

A construction of Lagrangian surfaces in the complex 2-space

筑波大学数学系 相山 玲子 (Reiko Aiyama)¹

Institute of Mathematics, University of Tsukuba

複素 2 次元空間 \mathbb{C}^2 内の Lagrangian 曲面について, Riemann 幾何の視点から研究するにあたって役立つと思われる, 具体例の構成法について述べる. ここで構成される Lagrangian 曲面は, 3 次元 Euclid 空間 \mathbb{R}^3 内の曲面論に例えれば回転面を含む螺旋曲面 (つまり, 平均曲率一定などの条件が常微分方程式に帰着される場合) に相当するもので, 実際に, 螺旋曲面を与える共形的是め込みの動標構を考えることによって \mathbb{C}^2 への Lagrangian 共形的是め込みを与えることができる. 最も簡単な Lagrangian 曲面の例である Lagrangian 平面はもちろん \mathbb{R}^3 内の平面に対応し, 球面 S^2 の \mathbb{C}^2 への Lagrangian はめ込みとして良く知られた Whitney 球面は \mathbb{R}^3 への全セイ的埋め込みである Euclid 球面に対応している. この '全セイ的曲面' における対応関係については, 第 2 基本形式の形などからその類似性が既に指摘されていた ([RU]). 本稿で述べる内容は, その対応関係を拡張し, さらにその対応の具体的な記述を与えたとも解釈できる.

\mathbb{R}^3 内の螺旋曲面を与える共形的是め込み $\varphi : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^3$ の Gauss 写像 $N : U \rightarrow S^2$ 及び平均曲率関数 $H = H(\operatorname{Re}(z))$ ($z \in U$) は, その動標構を通じて構成される Lagrangian 共形的是め込み $f : U \rightarrow \mathbb{C}^2 \cong \mathbb{R}^4$ の, generalized Gauss 写像 $\mathcal{G} = (\mathcal{G}_-, \mathcal{G}_+)$ の反自己双対部分 $\mathcal{G}_- : U \rightarrow S^2$ 及び Lagrangian 角度関数 $\beta = \beta(\operatorname{Re}(z)) : U \rightarrow \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ (つまり \mathcal{G} の自己双対部分 $\mathcal{G}_+ = e^{i\beta}$) に, それぞれ一致あるいは対応 ($H = -(1/2)\beta'$) している.

ところで, \mathbb{R}^3 内の曲面 M の平均曲率が一定であること (CMC) は, Gauss 写像 $N : M \rightarrow S^2$ が S^2 の標準計量 g_0 によって調和写像になると同値であることがよく知られている. 一方, Castro-Urbano [CU] は Lagrangian 曲面 M' の generalized Gauss 写像の反自己双対部分 $\mathcal{G}_- : M' \rightarrow (S^2, g_0)$ が調和写像になる場合は, Maslov 形式 $d\beta$ が共形的であること (CMF) と同値であることを示し, CMF Lagrangian トーラスを分類した. CMF という条件はある常微分方程式 (sinh-Gordon 方程式) に帰着され, 彼等はその任意の解に応じて CMF Lagrangian トーラスの 1 変数族が存在することを示している. 本稿の最後 (第 4 節) では, Deluney 曲面 (すなわち CMC 回転面) 及び CMC 螺旋曲面から構成される Lagrangian 曲面が CMF Lagrangian トーラスの具体的なはめ込みを与えていることを述べる. 例

¹e-mail address: aiyama@sakura.cc.tsukuba.ac.jp

えば（前記の全セイ的曲面以外の）最も簡単な場合として、円柱に回転面としてのはめ込み写像を与えると、その動標構を通じて (Lagrangian である) Clifford トーラス $S^1(1/\sqrt{2}) \times S^1(1/\sqrt{2}) \subset S^3 \subset \mathbb{C}^2$ が対応する。

なお、 $\mathcal{G}_+ = e^{i\beta} : M' \rightarrow (S^1 \subset S^2, g_0)$ が調和写像となる Lagrangian 曲面 M' は、Hamiltonian stationary な場合であり、そのようなトーラスは最近の Hélein-Romon [HR1] の研究に詳しく調べられている。 $\mathcal{G} = (\mathcal{G}_-, \mathcal{G}_+) : M' \rightarrow S^2 \times S^2$ が調和写像であるのは、平均曲率ベクトルが平行な場合であることもよく知られている事実である。

本稿の第1節では、 \mathbb{C}^2 内の任意の Lagrangian 曲面に対して、Lagrangian 角度の定義及び generalized Gauss 写像について復習し、「与えられた Lagrangian 角度をもつ Lagrangian 曲面のはめ込みは、ある Dirac 型方程式の解の代数的な組み合わせとして表される」という [A1](cf. [A2]) で得られた公式を紹介する²。この Dirac 型方程式と、 \mathbb{R}^3 内の曲面の Weierstrass-Kenmotsu-Konopelchenko 表現公式³の可積分条件が同じになる特殊な場合があることから、本稿に述べるところの Lagrangian 曲面の構成法に思い至った。第2節では、 \mathbb{R}^3 内の曲面のこの可積分条件が、その適当な動標構 (adapted framing) を用いてどのように表されていたかを復習し、adapted framing が Lagrangian 曲面を与える場合があることをみる。第3節で、実際に螺旋曲面の adapted framing から構成される Lagrangian はめ込みを書き下す。この結果は、同じ Lagrangian 角度をもつ Lagrangian 共形的是め込みに1変数族が存在する場合があることも示している。

