUO YOSHINOBU

名古屋大学大学院人間情報学研究科

2000. 11. 17. (於: 京都大学数理解析研究所)

本講演の内容の一部は, 石宇 哲也氏との共同研究によるものである. 本講演で触れる研究結果の詳細については, [IY] および [Y] を参照されたい.

1. 序

Jech [J1] は, Banach と Mazur が考察した位相空間上での二人ゲームを半順序集合上で考えることによって, 半順序集合の組み合わせ論的な性質の特徴付けを与えることを試みた.

定義 1.1. 半順序集合 $\mathbb{P}$ と順序数 $\alpha > \omega$ に対して, 次のような二人ゲームを $G(\mathbb{P})$ で表す: まずプレーヤー I が $a_0 \in \mathbb{P}$ を選び, プレーヤー II が $b_0 \leq_{\mathbb{P}} a_0$ を選び, I が $a_1 \leq_{\mathbb{P}} b_0$ を選ぶ, 以下 $b_1, a_2, b_2, \ldots$ というように交互により小さい $\mathbb{P}$ の元を選んでゆく. 双方が ω 回の指し手を終えた後, もし a_n $(n < \omega)$ 全部よりも小さい $\mathbb{P}$ の元がとれなければ I の勝ち, とれれば II の勝ちとする.

$$
\begin{array}{l|lllllll}
\underline{G(\mathbb{P})} & \mathrm{I} : & a_0 & & a_1 & & a_2 & & \cdots \\
 & \mathrm{II} : & & b_0 & & b_1 & & b_2 & \cdots
\end{array}
$$

定理 1.2 (Banach-Mazur, Jech).
separative な半順序集合 $\mathbb{P}$ が σ-Baire $\Leftrightarrow$ $G(\mathbb{P})$ において I が必勝法をもたない.

そこで, このゲームを用いてさらに強い性質を考えることができる.

定義 1.3. $\mathbb{P}$ が *strategically closed* であるとは, $G(\mathbb{P})$ において II が必勝法をもつときにいう.

命題 1.4.
(1) σ-closed な半順序集合は strategically closed である.
(2) strategically closed な半順序集合は proper である.

σ-Baire で proper でない半順序集合は存在するので, strategic closure は σ-Baire より真に強い性質であることがわかる.

Foreman [F] はこのゲームを拡張してさらに強い strategic closure property を考察した. 以下, 記法の都合上, 0 は極限順序数ではなく後続順序数とみなす.

本稿の作成にあたって御助言下さった北見工業大学の渕野 昌氏に感謝致します.

Typeset by $\mathcal{A}_{\mathcal{M}}\mathcal{S}$-TEX

定義 1.5. 半順序集合 $\mathbb{P}$ と順序数 $\alpha > \omega$ に対して, 次のような二人ゲームを $G^{\mathrm{I}}_{\alpha}(\mathbb{P})$ で表す: $G(\mathbb{P})$ と同じように, I, II が交互に $\mathbb{P}$ のより小さい元を選んでゆく. 双方が ω 回の指し手を終えた後, もし a_n $(n < \omega)$ 全部よりも小さい $\mathbb{P}$ の元がとれなければ即座に II の負けとする. とれるなら I はそのような元 a_ω を選び, II は $b_\omega \leq_{\mathbb{P}} a_\omega$ を選び, などとゲームは続く. 他の limit stage でも同様にする. II は α 回手を指すことができれば勝ち (α 手目が指せなくてもよい), それ以外のときは I の勝ちとする.

$\mathrm{G}^{\mathrm{II}}_{\alpha}(\mathbb{P})$ は limit stage で II が先に手を指す点以外は上と同じであるようなゲームを表す.

$$\begin{array}{llcccccccc}
\underline{G^{\mathrm{I}}_{\alpha}(\mathbb{P})} & \mathrm{I} & : & a_0 & & a_1 & & \cdots\ a_\omega & & a_{\omega+1}\ \cdots \\
& \mathrm{II} & : & & b_0 & & b_1\ \cdots & & b_\omega & \cdots
\end{array}$$

$$\begin{array}{llcccccccc}
\underline{G^{\mathrm{II}}_{\alpha}(\mathbb{P})} & \mathrm{I} & : & a_0 & & a_1 & & \cdots & a_{\omega+1} & \cdots \\
& \mathrm{II} & : & & b_0 & & b_1\ \cdots\ b_\omega & & & b_{\omega+1}\ \cdots
\end{array}$$

明らかに, 一般には α が大きい程, また $G^{\mathrm{II}}_{\alpha}(\mathbb{P})$ より $G^{\mathrm{I}}_{\alpha}(\mathbb{P})$ の方が II にとっては勝つのが難しいゲームとなる.

