数理解析研究所講究録 1206 巻 2001 年 134-143

双曲型空間の平均曲率 1 をもつ曲面の全曲率

山田光太郎　　九州大学

(YAMADA Kotaro, Kyushu University)

概要

ユークリッド空間の極小曲面の全曲率は，その曲面の性質を表す重要な不変量である．特に，全曲率は，Osserman の不等式とよばれる（一般的に 2 次元リーマン多様体に対して成り立つ Cohn-Vossen の不等式より強い）不等式を満していることが知られている．本稿では，それに対応する 3 次元双曲型空間の，平均曲率 1 をもつ曲面（CMC-1 曲面）の全曲率および双対全曲率の概念を紹介し，それらがみたすいくつかの性質を紹介する．

1 極小曲面の全曲率

ユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^3$ の向きづけ可能な極小曲面を，リーマン面 M から $\boldsymbol{R}^3$ への共形はめ込み $f\colon M \to \boldsymbol{R}^3$ によって実現しておく．すると，f は M 上の有理型関数 f と正則 1 次微分形式 ω によって，

$$f(z) = 2\,\mathrm{Re}\int_{z_0}^{z}\alpha, \qquad \alpha := \frac{1}{2}\left(1-g^2, \sqrt{-1}(1+g^2), 2g\right)\omega \tag{1.1}$$

と，平行移動の差を除いて表すことができる（Weierstrass 表現公式）．ただし，積分は M 上の基点 z_0 から $z \in M$ に向かう経路についてとるものとする．ここで，$g\colon M \to \boldsymbol{C}\cup\{\infty\}$ は，S^2 と $\boldsymbol{C}\cup\{\infty\}$ を立体射影で同一視することで，曲面のガウス写像と見なすことができる．式 (1.1) で与えられる極小曲面の第一基本形式，第二基本形式は，それぞれ

$$ds^2 = (1+g\bar{g})^2\omega\bar{\omega}, \qquad II = -Q - \overline{Q}, \qquad Q = \omega\, dg$$

と表すことができる．正則 2 次微分 Q はホップ微分とよばれている．さらに K をガウス曲率とすると，

$$d\sigma^2 := (-K)\,ds^2 = \frac{4\,dg\,d\bar{g}}{(1+g\bar{g})^2} \tag{1.2}$$

本稿は，2001 年 1 月 24 日から 26 日までの期間で開催された数理解析研究所研究集会「部分多様体の幾何学」での講演 “Total curvature of CMC-1 surfaces in H^3” の内容に加筆したものである．本稿の内容は，Wayne Rossman（神戸大学），梅原雅顕（広島大学）との共同研究の成果による．

は，ガウス写像 g による $\boldsymbol{C}\cup\{\infty\}$ 上の球面計量（定曲率 1 の計量）の引き戻しを与えている．関係式

$$d\sigma^2\cdot ds^2=4Q\cdot\overline{Q} \tag{1.3}$$

はガウスの方程式と同値である．(1.2) より，(1.1) で与えられる曲面 f の絶対全曲率は

(1.4)

$$\mathrm{TA}(f):=\int_M(-K)\,dA=g\text{ による }M\text{ の像の重複を数えた }S^2\text{ の中での面積}$$

となることがわかる．ただし，dA は計量 ds^2 から誘導される M の面積要素である．

以下，(1.1) で与えられる極小曲面は，完備かつ有限全曲率をもつ，と仮定する．このとき，次が成り立つ（たとえば Osserman [8] 参照）：

- リーマン面 M は，コンパクトリーマン面 $\overline{M}$ から有限個の点 $\{p_1,\ldots,p_n\}$ $(n\geq 1)$ をとり除いたものと共形同値である．除いた点 $p_1,\ldots,p_n$ は曲面のエンドとよばれる．
- ガウス写像 g は $\overline{M}$ 上の有理型関数に拡張される．
- ホップ微分 Q は $\overline{M}$ 上の有理型な 2 次微分に拡張される．