1 Representation formula for Lagrangian surfaces in \mathbb{C}^2

\mathbb{C}^2 を Euclid 4次元空間 $(\mathbb{R}^4, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ で標準的複素構造 $J(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-x_3, -x_4, x_1, x_2)$ を持つものとする。すなわち、 \mathbb{C}^2 の複素座標系を $(x_1^{\mathbb{C}}, x_2^{\mathbb{C}}) = (x_1 + ix_3, x_2 + ix_4)$ と表す。

M を Riemann 面とし、 $f = (f_1^{\mathbb{C}}, f_2^{\mathbb{C}}) : M \rightarrow \mathbb{C}^2$ を Lagrangian 共形的是め込みとする。

各接空間 f_*T_pM の向き付けられた正規直交基底を $\{e_1, e_2\}$ と与えておく。 e_1, e_2 を \mathbb{C}^2 の複素列ベクトルとみて、 $|\det(e_1, e_2)| = 1$ を得る。よって、 $e_1^{\mathbb{C}} = (1, 0), e_2^{\mathbb{C}} =$

²ここで紹介する公式は、曲面上の一価なデータ (Dirac 型方程式の解) に対しては必ずその曲面から \mathbb{C}^2 への一価なはめ込みを対応させることができると言うもので、その意味で Weierstrass 型の表現公式とは異なるものである。

³例えば、[KT] を参照されたい。

$(0, 1) \in \mathbb{C}^2$ とすると, 各点 $p \in M$ で

$$e_1 \wedge e_2 = e^{i\beta(p)} e_1^{\mathbb{C}} \wedge e_2^{\mathbb{C}}$$

となるように関数 $\beta : M \rightarrow \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ を定めることができる. この β を f の Lagrangian 角度と呼ぶ.

一方, この $e_1, e_2 \in f_*T_pM$ を \mathbb{R}^4 の実ベクトルとみて, 実ウエッジ積の正規化を $\mathcal{G}(p) = [e_1 \wedge e_2]$ と置くと, \mathcal{G} は f に対する generalized Gauss 写像を定めている. 実ウエッジ積空間 $\wedge^2(\mathbb{R}^4)$ が自己双対空間 $\wedge_+^2(\cong \mathbb{R}^3)$ と反自己双対空間 $\wedge_-^2(\cong \mathbb{R}^3)$ に直和分解されることから, $\mathcal{G}(p)$ は自己双対部分 $\mathcal{G}_+(p) = [(e_1 \wedge e_2)^+]$ と反自己双対部分 $\mathcal{G}_-(p) = [(e_1 \wedge e_2)^-]$ に分解され, generalized Gauss 写像 \mathcal{G} は 2つの単位 2次元球面 S^2 への写像の組

$$\mathcal{G} = (\mathcal{G}_-, \mathcal{G}_+) : M \rightarrow S^2 \times S^2$$

と見なされる. さらに, f が Lagrangian であることは, 自己双対部分 \mathcal{G}_+ の像が S^2 の赤道上に含まれることを意味する. S^2 の立体正射影によって, \mathcal{G}_+ は, Lagrangian 角度 β を用いて,

$$\mathcal{G}_+ = e^{i\beta} : M \rightarrow S^1 \subset \mathbb{C} \cup \{\infty\} \cong S^2,$$

と表されている.

さて, $F = (F_1, F_2) : M \rightarrow \mathbb{C}^2$ を

$$\begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{-i\beta/2} & ie^{i\beta/2} \\ ie^{-i\beta/2} & e^{i\beta/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1^{\mathbb{C}} \\ f_2^{\mathbb{C}} \end{pmatrix}$$

と定めると, F は次の Dirac 型方程式を満たしている.

$$\begin{pmatrix} 0 & \partial_z \\ -\partial_{\bar{z}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \beta_z & 0 \\ 0 & \beta_{\bar{z}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix}. \quad (1.1)$$

ここで, z は M 上 (局所的に⁴) 定義されている等温座標とする.

また, $S = (S_1, S_2) : M \rightarrow \mathbb{C}^2$ を

$$\begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} 0 & \partial_z \\ -\partial_{\bar{z}} & 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \beta_z & 0 \\ 0 & \beta_{\bar{z}} \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} \quad (1.2)$$

と定める. このとき, f による M 上の誘導計量は

$$f^* ds^2 = (|S_1|^2 + |S_2|^2) |dz|^2.$$

⁴方程式 (1.1) は等温座標系の取り方によらない.