定義 1.6. 半順序集合 $\mathbb{P}$ と順序数 $\alpha > \omega$ について, $\mathbb{P}$ が ***α-strategically closed*** (*resp.* ***strongly α-strategically closed***) であるとは, II が $G^{\mathrm{II}}_{\alpha}(\mathbb{P})$ (*resp.* $G^{\mathrm{I}}_{\alpha}(\mathbb{P})$) における必勝法をもつときにいう.

注意 *1.7.*

(1) $G^{\mathrm{I}}_{\omega+1}(\mathbb{P})$, $G^{\mathrm{II}}_{\omega+1}(\mathbb{P})$ はいずれも実質的には $G(\mathbb{P})$ と同じゲームである. よって strategically closed, $(\omega+1)$-strategically closed, strongly $(\omega+1)$-strategically closed は同値な概念である.

(2) これらの strategic closure property はいずれも separative な半順序集合に関する限り forcing equivalent のもとで不変である. separative でない半順序集合についてはこの限りでない. 例えば, $\mathbb{Q}$ を ω を自然数の順序の逆関係で順序付けたものとすると, 任意の半順序集合 $\mathbb{P}$ について $\mathbb{P}$ と $\mathbb{P} \times \mathbb{Q}$ とは forcing equivalent であるが, 明らかに $\mathbb{P} \times \mathbb{Q}$ は strategically closed でない.

問題 1.8. これら strategic closure property たちの強弱関係はどのようになっているか?

ある場合には, '短い'strategic closure が '長い' それを導くことがわかっている. たとえば, strategically closed な半順序集合は, 必ず $(\omega+\omega+1)$-strategically closed であることは容易にわかる. 少し考えると, (ω^2+1)-strategically closed であることもわかる.

一方, κ が正則基数のときは, 例えば

$$\mathrm{Fn}(\kappa, 2, \kappa) := \{p : \mathrm{dom}(p) \to 2 \mid \mathrm{dom}(p) \subseteq \kappa \wedge |\mathrm{dom}(p)| < \kappa\}(\text{逆包含順序})$$

は strongly κ-strategically closed だが $(\kappa+1)$-strategically closed ではないので, 長さ κ と $\kappa+1$ の closure には明白に違いがある.

そこで, 当面の興味は, κ が無限基数のとき, 長さ $(\kappa+1)$ から κ^+ までの closure にはどれだけギャップがあるか, ということに絞られる.

2. Directive Trees

この節では, '長い' 必勝法を構成するための鍵となる directive tree の概念を導入する.

定義 2.1. λ を順序数, κ を基数とする. tree $T = (\lambda, \prec)$ が (λ, κ)-*directive* であるとは, 次が成り立つときにいう:

(1) height$(T) \leq \kappa$, ただし height(T) は T の tree としての高さを表す,
(2) $\forall \alpha, \beta < \lambda[\alpha \prec \beta \Rightarrow \alpha < \beta]$,
(3) cf$\eta \leq \kappa$ であるようなどんな極限順序数 $\eta \leq \lambda$ に対しても, (最大元を持たない) T の枝 b が存在して, $\sup b = \eta$ となる.

(λ, κ)-directive tree T が**連続**であるとは, T のどの枝も順序数の列として連続であるときにいう.

補題 2.2(Ishiu). κ を無限基数とする.

(1) (κ^+, κ)-directive tree が存在するならば, 任意の strongly $(\kappa+1)$-strategically closed な半順序集合は strongly κ^+-strategically closed である.
(2) 連続な (κ^+, κ)-directive tree が存在するならば, 任意の $(\kappa+1)$-strategically closed な半順序集合は κ^+-strategically closed である.