とくに，ガウス写像の有理性と (1.4) より，

$$\mathrm{TA}(f)=4\pi\deg g\in 4\pi\boldsymbol{Z} \tag{1.5}$$

となることがわかる．

一般に，有限な全曲率をもつ完備な 2 次元リーマン多様体 (M,ds^2) の全曲率は

$$\frac{1}{2\pi}\int_M(-K)\,dA\geq-\chi(M) \tag{1.6}$$

をみたす（Cohn-Vossen の不等式）ことが知られているが，とくに，完備極小曲面の場合は，さらに強い不等式が成立する：

定理 1.1 (Osserman [8, Theorem 9.3]). コンパクトリーマン面 $\overline{M}$ から $\{p_1,\ldots,p_n\}$ を取り除いたリーマン面 M から $\boldsymbol{R}^3$ への完備共形極小はめ込み $f\colon M\to\boldsymbol{R}^3$ の絶対全曲率は

$$\frac{1}{2\pi}\mathrm{TA}(f)=\frac{1}{2\pi}\int_M(-K)\,dA\geq-\chi(M)+n=-\chi(\overline{M})+2n$$

をみたす．ただし，$\chi(\cdot)$ はオイラー数を表す．

この定理の証明の概略を述べよう．重要なことは「1の次は2」ということである．

(1) Weierstrass 表現 (1.1) の α をとると，$ds^2 = \langle\alpha, \overline{\alpha}\rangle$ と書ける．ただし，$\langle\ ,\ \rangle$ は $\boldsymbol{R}^3$ のユークリッド内積の複素化である．したがって，完備性より α は各エンド p_j に極をもたなければならず，$\mathrm{ord}_{p_j}\alpha \leq -1$ が成り立つ．

(2) いま，$\mathrm{ord}_{p_j}\alpha = -1$ であるとして，p_j のまわりの局所座標 z を用いて

$$\alpha = \left[(\boldsymbol{a} + \sqrt{-1}\boldsymbol{b})\frac{1}{(z-p_j)} + \boldsymbol{c} + \ldots\right]dz \qquad (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \boldsymbol{R}^3)$$

と展開すると，関係式 $\langle\alpha, \alpha\rangle = 0$ より，$|\boldsymbol{a}| = |\boldsymbol{b}| \neq 0$, $\langle\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle = 0$ が成り立つが，このとき，$\mathrm{Re}\int\alpha$ は p_j の近傍で1価関数を与えない（留数が残ってしまう）．これは，f が M からのはめ込みを与えていることと矛盾する．したがって（1の次は2!）$\mathrm{ord}_{p_j}\alpha \leq -2$ である．

(3) いま，$\overline{M}$ 上の（特異点をもつ）計量 $d\tau^2$ が，点 p でオーダー μ をもつ，とは $d\tau^2$ が $c|z-p_j|^{2\mu}dz\,d\bar{z}$ $(c \neq 0)$ に漸近することとする．とくに $d\tau^2$ が p のまわりで非退化なリーマン計量を与えているなら $\mathrm{ord}_p d\tau^2 = 0$ である．すると，上に述べたことより，$\mathrm{ord}_{p_j} ds^2 \leq -2$ であることがわかる．また，(1.2) より $\mathrm{ord}_p d\sigma^2$ は g の p における分岐の位数に一致する．したがって，Riemann-Hurwicz の関係式と (1.3) を用いて

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\mathrm{TA}(f) = 2\deg g &= \chi(\overline{M}) + \sum(g\ \text{の分岐の位数}) = \chi(\overline{M}) + \sum_{p\in\overline{M}}\mathrm{ord}_p d\sigma^2 \\
&= \chi(\overline{M}) + \sum_{p\in\overline{M}}\left(\mathrm{ord}_p Q - \mathrm{ord}_p ds^2\right) \\
&= \chi(\overline{M}) + \sum_{p\in M}\left(\mathrm{ord}_p Q - \mathrm{ord}_p ds^2\right) + \sum_{j=1}^{n}\left(\mathrm{ord}_{p_j} Q - \mathrm{ord}_{p_j} ds^2\right) \\
&= \chi(\overline{M}) + \sum_{p\in\overline{M}}\mathrm{ord}_p Q - \sum_{j=1}^{n}\mathrm{ord}_{p_j} ds^2 \\
&\geq -\chi(\overline{M}) + 2n
\end{aligned}$$