Generalized Gauss 写像の反自己双対部分 $\mathcal{G}_- : M \rightarrow S^2$ は, S^2 を複素 1 次元射影空間 CP^1 と見なしたとき斉次座標によって,

$$\mathcal{G}_- = [S_1; S_2] : M \rightarrow CP^1 \cong S^2$$

と表すことができる⁵. さらに, S も (1.1) とよく似た次の Dirac 型方程式を満たしている.

$$\begin{pmatrix} 0 & \partial \\ -\bar{\partial} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_1 \\ \bar{S}_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\beta_{\bar{z}} & 0 \\ 0 & -\beta_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_1 \\ \bar{S}_2 \end{pmatrix}. \quad (1.3)$$

この方程式 (1.3) は次の方程式の可積分条件である.

$$df = (1/\sqrt{2})e^{i\beta/2}\{(-S_2, S_1)dz - i(\bar{S}_1, \bar{S}_2)d\bar{z}\}.$$

この方程式の解としての Lagrangian immersion f の定式化は, Hélein-Romon [HR2] の与えた C^2 内の Lagrangian 曲面の Weierstrass 型表現公式⁶ にあたるものである. それに対して, 論文 [A1, A2] では, C^2 内の Lagrangian 曲面は Dirac 型方程式 (1.1) の解自身によって表現されることを示している⁷. つまり, 次のようにして Lagrangian 曲面片を得ることができる.

定理 1. U を複素平面 C 内の領域とする. U 上で定義された C^1 級関数 β に対して, $F = (F_1, F_2) : U \rightarrow C^2$ を Dirac 型方程式 (1.1) の 1 つの解とし, $S = (S_1, S_2) : M \rightarrow C^2$ を (1.2) のように定める. もし S が U 上いたるところで 0 でなければ,

$$f = (1/\sqrt{2})e^{i\beta/2}(F_1 - i\bar{F}_2, F_2 + i\bar{F}_1)$$

は Lagrangian 角度 $\beta \pmod{2\pi}$ の Lagrangian 共形的はめ込み $f : U \rightarrow C^2$ を定める.

Lagrangian 共形的はめ込み $f : M \rightarrow C^2$ の平均曲率ベクトル \vec{H} は Lagrangian 角度 β によって $\vec{H} = (1/2)J\nabla\beta$ と表される. よって, f が極小 Lagrangian 曲面を与えるのは β が一定であることと同値であり, さらに上記の写像 $F = (F_1, F_2) : M \rightarrow C^2$ が正則であることと同値である. このことは, 良く知られた次の結果を導く.

系 (Chen-Morvan [CM]). $C^2 \cong R^4$ 内の (向き付けられた) 極小 Lagrangian 曲面は, R^4 に適当な直交複素構造をとり直して, C^2 内の複素正則曲線とみなせる.

⁵写像 $S = (S_1, S_2) : M \rightarrow C^2$ は 'Gauss 写像' $\mathcal{G}_- : M \rightarrow S^2$ のスピン表現とみなすことができる. (例えば, [AA] を参照)

⁶ R^4 内の一般の曲面はその generalized Gauss 写像 $\mathcal{G} = (\mathcal{G}_-, \mathcal{G}_+)$ の両部分によって Weierstrass 型表現される ([K1], [KL]). [KL] において登場する, $\mathcal{G}_-, \mathcal{G}_+$ のスピン表現を用いて表された曲面の可積分条件は (1.1) や (1.3) と同種の Dirac 型方程式 (2.1) である.

⁷[A1] では Lagrangian よりも拡張された概念である総実曲面に対して表現公式を与えている.

2 Adapted framing of surfaces in \mathbb{R}^3

方程式 (1.1) (及び (1.3)) を含めて, ポテンシャル部分が一般に複素関数 $p = p(z, \bar{z})$ で与えられている Dirac 型方程式

$$\begin{pmatrix} 0 & \partial_z \\ -\partial_{\bar{z}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & \bar{p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{pmatrix}, \quad (2.1)$$

について一般に解を得ることは難しく思われる. しかし, $p = p(z, \bar{z})$ が実関数である場合のこの方程式 (2.1) は, 3次元 Euclid 空間 \mathbb{R}^3 内の曲面の Weierstrass-Kenmotsu-Konopelchenko 表現公式における可積分条件として現れることが知られている (cf. [KT]). 実際, Riemann 面 M から \mathbb{R}^3 への共形的はめ込み φ に対して, ポテンシャル p が実である Dirac 型方程式 (2.1) の解が φ の adapted framing として以下のように局所的に求められる.

\mathbb{C}^2 を特殊ユニタリ群 $SU(2)$ より生成される部分ベクトル空間 $\mathbb{R} \cdot SU(2)$ ($\subset \mathfrak{gl}(2; \mathbb{C})$) と次のように同一視しておく:

$$\mathbf{x} = (x_1^{\mathbb{C}}, x_2^{\mathbb{C}}) = (x_1 + ix_3, x_2 + ix_4) \mapsto \underline{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} x_1^{\mathbb{C}} & -\overline{x_2^{\mathbb{C}}} \\ x_2^{\mathbb{C}} & \overline{x_1^{\mathbb{C}}} \end{pmatrix}.$$

\mathbb{R}^3 を \mathbb{C}^2 内の $x_1 \equiv 0$ である実部分空間とみなし, $\mathbf{e}_2 = (0, 1)$, $\mathbf{e}_3 = (i, 0)$, $\mathbf{e}_4 = (0, i)$ は \mathbb{R}^3 の標準基底を表すものとする. $SU(2)$ の \mathbb{R}^3 への次の作用は, \mathbb{R}^3 の正規直交基底全体への推移的かつ等長的作用となる.