(証明のスケッチ) (1) T を (κ^+, κ)-directive tree とし, σ を $G^{\mathrm{I}}_{\kappa+1}(\mathbb{P})$ における必勝法とする. $G^{\mathrm{I}}_{\kappa^+}(\mathbb{P})$ における必勝法 τ を構成する. $G^{\mathrm{I}}_{\kappa^+}(\mathbb{P})$ を, T の各枝の上で $G^{\mathrm{I}}_{\kappa+1}(\mathbb{P})$ がそれぞれ行われているように見立て, この各枝上のゲームに対して σ を用いる, というのが基本的なアイデアである. 正確には次のようにする: 各順序数 $\beta < \kappa^+$ に対し, $\langle \beta_\xi \mid \xi \leq \eta \rangle$ を $\beta = \beta_\eta$ であるような T のユニークな枝とする. 各 $\langle a_\gamma \mid \gamma \leq \beta \rangle \in {}^{\beta+1}\mathbb{P}$ に対し,

$$\tau(\langle a_\gamma \mid \gamma \leq \beta \rangle) := \sigma(\langle a_{\beta_\xi} \mid \xi \leq \eta \rangle)$$

と定義する.

τ が必勝法であることは, 直感的には σ が各枝上で勝つことから明らかなのだが, 正確には以下のように示される.

II が $G^{\mathrm{I}}_{\kappa^+}(\mathbb{P})$ で τ に沿って指しているとせよ. $\beta < \kappa^+$ についての帰納法で, II は β 番目の手を指すことができることを示そう. 帰納法の仮定により, 双方のプレーヤーは既に β 回ずつ手を指したものとしてよい.

β が後続順序数ならば, I は次の手 a_β を合法的に指すことができる. β が極限順序数であるとすると, 定義 2.1(3) より, (最大元をもたない) T の枝 b で $\sup b = \beta$ であるものが存在する. $\langle \beta'_\xi \mid \xi < \delta \rangle$ を b を昇順に並べたものとする (従って δ は極限順序数 $\leq \kappa$ である). 各 $\xi < \delta$ について, 我々の仮定より,

$$b_{\beta'_\xi} = \tau(\langle a_\gamma \mid \gamma \leq \beta'_\xi \rangle) = \sigma(\langle a_{\beta'_\zeta} \mid \zeta \leq \xi \rangle)$$

である. これより $\langle a_{\beta'_\xi}, b_{\beta'_\xi} \mid \xi < \delta \rangle$ は II がσ に沿って指したような $G^{\mathrm{I}}_{\kappa+1}(\mathbb{P})$ における一つの棋譜になっている. σ は $G^{\mathrm{I}}_{\kappa+1}(\mathbb{P})$ における必勝法なので, $\langle a_{\beta'_\xi} \mid \xi < \delta \rangle$ は $\mathbb{P}$ に共通拡大を持つ. 従って $\langle a_\gamma, b_\gamma \mid \gamma < \beta \rangle$ も共通拡大をもつ, なぜならこの列は $\leq_{\mathbb{P}}$-下降列で b は β と共終だからである. 以上より β が極限順序数の場合でも I は a_β を選ぶことができるとしてよい.

さて, $\langle \beta_\xi \mid \xi \leq \eta \rangle$ を $\beta_\eta = \beta$ なる T のユニークな枝とせよ. 上と同じ議論によって, $\langle a_{\beta_\xi}, b_{\beta_\xi} \mid \xi < \eta \rangle^\frown \langle a_\beta \rangle$ は II がσ に沿って指したような $G^{\mathrm{I}}_{\kappa+1}(\mathbb{P})$ における一つの棋譜になっている. よって σ の必勝性より

$$b_\beta = \tau(\langle a_\gamma \mid \gamma \leq \beta \rangle) = \sigma(\langle a_{\beta_\xi} \mid \xi \leq \eta \rangle) \leq a_{\beta_\eta} = a_\beta$$

である. これは II がβ 番目の手を合法的に指すことができることを意味しており, これで帰納法は完結した.

(2) 基本的なアイデアは (1) と同じであるので詳述しない. directive tree の連続性は, tree の各枝上で $G^{\mathrm{II}}_{\kappa+1}(\mathbb{P})$ を行っているとみなしてその必勝法を適用するとき, limit stage で得られる手が, もとの $G^{\mathrm{II}}_{\kappa^+}(\mathbb{P})$ における合法的な手になることを示すところで用いられる. □

次の補題は後で用いる.

補題 2.3. 任意の無限基数 λ に対して, (λ, ω)-directive tree が存在する.

(証明) λ についての帰納法で, (λ, ω)-directive tree $\langle \lambda, \prec \restriction \lambda \rangle$ を, 'グローバルな' tree $\langle \mathrm{Ord}, \prec \rangle$ の subtree として構成してゆく. $\lambda = \omega$ については, $\prec = <$ とおく. $\langle \omega, \prec \restriction \omega \rangle$ は明らかに (ω, ω)-directive である.