を得る．最後の不等式は，Q がコンパクトリーマン面 $\overline{M}$ 上の有理型2次微分であることから，Q の位数の総和が $-2\chi(\overline{M})$ となることを用いた．

この証明を見ると，Osserman の不等式（定理1.1）の等号が成り立つのは，$\mathrm{ord}_{p_j} ds^2$ -2 がすべてのエンドに対して成り立つことが必要十分であることがわかる．この条件をよく調べれば，次が得られる：

定理 1.2 (Jorge-Meeks [4]). 極小曲面が Osserman の不等式（定理1.1）の等号をみたすための必要十分条件は，すべてのエンドが十分先では自己交叉をもたな

いことである．このことは，各エンドがカテノイドか平面に漸近することとと同値である．

これと同等の事実が [14] でも示されている．簡単な証明は，[6] の appendix を参照されたい．

注意 1.3. 高次元のユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^n$ $(n>3)$ の極小曲面（余次元 $n-2$）も，ワイエルストラス型の表現公式をもつ．この場合も定理1.1と同じ不等式が成立する（Chern-Osserman の不等式 [3]）．とくに，等号が成立するのは，各エンドが，ある $\boldsymbol{R}^n$ の3次元部分空間 $\boldsymbol{R}^3$ 内のカテノイドまたは平面に漸近することである [6].

さらに，一般に複素半単純リー群 G をそのコンパクト実型 H でわることによって得られる非コンパクト型対称空間 G/H 内の曲面で，ある種の正則性の仮定 —「右ガウス写像」が正則—をみたすものに対して，正則なデータから曲面を定める，ワイエルストラス型の表現公式が存在する [5]．とくに $G=\mathrm{SL}(2,\boldsymbol{C})$ の場合は，$G/H=\mathrm{SL}(2,\boldsymbol{C})/\mathrm{SU}(2)=H^3$ となって，次の節で述べる H^3 の CMC-1 曲面の Bryant 表現公式と一致する．また，たとえば持ち上げ（次節参照）が $\mathrm{SL}(n+1,\boldsymbol{C})$ の対角行列からなる部分群に値をもつ場合のみを考えるならば，$\boldsymbol{R}^n$ の極小曲面に対するワイエルストラス表現公式が得られる．

このような曲面に対して CMC-1 曲面に対して次節で定義するような，「双対絶対全曲率」とよばれる量が定義されるが，これは，Osserman 型の不等式をみたすことがわかる [5].

極小曲面の絶対全曲率は 4π の整数倍となるが，さらに Osserman の不等式より，与えられた全曲率をもつ極小曲面の位相型は有限通りしかない．このことから，小さい絶対全曲率をもつ極小曲面の分類は意味をもつ．絶対全曲率が 4π 以下の場合の分類は学部程度の演習問題である（分類結果は，平面，カテノイド，Enneper 曲面）が，8π 以下の分類が F. Lopez [7] によってなされている．

2　双曲型空間の平均曲率 1 をもつ曲面

2.1　準備と例

3次元双曲型空間 H^3，平均曲率1をもつ曲面（CMC-1曲面）は，$\boldsymbol{R}^3$ の極小曲面と類似の性質をもつ．とくに，Weierstrass 型の表現公式があることが知られている：リーマン面 M から定曲率 -1 の3次元双曲型空間 H^3 への共形はめ込み $f\colon M\to H^3$ の平均曲率が1ならば，M の普遍被覆 $\widetilde{M}$ から複素リー群 $\mathrm{SL}(2,\boldsymbol{C})$ への正則はめ込み $F\colon \widetilde{M}\to \mathrm{SL}(2,\boldsymbol{C})$ が存在して，

$$f=F{}^t\overline{F},\qquad F^{-1}dF=\begin{pmatrix} g & -g^2 \\ 1 & -g \end{pmatrix}\omega$$