$$\mathbf{h} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{h} \underline{\mathbf{x}} \mathbf{h}^* \quad (\mathbf{h} \in SU(2), \mathbf{x} = (ix_3, x_2 + ix_4) \in \mathbb{R}^3 \subset \mathbb{C}^2).$$

$z = x + iy$ を M 上の等温座標とし, 共形的はめ込み $\varphi: M \rightarrow \mathbb{C}^2$ による誘導計量は $\varphi^* ds^2 = e^{2\lambda} |dz|^2$ と与えられているとする. また, N を φ に対する単位法ベクトル場とし, φ の Gauss 写像を $N: M \rightarrow S^2$ とする. このとき, M の各点の近傍 U 上で, 写像

$$\underline{\Phi} = \begin{pmatrix} \Phi_1 & -\overline{\Phi_2} \\ \Phi_2 & \overline{\Phi_1} \end{pmatrix} : U \rightarrow 2e^{\lambda/2} \cdot SU(2) \subset \mathbb{R} \cdot SU(2) (\cong \mathbb{C}^2) \text{ を}$$

$$\varphi_x = (1/4) \underline{\Phi} \cdot \mathbf{e}_4, \quad \varphi_y = (1/4) \underline{\Phi} \cdot \mathbf{e}_2, \quad N = (1/4) e^\lambda \underline{\Phi} \cdot \mathbf{e}_3$$

となるように定義することができる. この写像 $\underline{\Phi} = (\Phi_1, \Phi_2): U \rightarrow \mathbb{C}^2$ を φ の adapted framing と呼ぶことにする. φ の平均曲率を H_φ とすると, この adapted framing $\underline{\Phi}$ は, $p = -(1/2)e^\lambda H_\varphi$ である Dirac 型方程式 (2.1) を満たしている. また, その Dirac 型方程式が \mathbb{R}^3 内の曲面 φ の可積分条件になっている.

もし $e^\lambda H_\varphi$ が x にしかよらない関数とみなせるように等温座標 $z = x + iy$ がとれたとしたら, $\beta = \beta(x) = -2 \int (e^\lambda H_\varphi)(x) dx$, $F = \Phi$ とおいて, 定理 1 によって, (一般には退化点があるかもしれないが) Lagrangian 共形的是め込み $f: U \rightarrow \mathbb{C}^2$ で Lagrangian 角度 $\beta = \beta(x)$ をもつものが得られることになる.

一般に $e^\lambda H_\varphi$ が 1 変数関数と見なせる場合の全てを挙げることは著者にはまだわからないでいる. しかし, 少なくとも螺旋曲線については e^λ および H_φ のどちらも x のみの関数とみなせる等温座標 $z = x + iy$ がとれる.

3 Lagrangian surfaces constructed from helicoidal surfaces in \mathbb{R}^3

\mathbb{R}^3 内の螺旋曲面とは, 螺旋運動で不変な曲面であり, 局所的に

$$\varphi(r, \theta) = (\varphi_2, \varphi_3, \varphi_4) = (h(r) + h_0\theta, r \cos \theta, r \sin \theta)$$

と表すことができる. ここでは, x_2 軸のまわりのピッチ $h_0 \in \mathbb{R}$ の螺旋運動を考えている⁸. 螺旋曲面 φ を生成する関数 $h(r)$ は, 平均曲率 H_φ によって書き下すことが可能である. よって, φ の adapted framing もそこから書き下され, 前節に述べた方針に従って, Lagrangian 曲面が作れる. 以下にその結果をまとめておく. なお, 螺旋曲面についての記法・計算は [K2] を参考にした.

$\beta = \beta(s)$ を区間 I 上の C^1 級関数として与えておく.

$$U(s) = \int_0^s \sin \beta(u) du, \quad V(s) = \int_0^s \cos \beta(u) du$$

とおき, 複素数値関数 $(U + iV)(s)$ の極座標表示を $(r(s), 2\psi(s))$ とする (つまり, $U + iV = re^{2i\psi}$). また, $(\beta + 2\psi)(s) = \phi(s)$ と記す. 定数 h_0 に対して, 関数 $L_{h_0}(s), h_{h_0}(s)$ 及び $\theta_{h_0}(s, t)$ を次のように定める:

$$L_{h_0}(s) = \sqrt{r(s)^2 + h_0^2}, \quad h_{h_0}(s) = \int_0^s \frac{L_{h_0}(u)}{r(u)} \cos \phi(u) du$$

$$\theta_{h_0}(s, t) = t - h_0 \int_0^s \frac{\cos \phi(u)}{r(u)L_{h_0}(u)} du.$$

平均曲率が $H_\varphi = -(1/2)\beta'(s)$ である, ピッチ h_0 の螺旋曲面は,

$$\varphi_{h_0}(s, t) = (h_{h_0}(s) + h_0\theta_{h_0}(s, t), r(s) \cos \theta_{h_0}(s, t), r(s) \sin \theta_{h_0}(s, t)),$$

$$(s, t) \in I \times (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}),$$

⁸ピッチ $h_0 = 0$ のときは, 螺旋曲面 φ は回転面に他ならない.