さて, $\langle \lambda, \prec \restriction \lambda \rangle$ が既に定まって (λ, ω)-directive であるとしよう. これを拡張して λ^+ 上の tree を作る. $\alpha < \lambda^+$ に対し,

$$E_\alpha := \{\beta \in [\lambda\alpha, \lambda\alpha + \lambda) \mid \beta \text{ は偶数 }\},$$
$$O_\alpha := \{\beta \in [\lambda\alpha, \lambda\alpha + \lambda) \mid \beta \text{ は奇数 }\}$$

とおく. 構成は次のようにする:

(1) 各 $\alpha \in (0, \lambda^+)$ に対して, $\prec \restriction O_\alpha$ をλ と O_α の間の順序同型のもとで$\prec \restriction \lambda$ と同型になるように定める. 各 O_α は λ^+ 上に最終的にできあがる tree のうちで他の部分から独立となる.

(2) $\alpha < \lambda^+$ についての帰納法によって, $\langle \lambda, \prec \restriction \lambda \rangle$ を $S_\alpha = \lambda \cup \bigcup_{\gamma < \alpha} E_\gamma$ に次のように拡張する: $\langle S_\alpha, \prec \restriction S_\alpha \rangle$ が定義されているとせよ. 全単射 $g_\alpha : E_\alpha \to S_\alpha$ を固定し, 各 $\beta \in E_\alpha$ を $\prec$ の順で $g_\alpha(\beta)$ のすぐ次に来るようにする. これにより $\langle S_{\alpha+1} \prec \restriction S_{\alpha+1} \rangle$ が定まる. limit stage では, 単にそこまでの構成の和を考える.

さて $\langle \lambda^+, \prec \restriction \lambda^+ \rangle$ が (λ^+, ω)-directive であることを確かめよう. 新しく付け加わった順序数達のうち, 奇数は $\langle \lambda, \prec \restriction \lambda \rangle$ に同型な tree 達を作っており, 一方偶数はいずれも有限なレベルの元のすぐ次の元として付け加えられているので, $\langle \lambda^+, \prec \restriction \lambda^+ \rangle$ は高さ ω の tree である. 定義 2.1 の条件のうち (1) と (2) は明らかである. (3) が成り立つことを示そう. $\alpha < \lambda^+$ を $\mathrm{cf}(\alpha) = \omega$ なる順序数とせよ.

Case 1. α が $\lambda\omega$ の倍数でないとき

この場合, α は $\lambda\beta + \xi$ の形にかける. ここで$\xi \leq \lambda$, $\mathrm{cf}(\xi) = \omega$ である. λ と O_β との間の順序同型はξ に収束する強い意味で単調増加な順序数列を$\lambda\beta + \xi = \alpha$ に収束するそれに移すので, $\sup b = \alpha$ なる O_β の枝 b がとれる.

Case 2. α が $\lambda\omega$ の倍数であるとき.

$\langle \lambda\alpha_n \mid n < \omega \rangle$ を λ の倍数からなる強い意味で単調増加な順序数列で, α に収束するものとする. ここで, $\beta_0 = 0$, $\beta_{n+1} = {g_{\alpha_n}}^{-1}(\beta_n)$ とおく. すると, 各 $n < \omega$ に対し,

β_{n+1} は $\prec$ の順で β_n のすぐ次に来て, かつ $\lambda\alpha_n \leq \beta_{n+1} < \lambda\alpha_n + \lambda \leq \lambda\alpha_{n+1}$ が成り立つ. これより $b = \langle \beta_n \mid n < \omega \rangle$ は $\langle \lambda^+, \prec\restriction \lambda^+ \rangle$ の枝であり, α に収束している. これで, $\langle \lambda^+, \prec\restriction \lambda^+ \rangle$ が (λ^+, ω)-directive であることが示せた.

λ が極限基数の場合は, $\prec\restriction \lambda = \bigcup_{\delta<\lambda}(\prec\restriction \delta)$ とおく. 帰納法の仮定より $\langle \lambda, \prec\restriction \lambda \rangle$ が (λ, ω)-directive tree となるための条件はほとんど導かれる. $\mathrm{cf}\lambda = \omega$ の場合には λ に収束する枝の存在を示さねばならないが, これは上の Case 2 と同様にして示せる. □

3. 主定理

定義 3.1. κ を無限基数とする.