をみたす．ただし，g は $\widetilde{M}$ 上の有理型関数，ω は $\widetilde{M}$ 上の正則 1 次微分形式である．ここで，

$$H^3 = \mathrm{SL}(2, \boldsymbol{C})/\,\mathrm{SU}(2) = \left\{a{}^t\bar{a} \mid a \in \mathrm{SL}(2, \boldsymbol{C})\right\}$$

と見なしている．f の第一基本形式，第二基本形式は極小曲面の場合と同様に，

$$ds^2 = (1 + g\bar{g})^2 \omega\bar{\omega}, \qquad II = -Q - \overline{Q} + ds^2, \qquad Q = \omega\, dg$$

と表すことができる．以下 F を曲面 f の持ち上げ，g を第 2 ガウス写像，Q をホップ微分とよぶ．

いま，はめ込み $f\colon M \to H^3$ のガウス曲率を K とすると $K \leq 0$ が成り立つので，絶対全曲率

$$\mathrm{TA}(f) := \int_M (-K)\, dA \in [0, +\infty]$$

は意味をもつ．ただし，dA は ds^2 から誘導される面積要素である．極小曲面の場合と同様に，$d\sigma^2 := (-K)\, ds^2$ は定曲率 1 の計量を与え，

$$d\sigma^2 := (-K)\, ds^2 = \frac{4\, dg\, d\bar{g}}{(1 + g\bar{g})^2}.$$

が成り立つ．

さらに，曲面上の点 $f(p)$ を出発して，平均曲率ベクトル（単位法線ベクトル）を初速にもつ測地線が，H^3 の理想境界 $\partial H^3 = \boldsymbol{C} \cup \{\infty\}$ に定める点を $G(p)$ とすると，$G\colon M \to \boldsymbol{C} \cup \{\infty\}$ は正則写像（すなわち，有理型関数）となる．これを双曲的ガウス写像とよぶ．持ち上げ $F = (F_{ij})_{i,j=1,2}$ を用いれば，

$$G = \frac{dF_{11}}{dF_{21}} = \frac{dF_{12}}{dF_{22}}$$

である．

持ち上げが F であるような CMC-1 はめ込み $f\colon M \to H^3$ に対して，F の逆行列に対応する CMC-1 はめ込み $f^{\#} := (F^{-1})({}^t\overline{F^{-1}})\colon \widetilde{M} \to H^3$ が考えられる．これをもとの曲面 f の双対とよぶ [19]．f の双曲的ガウス写像，第 2 ガウス写像，ホップ微分をそれぞれ G, g, Q とすれば，$f^{\#}$ の双曲的ガウス写像，第 2 ガウス写像，ホップ微分は，それぞれ $g, G, -Q$ で与えられる．はめ込み $f^{\#}$ 自体は一般に M の普遍被覆 $\widetilde{M}$ 上でしか定義されないが，第一基本形式 $ds^{2\#} = (1 + G\overline{G})^2 |Q/dG|^2$ は M 上 1 価であるから，そのガウス曲も $K^{\#}$ も M 上 1 価な関数となる．したがって，

$$\mathrm{TA}(f^{\#}) := \int_M (-K^{\#})\, dA^{\#}$$

により，双対絶対全曲率を定義することができる．

極小曲面の場合と同様，絶対全曲率 $\mathrm{TA}(f)$ は，第 2 ガウス写像の像の球面上での面積を表すのに対し，$\mathrm{TA}(f^{\#})$ は双曲的ガウス写像の像の面積を表している．

例 2.1 (Horosphere). 持ち上げ F が

$$F(z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ az & 1 \end{pmatrix} : \boldsymbol{C} \to \mathrm{SL}(2, \boldsymbol{C}) \qquad (a \in \boldsymbol{C} \setminus \{0\})$$