と表される. ここで, φ_{h_0} による誘導計量は次の通りであり, $x = \int_0^s L_{h_0}(u)^{-1} du$, $y = t$ として等温座標 $z = x + iy$ が得られている:

$$\varphi_{h_0}^* ds^2 = ds^2 + L_{h_0}(s)^2 dt^2 = L_{h_0}^2 |dz|^2.$$

この螺旋曲面 φ_{h_0} の adapted framing $F = F_{h_0} = (F_1, F_2) : I \times (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{C}^2$ は以下のように求められる.

$$\begin{aligned} F_1(s, t) &= \sqrt{2(L_{h_0}(s) + h_0)} \sin \frac{\phi(s) + \theta_{h_0}(s, t)}{2} \\ &\quad - i\sqrt{2(L_{h_0}(s) - h_0)} \sin \frac{\phi(s) - \theta_{h_0}(s, t)}{2}, \\ F_2(s, t) &= -\sqrt{2(L_{h_0}(s) + h_0)} \cos \frac{\phi(s) + \theta_{h_0}(s, t)}{2} \\ &\quad - i\sqrt{2(L_{h_0}(s) - h_0)} \cos \frac{\phi(s) - \theta_{h_0}(s, t)}{2}. \end{aligned}$$

この $F = F_{h_0}$ に対して, $S = S_{h_0} = (S_1, S_2) : I \times (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{C}^2$ を(1.2)によって定めると,

$$S_{h_0} = -(i/2)F_{h_0}$$

となっている. よって, $|S_1|^2 + |S_2|^2 (= e^\lambda) = L_{h_0}$ であり, 回転面の場合の $r = 0$ となる点を除いては, S は 0 にはならない. 従って, 定理 1 によって, $F = F_{h_0}$ から Lagrangian 角度 $\beta = \beta(s)$ である Lagrangian はめ込み $f = f_{h_0} : I \times (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{C}^2$ が構成される. この f_{h_0} は次の形に書き下される.

$$\begin{aligned} f_{h_0}(s, t) &= \gamma_{h_0}(s) \tilde{f}_{h_0}(s, t), \\ \gamma_{h_0}(s) &= \sqrt{L_{h_0}(s)} e^{-i\psi(s)}, \\ \eta_{h_0}(s) &= \arctan \sqrt{(L_{h_0}(s) + h_0)/(L_{h_0}(s) - h_0)}, \\ \tilde{f}_{h_0}(s, t) &= \sqrt{2} \left(\cos(\theta_{h_0}(s, t)/2 - \eta_{h_0}(s)) + i \sin(\theta_{h_0}(s, t)/2 + \eta_{h_0}(s)), \right. \\ &\quad \left. \sin(\theta_{h_0}(s, t)/2 - \eta_{h_0}(s)) - i \cos(\theta_{h_0}(s, t)/2 + \eta_{h_0}(s)) \right). \end{aligned}$$

このとき, f_{h_0} による誘導計量は

$$f_{h_0}^* ds^2 = L_{h_0}(s)^{-1} ds^2 + L_{h_0}(s) dt^2 = L_{h_0} |dz|^2$$

である. よって, f_{h_0} の Gauss 曲率 K は, φ_{h_0} の Gauss 曲率 K_φ と $K = -(2/L_{h_0})K_\varphi$ の関係にあるとわかる. また, Lagrangian 曲面 f_{h_0} の generalized Gauss 写像の反自己双対部分 $\mathcal{G}_- : I \times (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}) \rightarrow S^2$ は, (S^2 の適当な合同変換によって) 螺旋曲面 φ_{h_0} の Gauss 写像 $N = N_{h_0}$ と一致している.

$h_0 = 0$ のとき,

$$\tilde{f}_0 = \tilde{f}_0(t) = e^{i\pi/4} (\cos(t/2 - \pi/4), \sin(t/2 - \pi/4))$$

であり, Lagrangian 曲面

$$f_0(s, t) = \gamma_0(s) \tilde{f}_0(t)$$

は, $S^2 (\cong \mathbb{C}P^1)$ の全測地的 (Lagrangian) 曲線 (大円) $\tilde{f}_0(t)$ と平面正則曲線 $\gamma_0(s)$ によって与えられている. これは, [RU] において与えられている n 次元複素空間 \mathbb{C}^n 内の Lagrangian 部分多様体の例の $n = 2$ の場合になっている.

h_0 が 0 とは限らない場合, \mathbb{C}^2 の座標変換 $\iota: (x_1 + ix_3, x_2 + ix_4) \mapsto (x_1 + ix_2, x_3 + ix_4)$ によって, $\tilde{f}_{h_0}(s, t)$ は

$$(\iota \circ \tilde{f}_{h_0})(s, t) = \exp[\theta_{h_0}(s, t)/2 - \eta_{h_0}(s)] \cdot (1, -i \exp(2i\eta_{h_0}(s)))$$

とみなせる. これは, S^2 内の (全測地的) 曲線 $\alpha(s) = \exp(2i\eta_{h_0}(s))$ の Hopf 束 $S^3 \rightarrow S^2$ による持ち上げによってできる曲面 (Hopf トーラス) である.

以上に述べたことは, 次のような結果を含んでいる.