$\square_\kappa \Leftrightarrow$ 列 $\langle C_\alpha \mid \alpha < \kappa^+, \mathrm{Lim}(\alpha) \rangle$ が存在して,
各極限順序数 $\alpha < \kappa^+$ について, 次が成り立つ:
(i) C_α は α の club subset,
(ii) $\mathrm{o.t.}(C_\alpha) \leq \kappa$,
(iii) $\forall \beta \in \mathrm{l.p.}(C_\alpha)\ (C_\alpha \cap \beta = C_\beta)$,

$\square^*_\kappa \Leftrightarrow$ 列 $\langle \mathcal{C}_\alpha \mid \alpha < \kappa^+, \mathrm{Lim}(\alpha) \rangle$ が存在して,
各極限順序数 $\alpha < \kappa^+$ について, 次が成り立つ:
(i) $\mathcal{C}_\alpha \subseteq \mathcal{P}(\alpha)$,
(ii) $1 \leq |\mathcal{C}_\alpha| \leq \kappa$,
(iii) $\forall C \in \mathcal{C}_\alpha$ [C は α の club subset],
(iv) $\forall C \in \mathcal{C}_\alpha[\mathrm{o.t.}(C) \leq \kappa]$,
(v) $\forall C \in \mathcal{C}_\alpha \forall \beta \in \mathrm{l.p.}(C)(C \cap \beta \in \mathcal{C}_\beta)$,

$\mathrm{AP}_\kappa \Leftrightarrow$ 列 $\exists \langle C_\alpha \mid \alpha < \kappa^+ \rangle$ と $\kappa^+ \cap \mathrm{Lim}$ の club subset C が存在して,
各 $\alpha \in C$ について次が成り立つ:
(i) C_α は α の club subset,
(ii) $\mathrm{o.t.}(C_\alpha) = \mathrm{cf}\alpha$,
(iii) $\forall \beta < \alpha \exists \gamma < \alpha[C_\alpha \cap \beta = C_\gamma]$.

命題 3.2.
(1) $\square_\kappa \Rightarrow \square^*_\kappa \Rightarrow \mathrm{AP}_\kappa$, $\kappa^{<\kappa} = \kappa \Rightarrow \square^*_\kappa$,
(2) $\square_\omega$ は真である.

定理 3.3(Ishiu & Y–). κ を無限基数とする. 以下は互いに同値である:
(1) $\square_\kappa$.
(2) 連続な (κ^+, κ)-directive tree が存在する.
(3) 任意の半順序集合は, $(\kappa+1)$-strategically closed ならば κ^+-strategically closed でもある.

定理 3.4(Y–). κ を無限基数とする. 以下は互いに同値である:

(1) AP_κ.
(2) (κ^+,κ)-directive tree が存在する.
(3) 任意の半順序集合は, strongly $(\kappa+1)$-strategically closed ならば strongly κ^+-strategically closed でもある.

(定理 3.3 の証明のスケッチ) (2) $\Rightarrow$ (3) は補題 2.2(2) に他ならない. (3) $\Rightarrow$ (1) は次の結果から導かれる:

命題 3.5(Velleman[Vm]). $\mathbb{P}_{\square_\kappa}$ を $\square_\kappa$列を付加する自然な半順序集合とするとき, 以下の事が成り立つ.

(A) $\mathbb{P}_{\square_\kappa}$ は $(\kappa+1)$-strategically closed であり,
(B) $\mathbb{P}_{\square_\kappa}$ が κ^+-strategically closed ならば, $\square_\kappa$ が成り立つ.

そこで (1) $\Rightarrow$ (2) を示せばよい.

$\langle C_\alpha \mid \alpha<\kappa^+, \alpha \text{ is a limit}\rangle$ を$\square_\kappa$列とする. そこで, $\kappa^+\cap\mathrm{Lim}$ 上に二項関係 $\prec_0$ を次のように定義する:

$$\beta\prec_0\gamma \Leftrightarrow \beta<\gamma \text{ かつ } \beta\in \mathrm{l.p.}(C_\gamma).$$

定義の仕方から, 次のことが容易に示される.

(i) $\langle\kappa^+\cap\mathrm{Lim}\rangle$ は高さ $\leq\kappa$ の tree であり,
(ii) その枝はすべて連続であり,
(iii) $\mathrm{cf}\eta>\omega$ なる任意の $\eta<\kappa^+$ に対し, 最大元をもたない枝 b で $\sup b=\eta$ なるものがとれる.