で与えられる CMC-1 はめ込み $f = F{}^t\overline{F} \colon \boldsymbol{C} \to H^3$ を horosphere という．これは完備平坦な CMC-1 曲面で，とくに $\mathrm{TA}(f) = 0$ となる．

例 2.2 (Enneper's cousin [1]). データ $g = z, \omega = a\,dz$ ($a \in \boldsymbol{C} \setminus \{0\}$) で与えられる CMC-1 はめ込み $f \colon \boldsymbol{C} \to H^3$ を Enneper's cousin とよぶ．この名前は，同じデータから Weierstrass 表現 (1.1) によって得られる極小曲面が Enneper 曲面であることによる．とくに，g は1対1で，その像は球面から1点を除いたものなので, $\mathrm{TA}(f) = 4\pi$ である．また，双曲的ガウス写像は $G = a^{-1}\tanh z$ で与えられれ，∞ に真性特異点をもつから，$\mathrm{TA}(f^{\#}) = \infty$ である．

この曲面の双対は，絶対全曲率が ∞ かつ，双対絶対全曲率が 4π であるような曲面となる．

例 2.3 (Catenoid cousin [1]). 正の数 l と，l に等しくない正の整数 δ に対して，

$$F = \sqrt{\frac{\delta^2 - l^2}{\delta}} \begin{pmatrix} \dfrac{1}{l - \delta} z^{(\delta - l)/2} & \dfrac{\delta - l}{4l} z^{(\delta + l)/2} \\ \dfrac{1}{l + \delta} z^{-(\delta + l)/2} & \dfrac{-(\delta + l)}{4l} z^{(l - \delta)/2} \end{pmatrix} \tag{2.1}$$

とすると，$f = F{}^t\overline{F}$ は $\boldsymbol{C} \setminus \{0\}$ から H^3 への完備な CMC-1 はめ込みで，

$$g = \frac{\delta^2 - l^2}{4l} z^l, \qquad Q = \frac{\delta^2 - l^2}{4z^2}\, dz^2, \qquad G = z^\delta$$

となる．とくに $\delta = 1$ のとき，この曲面は catenoid cousin [1] とよばれる回転面である．また，$\delta \geq 2$ のときは，曲面はある catenoid cousin の δ 重被覆となる．

ここで，l が整数でないときは，F，g は $M := C \setminus \{0\}$ 上で1価でなく，その普遍被覆上でのみ意味をもつ．一方，G はその定義から M 上の有理型関数である．

この曲面の絶対全曲率は $\mathrm{TA}(f) = 4\pi l$, 双対絶対全曲率は $\mathrm{TA}(f^{\#}) = 4\pi\delta$ である．

例 2.4 (Warped catenoid cousin [15, 11, 12, 13]). とくに l が正の整数のとき，(2.1) の F に対して，

$$F_b := F \begin{pmatrix} 1 & -b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (b > 0)$$

とおく．すると，$f_b := F_b{}^t\overline{F_b} \colon \boldsymbol{C} \setminus \{0\} \to H^3$ は，例 2.3 と合同でない CMC-1 曲面を与える．とくに，

$$g = \frac{\delta^2 - l^2}{4l} z^l + b, \qquad Q = \frac{\delta^2 - l^2}{4z^2}\, dz^2, \qquad G = z^\delta$$

である．この曲面を warped catenoid cousin とよぶ．

2.2 全曲率

以下，$f\colon M \to H^3$ をリーマン面 M から H^3 への共形的な CMC-1 はめ込み，ds^2 をその第一基本形式とする．双対曲面 $f^\#$ から定まる M の計量を $ds^{2\#}$ とすると，

補題 2.5 ([19, 21]). 計量 ds^2 が完備であることと $ds^{2\#}$ が完備であることは同値である．

以下，ds^2 は完備とする．このとき，$\mathrm{TA}(f) < \infty$ または $\mathrm{TA}(f^\#) < \infty$ ならば，次が成り立つ [1]：