定理 2. 与えられた関数 $\beta(s) \in C^1(I)$ に対して, Lagrangian 角度が $\beta(s) \pmod{2\pi}$ である Lagrangian 等長的是め込みの 1 変数族 $\{f_{h_0}: M_{h_0} \rightarrow \mathbb{C}^2 \mid h_0 \in \mathbb{R}\}$ が存在する. ただし, M_{h_0} は区間 I と $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ の直積空間 $I \times (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ で計量 $L_{h_0}(s)^{-1}ds^2 + L_{h_0}(s)dt^2$ をもつものであり, $L_{h_0} \neq 0$ と仮定している.

4 Lagrangian surfaces with conformal Maslov form

一般に, \mathbb{C}^2 内の Lagrangian 曲面 $f: M \rightarrow \mathbb{C}^2$ において, 共形的な Maslov 形式 $d\beta$ をもつ (CMF)⁹とは, その generalized Gauss 写像の反自己双対部分 $\mathcal{G}_-: M \rightarrow S^2$ が調和写像であることを意味する ([CU]). Castro-Urbano [CU] は, CMF Lagrangian 曲面では 等温係数を与えている関数 u が常微分方程式 (sinh-Gordon 方程式) $u'' + \sinh 4u = 0$ の解に帰着できることを示し, \mathbb{R}^3 内の Delaunay 曲面 (つまり CMC 回転面) との類似性を指摘している. 彼らは Frenet 方程式の解として CMF Lagrangian 曲面を与え, その性質を調べているが, 具体的なはめ込みの形は与えていない. 本節では, 前節の構成法を利用して, CMF Lagrangian はめ込みを具体的に与える.

まず, [CU] での論法に従うと, CMF Lagrangian はめ込み f の Lagrangian 角度 $\beta: M \rightarrow \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ は, M 上の適当な等温座標 $z = x + iy$ の下で 1 変数関数 $\beta = \beta(x)$ と見なせることを注意しておく.

⁹すなわち, f による誘導計量を $f^*ds^2 = e^{2u}|dz|^2$ とするとき, $(e^{-2u}\beta_x)_z = 0$.

f が minimal でない場合, すなわち β が定数でない場合を考える. 定数 $H_0 (\neq 0)$ に対して, $\lambda = \lambda(x)$ を $e^\lambda = -(2H_0)^{-1}\beta_x$ となるようにとる. このとき, 平均曲率が一定な H_0 (CMC H_0) で誘導計量が $e^{\lambda(x)}|dz|^2$ であるような \mathbb{R}^3 へのはめ込みは, 前節で述べた螺旋曲面の形で表された後述の $\varphi_{h_0, B}$ ($h_0, B \in \mathbb{R}$) のいずれかに局所的に合同である. ポテンシャル部分が $p = p(x) = -(1/2)e^{\lambda(x)}H_0 = -(1/4)\beta_x$ の Dirac 型方程式 (2.1) は, その $\varphi_{h_0, B}$ の可積分条件であるから, その解は (ある初期条件の下に), いずれかの $\varphi_{h_0, B}$ の adapted framing $F_{h_0, B}$ とみなせる. よって, minimal でない CMF Lagrangian 曲面 f は, この $F_{h_0, B}$ から前節のようにして構成される以下の $f_{h_0, B}$ のいずれかに少なくとも局所的に合同であるとわかる.

$\beta = \beta(s) = -2H_0s + \pi/2$ とする. このとき, 任意の定数 B に対して,

$$U(s) = \frac{1}{2H_0}(\sin(2H_0s) + B), \quad V(s) = -\frac{1}{2H_0}\cos(2H_0s)$$

とでき, \mathbb{C} 内で $(U + iV)(s)$ は中心 $B/2H_0$ で半径 $1/2H_0$ の円であり, その極座標表示 $(r(s), 2\psi(s))$ の $r(s)$ は

$$r(s) = r_B(s) = \frac{1}{2H_0}\sqrt{1 + 2B\sin(2H_0s) + B^2}$$

と表されている. さらに定数 h_0 に対して, 定められた関数 $L_{h_0}(s), h_{h_0}(s)$ および $\theta_{h_0}(s)$ は次のように書ける:

$$\begin{aligned} L_{h_0}(s) &= L_{h_0, B}(s) = \sqrt{r_B(s)^2 + h_0^2}, \\ \left(e^{\lambda(x)} &= L_{h_0, B}(s), \quad x = \int_0^s L_{h_0, B}(u)^{-1} du \right), \\ h_{h_0}(s) &= h_{h_0, B}(s) = \frac{1}{2H_0} \int_0^s \frac{L_{h_0, B}(u)}{r_B(u)^2} (1 + B\sin(2H_0u)) du, \\ \theta_{h_0}(s, t) &= \theta_{h_0, B}(s, t) = t - \frac{h_0}{2H_0} \int_0^s \frac{1 + B\sin(2H_0u)}{r_B(u)^2 L_{h_0, B}(u)} du. \end{aligned}$$