そこで $\langle\kappa^+\cap\mathrm{Suc},\prec_1\rangle$ を, 補題 2.3 で存在が示されている (κ^+,ω)-directive tree を順序同型で引き写したものとすれば, $\langle\kappa^+,\prec_0\cup\prec_1\rangle$ は連続な (κ^+,κ)-directive tree であることが示せる. □ □

注意 *3.6.*

(a) Velleman は実際には, 定理 3.3 の (1) と σ-closed な半順序集合についての (3) が同値になることを示している.
(b) $\square_\omega$ は真なので, 任意の半順序集合は, $(\omega+1)$-strategically closed ならばω_1-strategically closed でもある. これは Foreman と Veličković もそれぞれ独立に得ていた結果である ([J2],[Vc] 参照).
(c) 任意の $\gamma<\kappa^+$ に対して, 長さ γ の '部分的な' $\square_\kappa$列はつねに存在するので, 上の証明と同じ議論で, 任意の $(\kappa+1)$-strategically closed な半順序集合は任意の $\gamma<\kappa^+$ に対してγ-strategically closed であることがいえる.

(定理 3.4 の証明のスケッチ) (2) $\Rightarrow$ (3) は補題 2.2(1) に他ならない. また, (3) $\Rightarrow$ (1) についても, 定理 3.3 の証明と同様に, 自然に AP_κ列を付加する半順序集合 $\mathbb{P}_{\mathrm{AP}_\kappa}$ を考えれば,

(1) $\mathbb{P}_{\mathrm{AP}_\kappa}$ は strongly $(\kappa+1)$-strategically closed であり,
(2) $\mathbb{P}_{\mathrm{AP}_\kappa}$ が strongly κ^+-strategically closed ならば, AP_κ が成り立つ,

ということが示せるのでよい.

そこで (1) $\Rightarrow$ (2) を示す. $\langle C_\alpha \mid \alpha<\kappa^+\rangle$ を AP_κ列とし, C をその witness とする. $\langle\alpha_\beta \mid \beta<\kappa^+\rangle$ で C を昇順に並べ挙げたものとする. 各 $\beta<\kappa^+$ に対し, $(\kappa\alpha_\beta,\kappa)$-directive tree $\mathcal{S}_\beta=\langle\kappa\alpha_\beta,\prec_{\mathcal{S}_\beta}\rangle$ を選んでおく.

θ を十分大きい正則基数とし, $\lhd$ を H_θ の整列とする. $\langle N_\beta \mid \beta < \kappa^+\rangle$ を次をみたすものとする:

(i) $\kappa + 1 \cup \{\langle C_\alpha \mid \alpha < \kappa^+\rangle, \langle \mathcal{S}_\beta \mid \beta < \kappa^+\rangle, C\} \subseteq N_0$,

(ii) $\forall \gamma, \beta < \kappa^+[\gamma < \beta \Rightarrow \langle N_\gamma, \lhd \upharpoonright N_\gamma\rangle \prec \langle N_\beta, \lhd \upharpoonright N_\beta\rangle \prec \langle H_\theta, \lhd\rangle]$,

(iii) $\forall \beta < \kappa^+[\langle\langle N_\gamma, \lhd \upharpoonright N_\gamma\rangle \mid \gamma < \beta\rangle \in N_\beta]$,

(iv) $\forall \beta < \kappa^+[|N_\beta| = \kappa]$.

(i) より, 各 $\beta < \kappa^+$ について $N_\beta \cap \kappa^+$ は順序数である. また (iii) より, 各 $\beta < \kappa^+$ について $\beta \in N_\beta$ である. (κ^+, κ)-directive tree $\mathcal{T} = \langle \kappa^+, \prec_{\mathcal{T}}\rangle$ を構成するため, $\beta < \kappa^+$ についての帰納法によって$\prec_{\mathcal{T}} \upharpoonright \kappa\alpha_\beta$ を, $\prec_{\mathcal{T}} \upharpoonright \kappa\alpha_\beta \in N_\beta$ が成り立つように定義したい.

(1) $\beta = 0$ については, $\prec_{\mathcal{T}} \upharpoonright \kappa\alpha_0 := \prec_{\mathcal{S}_0}$ とおく. $\prec_{\mathcal{T}} \upharpoonright \kappa\alpha_0 \in N_0$ は明らかである.