- リーマン面 M は，コンパクトリーマン面 $\overline{M}$ から有限個の点 $\{p_1, \ldots, p_n\}$ $(n \geq 1)$ をとり除いたものと共形同値である．除いた点 $p_1, \ldots, p_n$ は曲面のエンドとよばれる．
- ホップ微分 Q は $\overline{M}$ 上の有理型な2次微分に拡張される．
- とくに，$\mathrm{TA}(f) < \infty$ なら計量 $d\sigma^2 = (-K)ds^2$ は，$\overline{M}$ 上の錐的特異点をもつ計量に拡張される．したがって，エンド p_j の近くで $d\sigma^2$ は $|z-p_j|^{2\mu_j} dz\, d\bar{z}$ $(\mu_j > -1)$ に漸近する．
- $\mathrm{TA}(f^\#) < \infty$ なら，双曲的ガウス写像 G は $\overline{M}$ 上の有理型関数である．

計量 ds^2 が完備ならば，各エンド p_j で $\mathrm{ord}_{p_j} ds^2 \leq -1$ がいえるが，CMC-1 曲面の場合は，さらに $\mathrm{ord}_{p_j} ds^2 = -1$ とはなり得ないことを示すことができる．$\boldsymbol{R}^3$ の極小曲面の場合は ds^2 のオーダーが整数であるので，このことから Osserman の不等式が従うことをすでに見たが，CMC-1 曲面の場合は g の1価性がいえないことから，計量のオーダーが非整数値をとりうる．したがって，$\mathrm{ord}_{p_j} ds^2 < -1$ から得られる結論は次のようになる．

定理 2.6 ([15]). H^3 の 完備な CMC-1 曲面の絶対全曲率は Cohn-Vossen 不等式(1.6) の等号をみたさない：

$$\frac{1}{2\pi}\int_M (-K)\, dA > -\chi(M).$$

一方，双曲型ガウス写像は M 上1価な正則関数であるから，$\mathrm{TA}(f^\#)$ は 4π の整数倍の値をとり，Osserman 型の不等式をみたす：

定理 2.7 ([19, 2]). H^3 の 完備な CMC-1 曲面の双対絶対全曲率は

$$\frac{1}{2\pi}\int_M (-K^\#)\, dA^\# \geq -\chi(M) + n = -\chi(\overline{M}) + 2n$$

をみたす．さらに，等号が成り立つための必要十分条件は，すべてのエンドが十分先では自己交叉をもたないことである[1]．

[1][19] では，等号条件が，すべてのエンドが正則（すなわち，双曲的ガウス写像がその点に真性

2.3 全曲率が小さい曲面の分類

定理 2.6 と 2.7 により，絶対全曲率または双対絶対全曲率がある値で上から押さえられていれば，その曲面の位相型の可能性は有限個であるので，これらの全曲率が小さい CMC-1 曲面の分類をすることは意味がある．とくに，(双対）絶対全曲率が 4π 以下の場合は，次のように完全な分類ができる．

定理 2.8 (Rossman-Umehara-Yamada [11]). 完備 CMC-1 はめ込み $f\colon M \to H^3$ の双対絶対全曲率が $\mathrm{TA}(f^{\#}) \leq 4\pi$ をみたしているならば，f は次のいずれかに合同である：

- Horosphere ($\mathrm{TA}(f^{\#}) = \mathrm{TA}(f) = 0$).
- Enneper's cousin （例 2.2）の双対 ($\mathrm{TA}(f^{\#}) = 4\pi$).
- Catenoid cousin （例 2.3 のうち $\delta = 1$ であるもの） ($\mathrm{TA}(f^{\#}) = 4\pi$).
- Warped catenoid cousin （例 2.4） のうち $\delta = 1$ であるもの ($\mathrm{TA}(f^{\#}) = 4\pi$).