これによって, CMC H_0 の螺旋曲面の 2 変数族 $\{\varphi_{h_0, B}(s, t) : \mathbb{R} \times (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{R}^3\}$ が得られる:

$$\begin{aligned} \varphi_{h_0, B}(s, t) \\ = (h_{h_0, B}(s) + h_0\theta_{h_0, B}(s, t), r_B(s)\cos\theta_{h_0, B}(s, t), r_B(s)\sin\theta_{h_0, B}(s, t)). \end{aligned}$$

ただし, $\varphi_{h_0, B}$ による誘導計量 $e^{2\lambda(x)}|dz|^2$ は $L_{h_0, B}^2|dz|^2 = ds^2 + L_{h_0, B}(s)^2 dt^2$ であった. CMC 螺旋曲面は局所的には, 必ずある CMC 回転面 (Delaunay 曲面) からの等長変形で得られている. CMC 螺旋曲面 $\varphi_{h_0, B}$ に対応して Lagrangian 角度 β の Lagrangian 曲面 $f_{h_0, B}$ を前節のように構成すると, その generalized Gauss

写像の反自己双対部分 \mathcal{G}_- は $\varphi_{h_0,B}$ の Gauss 写像に一致していたから, 単位 2 次元球面 S^2 への調和写像であり, $f_{h_0,B}$ は CMF Lagrangian 曲面である:

$$\begin{aligned} f_{h_0,B}(s,t) &= \gamma_{h_0,B}(s) \bar{f}_{h_0,B}(s,t) : \mathbb{R} \times (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{C}^2 \\ \gamma_{h_0,B}(s) &= \sqrt{L_{h_0,B}(s)} e^{-i\psi_B(s)}, \\ \eta_{h_0,B}(s) &= \arctan \sqrt{(L_{h_0,B}(s) + h_0)/(L_{h_0,B}(s) - h_0)}, \\ \bar{f}_{h_0,B}(s,t) &= \sqrt{2} \left(\cos(\theta_{h_0,B}(s,t)/2 - \eta_{h_0,B}(s)) + i \sin(\theta_{h_0,B}(s,t)/2 + \eta_{h_0,B}(s)), \right. \\ &\quad \left. \sin(\theta_{h_0,B}(s,t)/2 - \eta_{h_0,B}(s)) - i \cos(\theta_{h_0,B}(s,t)/2 + \eta_{h_0,B}(s)) \right). \\ f_{h_0,B}^* ds^2 &= L_{h_0,B}(s)^{-1} ds^2 + L_{h_0,B}(s) dt^2 = L_{h_0,B} |dz|^2. \end{aligned}$$

さて, $h_0 = 0$ のときの CMC $H_0 (\neq 0)$ 回転面 $\varphi_{0,B}(s,t)$ は, 定数 B の値によって次のように分類されることが知られている. ($B \geq 0$ と仮定してかまわない.)

- $B = 0$ の場合: $\varphi_{0,0}(s,t)$ は円柱面.
(注: $h_0 \neq 0$ の場合も $\varphi_{h_0,0}(s,t)$ は円柱面を与えている.)
- $0 < B < 1$ の場合: $\varphi_{0,B}(s,t)$ はアンデュロイド. すなわち, 楕円を直線軸上滑らすことなく転がしたときの焦点の軌跡として得られる曲線を生成曲線とする回転面で, 自己交差のない Delaunay 曲面である.
- $B = 1$ の場合: $\varphi_{0,1}(s,t)$ は同一直線上に中心をもつ半径 $1/H_0$ の球面列.
- $1 < B$ の場合: $\varphi_{0,B}(s,t)$ はノドイト. すなわち, 双曲線を直線軸上滑らすことなく転がしたときの焦点の軌跡として得られる曲線を生成曲線とする回転面で, 自己交差のある Delaunay 曲面である.

これらに対応して構成された CMF Lagrangian 曲面

$$f_{0,B}(s,t) = \gamma_{0,B}(s) \cdot e^{i\frac{t}{4}} \left(\cos\left(\frac{t}{2} - \frac{\pi}{4}\right), \sin\left(\frac{t}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \right) : \mathbb{R} \times (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{C}^2$$

において, 平面曲線 $\gamma_{0,B}(s)$ は Cassini の卵形線の族を形成している¹⁰. Cassini の卵形線とは, 2つの固定点からの距離の積が一定である点の軌跡で (cf. [G]), 実際に, $\gamma_{0,B}(s)$ は, 2点 $(\pm\sqrt{B/2H_0}, 0)$ からの距離の積が $1/2H_0$ である点の軌跡 $((x^2 + y^2)^2 + (B/H_0)(y^2 - x^2) = (1 - B^2)/4H_0^2)$ である閉曲線である. 特に, $B = 0$ の場合は円であり, $B = 1$ の場合は連珠形である.

¹⁰2001年3月に九州大学で行われた「CMCのつどい」において, この可能性を指摘していただいた. そちらの世話人・参加者の皆様にもこの場を借りて感謝させていただきます.