(2) $\prec_{\mathcal{T}} \upharpoonright \kappa\alpha_\beta \in N_\beta$ $(\beta < \kappa^+)$ であると仮定する.

$$\begin{aligned}
E_\beta &:= \{\xi \in [\kappa\alpha_\beta, \kappa\alpha_{\beta+1}) \mid \xi \text{ は偶数 }\},\\
O_\beta &:= \{\xi \in [\kappa\alpha_\beta, \kappa\alpha_{\beta+1}) \mid \xi \text{ は奇数 }\},\\
B_\beta &:= \{b \in N_\beta \mid b \text{ は } \langle \kappa\alpha_\beta, \prec_{\mathcal{T}} \upharpoonright \kappa\alpha_\beta\rangle \text{ の枝であって}, \mathrm{length}(b) < \kappa\}.
\end{aligned}$$

$\prec_{\mathcal{T}} \upharpoonright O_\beta$ は$\prec_{\mathcal{S}_{\beta+1}} \upharpoonright [\kappa\alpha_\beta, \kappa\alpha_{\beta+1})$ を順序同型によって引き写した tree とし, この部分は $\langle \kappa\alpha_{\beta+1}, \prec_{\mathcal{T}} \upharpoonright \kappa\alpha_{\beta+1}\rangle$ の他の部分から独立させておく.

(iv) より ($\alpha_0 > 0$ としてよいので) $|B_\beta| = \kappa$ である. そこで, f_β を $E_\beta \to B_\beta$ なる全単射のうち, $\lhd$最小のものとする. そして, 各 $\xi \in E_\beta$ を枝 $f_\beta(\xi)$ のすぐ次に来るものとして $\prec_{\mathcal{T}}$ を拡張する. $N_\beta \in N_{\beta+1}$ であるので, この構成は $N_{\beta+1}$ 内で実行できる. よって$\prec_{\mathcal{T}} \upharpoonright \kappa\alpha_{\beta+1} \in N_{\beta+1}$ が成り立つ.

(3) β が極限順序数のときは, 単に $\prec_{\mathcal{T}} \upharpoonright \kappa\alpha_\beta := \bigcup_{\gamma<\beta}(\prec_{\mathcal{T}} \upharpoonright \kappa\alpha_\gamma)$ とおく ($\langle \alpha_\beta \mid \beta < \kappa^+\rangle$ は順序数の連続な列であることに注意). (iii) より, ここまでの全構成は N_β 内で実行できる. よって$\prec_{\mathcal{T}} \upharpoonright \kappa\alpha_\beta \in N_\beta$ であり, 帰納的構成は完結している.

さて, 任意の極限順序数 $\xi < \kappa^+$ に対し, $\langle \kappa^+, \prec_{\mathcal{T}}\rangle$ には最大元をもたない枝 b で $\sup b = \xi$ なるものがとれることを示そう. $\kappa\alpha_\beta < \xi \leq \kappa\alpha_{\beta+1}$ なる$\beta < \kappa^+$ がとれる場合には, そのような枝は O_β 内にみつかる. そこで, ある極限順序数 β について, $\xi = \kappa\alpha_\beta$ と表せる場合を考えよう. $\langle \eta_i \mid i < \mathrm{cf}\beta\rangle$ を C_{α_β} を昇順に並べ挙げたものとする. 各極限順序数 $\lambda < \mathrm{cf}\beta$ に対し, $\gamma(\lambda) < \alpha_\beta$ を

$$C_{\alpha_\beta} \cap \eta_\lambda (= \{\eta_i \mid i < \lambda\}) = C_{\gamma(\lambda)}$$

が成り立つような最小の順序数と定義する.

$\xi < \alpha_\beta$ なので, $\overline{\beta}(\xi)$ を$\xi < \alpha_{\overline{\beta}(\xi)}$ であるような最小の順序数 $< \beta$ とする. $i < \mathrm{cf}\beta$ についての帰納法により, $\nu_i < \beta$ を次のように定義する:

$$\begin{cases}
\nu_0 & := \overline{\beta}(\eta_0),\\
\nu_{i+1} & := \max\{\nu_i + 1,\ \overline{\beta}(\eta_{i+1})\},\\
\nu_\lambda\ (\lambda : \mathrm{limit}) & := \max\{\sup_{i<\lambda} \nu_i,\ \overline{\beta}(\gamma(\lambda))\}.
\end{cases}$$

$\langle \nu_i \mid i < \mathrm{cf}\beta\rangle$ は順序数の増加列で, β に収束している.

さて, $\mathcal{T}$ の枝 $b = \langle \xi_i \mid i < \mathrm{cf}\beta\rangle$ を, 各 $i < \mathrm{cf}\beta$ について $b \upharpoonright i \in B_{\nu_i}$ が成り立つように定義しよう. まず $b \upharpoonright 0 \in B_{\nu_0}$ は明らかである.