定理 2.9 (Rossman-Umehara-Yamada [12]). 完備 CMC-1 はめ込み $f\colon M \to H^3$ の絶対全曲率が $\mathrm{TA}(f) \leq 4\pi$ をみたしているならば，f は次のいずれかに合同である：

- Horosphere ($\mathrm{TA}(f) = 0$).
- Enneper's cousin （例 2.2） ($\mathrm{TA}(f) = 4\pi$).
- Catenoid cousin（例 2.3 のうち $\delta = 1$ であるもの）で $l < 1$ のもの ($\mathrm{TA}(f) = 4\pi l$).
- 例 2.3 のうち $l/\delta < 1$ であるもの ($\mathrm{TA}(f) = 4\pi l/\delta$).
- Warped catenoid cousin （例 2.4） のうち $l = 1$ であるもの ($\mathrm{TA}(f) = 4\pi$).

極小曲面の場合，$\mathrm{TA}(f) \leq 4\pi$ の場合の分類は簡単な演習問題であったが，CMC-1 曲面の場合，とくに $\mathrm{TA}(f) \leq 4\pi$ の場合（定理 2.9）は自明な結果ではない．実際，絶対全曲率については Osserman の不等式は成立しないので，定理 2.6 から曲面の種数 γ とエンドの数 n の組合わせは $(\gamma, n) = (0,1), (0,2), (0,3), (1,1)$ のいずれかになる．(極小曲面の場合，Osserman の不等式から，可能性は $(\gamma, n) = (0,1), (0,2)$ のいずれかである.）このうち，$(0,3)$ の場合と $(1,1)$ の場合が存在しない，ということが定理 2.6 の本質的な部分である．

さらに，[11] では $\mathrm{TA}(f^{\#}) \leq 8\pi$ の場合，[13] では $\mathrm{TA}(f) \leq 8\pi$ の場合の部分的な分類が行われている．

特異点をもたない）かつ十分先で真性特異点もたないことと同値であることを示したが，[2] の結果から，非正則なエンド，すなわち双曲的ガウス写像が真性特異点をもつようなエンドは embedded にならないことが示されたので，等号条件はここで述べた形になる．

2.4 Cohn-Vossen 不等式より強い不等式

Catenoid cousin は種数 0 かつ 2 つのエンドをもつ完備 CMC-1 曲面であるから，$\chi(M) = 0$ となる．この曲面の絶対全曲率は $2\pi l$ であり，$l \to 0$ のとき 0 に近づくから，Cohn-Vossen の不等式（定理 2.6）は最良であることがわかる．

一方，種数 0 かつ 3 つのエンドをもつ完備 CMC-1 曲面の絶対全曲率は，定理 2.6 より

$$\frac{1}{2\pi}\int_M (-K)\, dA \geq 1$$

をみたす．ところが，定理 2.9 から，$\mathrm{TA}(f) \leq 4\pi$ なる曲面で，種数 0 で 3 つのエンドを持つものは存在しない．したがって，

$$\frac{1}{2\pi}\int_M (-K)\, dA > 2 \qquad (\text{種数 } 0 \text{ で } 3 \text{ つのエンドをもつとき}) \tag{2.2}$$

が成り立つ．すなわち，この場合は Cohn-Vossen の不等式は最良ではない．

この事実の一般化として，次のことが成り立つ：

定理 2.10 (Rossman-Umehara-Yamada [12]). 種数 0，エンドの数が $2m+1$ $(m = 1, 2, \ldots)$ の完備 CMC-1 曲面の絶対全曲率は

$$\frac{1}{2\pi}\int_M (-K)\, dA \geq 2m$$

をみたす．

注意 2.11. さきに見たように，エンドの数が 2 の場合は Cohn-Vossen 不等式が最良である．また，エンドの数が 4 の場合は，数値計算により，Cohn-Vossen の不等式の下限に十分近い絶対全曲率をもつ曲面が存在することがわかる [13].