$b \restriction i \in B_{\nu_i}$ とせよ. $\xi_i := (f_{\nu_i})^{-1}(b \restriction i)$ とおく. f_{ν_i} の定義より, $b \restriction (i+1) = (b \restriction i)^\frown\langle \xi_i \rangle$ は再び $\mathcal{T}$ の枝であり,

$$(*) \qquad \kappa\alpha_{\nu_i} \le \xi_i < \kappa\alpha_{\nu_i+1} \le \kappa\alpha_{\nu_{i+1}}$$

が成立している. $\nu_{i+1} \in N_{\nu_{i+1}}$ と (i) N 列の定義の (i) とより, $\kappa\alpha_{\nu_{i+1}} \in N_{\nu_{i+1}}$ であり, 従って$\xi_i \in \kappa\alpha_{\nu_{i+1}} \subseteq N_{\nu_{i+1}}$ である. このことと $N_{\nu_i} \subseteq N_{\nu_{i+1}}$ より $b \restriction (i+1) \in N_{\nu_{i+1}}$ であることがわかる.

帰納法を完結させるため, 任意の極限順序数 $\lambda < \mathrm{cf}\beta$ について $b \restriction \lambda \in N_{\nu_\lambda}$ であることを示さねばならない. モデル $\langle H_\theta, \lhd \rangle$ において, $b \restriction \lambda$ は λ, $\langle f_\gamma \mid \gamma < \sup_{i<\lambda} \nu_i \rangle$ 及び $\langle \nu_i \mid i < \lambda \rangle$ から定義されている. $\langle f_\gamma \mid \gamma < \sup_{i<\lambda} \nu_i \rangle$ は C と $\langle N_\gamma \mid \gamma < \sup_{i<\lambda} \nu_i \rangle$ から, $\langle \nu_i \mid i < \lambda \rangle$ は $\{\eta_i \mid i < \lambda\} = C_{\gamma(\lambda)}$, $\gamma \restriction \lambda$, 及び $\overline{\beta}$ からそれぞれ定義されている. $\gamma \restriction \lambda$ は $C_{\gamma(\lambda)}$ と列 $\langle C_\alpha \mid \alpha < \kappa^+ \rangle$ とから定義されている. $C_{\gamma(\lambda)}$ は $\langle C_\alpha \mid \alpha < \kappa^+ \rangle$ と $\gamma(\lambda)$ とから定義されている. $\overline{\beta}$ は C から定義されている. 結局, $b \restriction \lambda$ はλ, C, $\langle N_\gamma \mid \gamma < \sup_{i<\lambda} \nu_i \rangle$, $\langle C_\alpha \mid \alpha < \kappa^+ \rangle$ 及び $\gamma(\lambda)$ から定義されており, これらはすべて N_{ν_λ} に属していることがわかる. よって $b \restriction \lambda \in N_{\nu_\lambda}$ がいえた.

(*) がすべての $i < \mathrm{cf}\beta$ に対して成り立つので, $\sup b = \xi$ は明らかである. □

References

[F] M. Foreman, *Games played on boolean algebras*, J. of Symbolic Logic **48** (1983), 714-723.

[G] C. Gray, *Iterated forcing from the strategic point of view*, Ph.D. Thesis, University of California, Berkeley, (1980).

[I] 石宇 哲也, *Axiom A* とブール代数上のゲームについて, 修士論文, 早稲田大学, (1997).

[IY] T. Ishiu and Y. Yoshinobu, *Directive trees and games on posets*, to appear in Proc. Amer. Math. Soc.

[J1] T. Jech, *A game theoretic property of Boolean algebras*, Logic Colloquium '77 (A. Macintyre, L. Pacholski and J. Paris, eds.), North-Holland, Amsterdam, 1978, pp. 135-144.

[J2] T. Jech, *More game-theoretic properties of Boolean algebras*, Ann. Pure Appl. Logic **26** (1984), 11-29.

[Vc] B. Veličkovič, *Jensen's □ principles and the Novák number of partially ordered sets*, J. of Symbolic Logic **51** (1986), 47-58.

[Vm] D. Velleman, *On a generalization of Jensen's* $\square_\kappa$, *and strategic closure of partial orders*, J. of Symbolic Logic **48** (1983), 1046-1052.

[Y] Y. Yoshinobu, *Approachability and directive trees*, preprint.