参考文献

[1] R. Bryant, *Surfaces of mean curvature one in hyperbolic space*, Astérisque **154–155** (1987), 321–347.

[2] P. Collin, L. Hauswirth and H. Rosenberg, *The geometry of finite topology Bryant surfaces*, to appear in Ann. of Math.

[3] S. Chern and R. Osserman, *Complete minimal surface in Euclidean n-space*, J. Analyse Math., **19** (1967) 15–34.

[4] L. P. M. Jorge and W. H. Meeks III, *The topology of complete minimal surfaces of finite total curvature*, Topology, **22** (1983), 203–221.

[5] M. Kokubu, M. Takahashi, M. Umehara and K. Yamada, *An analogue of minimal surface theory in* $\mathrm{SL}(n, \boldsymbol{C})/\mathrm{SU}(n)$, preprint, math.DG/0008016.

[6] M. Kokubu, M. Umehara and K. Yamada, *Minimal surfaces that attain equality in the Chern-Osserman inequality*, preprint, math.DG/0102037.

[7] F. J. Lopez, *The classification of complete minimal surfaces with total curvature greater than* -12π, Trans. Amer. Math. Soc. **334** (1992), 49–74.

[8] R. Osserman, A SURVEY OF MINIMAL SURFACES, 2nd ed., Dover, 1986.

[9] W. Rossman, M. Umehara and K. Yamada, *Irreducible constant mean curvature* 1 *surfaces in hyperbolic space with positive genus*, Tôhoku Math. J. **49** (1997), 449–484.

[10] W. Rossman, M. Umehara and K. Yamada, *A new flux for mean curvature* 1 *surfaces in hyperbolic* 3*-space, and applications*, Proc. Amer. Math. Soc. **127** (1999), 2147–2154.

[11] W. Rossman, M. Umehara and K. Yamada, *Mean curvature* 1 *surfaces in hyperbolic* 3*-space with low total curvature I*, preprint, math.DG/0008015.

[12] W. Rossman, M. Umehara and K. Yamada, *Mean curvature* 1 *surfaces in hyperbolic* 3*-space with low total curvature II*, preprint, math.DG/0102035.

[13] W. Rossman, M. Umehara and K. Yamada, *Period problems for mean curvature one surfaces in* H^3 (*with application to surfaces of low total curvature*), preprint, math.DG/0102185.

[14] R. Schoen, *Uniqueness, symmetry and embeddedness of minimal surfaces,* J. Differential Geometry, **18** (1983), 791–809.

[15] M. Umehara and K. Yamada, *Complete surfaces of constant mean curvature*-1 *in the hyperbolic* 3*-space*, Ann. of Math. **137** (1993), 611–638.

[16] M. Umehara and K. Yamada, *A parameterization of Weierstrass formulae and perturbation of some complete minimal surfaces of* $\boldsymbol{R}^3$ *into the hyperbolic* 3*-space*, J. reine u. angew. Math. **432** (1992), 93–116.

[17] M. Umehara and K. Yamada, *Surfaces of constant mean curvature-c in* $H^3(-c^2)$ *with prescribed hyperbolic Gauss map*, Math. Ann. **304** (1996), 203–224.

[18] M. Umehara and K. Yamada, *Another construction of a CMC*-1 *surface in* H^3, Kyungpook Math. J. **35** (1996), 831–849.

[19] M. Umehara and K. Yamada, *A duality on CMC*-1 *surface in the hyperbolic* 3*-space and a hyperbolic analogue of the Osserman Inequality*, Tsukuba J. Math. **21** (1997), 229–237.

[20] M. Umehara and K. Yamada, *Metrics of constant curvature one with three conical singularities on the* 2*-sphere*, Illinois J. Math. **44** (2000), 72–94.

[21] Z. Yu, *Value distribution of hyperbolic Gauss maps*, Proc. Amer. Math. Soc. **125** (1997), 2997–3001.

[22] Z. Yu, *The inverse surface and the Osserman Inequality*, Tsukuba J. Math. **22** (1998), 575–588.