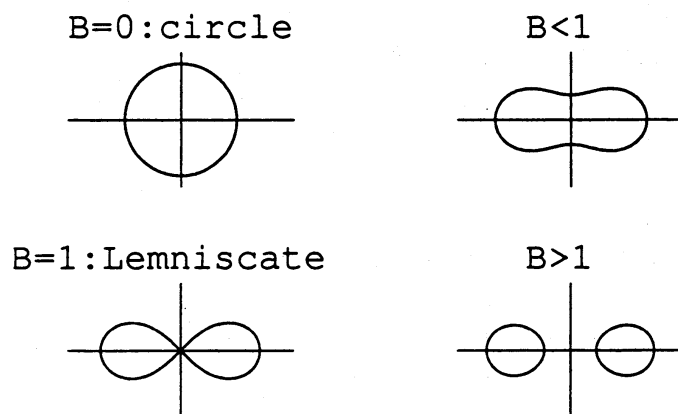


図 1: Cassini 卵形線 $\gamma_{0,B}(s)$

$B = 1$ の場合, $f_{0,1}(s, t)$ は Whitney 球面 と呼ばれる 球面 S^2 の Lagrangian はめ込みを与えている.

$B \neq 1$ とする. 一般に h_0 が 0 とは限らない場合であっても, $f_{h_0,B}(s, t)$ には次のような 2 重周期性がある:

$$f_{h_0,B}(s, t + 4\pi) = f_{h_0,B}(s, t), \quad f_{h_0,B}(s + a, t) = f_{h_0,B}(s, t - b).$$

ここで, $0 \leq B < 1$ のとき $a = 2\pi/H_0$, $1 < B$ のとき $a = \pi/H_0$ とおいている. また, b は

$$b = \frac{h_0}{2H_0} \int_s^{s+a} \frac{1 + B \sin(2H_0 u)}{r_B(u)^2 L_{h_0,B}(u)} du \quad \text{で定まる定数である.}$$

このことから次の結果が導かれる.

定理 3. $\Gamma_{h_0,B}$ を \mathbb{R}^2 において $\{(a, b), (0, 4\pi)\}$ によって生成される格子とする. $f_{h_0,B}$ ($B \neq 1$) はトーラス $\mathbb{R}^2/\Gamma_{h_0,B}$ から \mathbb{C}^2 への CMF Lagrangian はめ込みを与える.

注. $B = 0$ のとき, Lagrangian トーラス $f_{h_0,0}$ は \mathbb{C}^2 内の 3 次元球面 S^3 に含まれ, Hopf トーラスとみなせる. 特に $f_{0,0}$ は Clifford トーラスとみなせる.

最後に $H_0 = 0$ の場合について, 注意しておく. \mathbb{R}^3 内の 極小である回転面 $\varphi(r, \theta) = (h(r), r \cos \theta, r \sin \theta)$ は, 平面 $h(r) \equiv 0$ か, カテノイド $h(r) = \cosh r$ である. 第 3 節の対応に従って \mathbb{C}^2 内の 極小 Lagrangian 曲面を構成すると, 平面からは, Lagrangian である平面が得られ, カテノイドからは [C] などで Lagrangian カテノイドと呼ばれているものが確かに対応している. Lagrangian カテノイドは, \mathbb{R}^4

に適当な直交複素構造をとり直して, \mathbb{C}^2 内の複素正則曲線 $\{(z, 1/z)\}$ とみなせる $\mathbb{R} \times S^1$ の極小 Lagrangian はめ込みである.

参考文献

- [A1] R. Aiyama, Totally real surfaces in the complex 2-space, preprint.
- [A2] R. Aiyama, Lagrangian surfaces in the complex 2-space, to appear in *Proceedings of the 5th International Workshops on Differential Geometry, Kyungpook National Univ., Korea, 2000*.
- [AA] R. Aiyama and K. Akutagawa, Kenmotsu type representation formula for surfaces with prescribed mean curvature in the 3-sphere, *Tohoku Math. J.* **52** (2000), 95–105.
- [C] I. Castro, Minimal Lagrangian submanifolds in complex Euclidean space, *Proceedings of the 1st International Meeting on Geometry and Topology (Braga, 1997)*, 43–49 (electronic), Cent. Mat. Univ. Minho, Braga, 1998.
- [CU] I. Castro and F. Urbano, Lagrangian surfaces in the complex Euclidean plane with conformal Maslov form, *Tôhoku Math. J.* **45** (1993), 565–582.
- [CM] B.-Y. Chen and J.-M. Morvan, *Geometrie des surfaces lagrangiennes de \mathbb{C}^2* , *J. Maht. Pures Appl.* **66** (1987), 321–325.
- [G] A. Gray, *Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces with Mathematica, Second Edition*, CRC Press, 1998.
- [HR1] F. Hélein and P. Romon, Hamiltonian stationary Lagrangian surfaces in \mathbb{C}^2 , arXiv:math.DG/0009202.
- [HR2] F. Hélein and P. Romon, Weierstrass representation of Lagrangian surfaces in four-dimensional space using spinors and quaternions, *Comment. Math. Helv.* **75** (2000), 668–680.
- [K1] K. Kenmotsu, The mean curvature vector of surfaces in R^4 , *Bull. London Math. Soc.* **19** (1987), 458–462.
- [K2] 剣持勝衛, 曲面論講義—平均曲率一定曲面—, 培風館, 2000.

- [KL] B. B. Konopelchenko and G. Landolfi, Induced surfaces and their integrable dynamics II. Generalized Weierstrass representations in 4D spaces and deformations via DS hierarchy, preprint (arXiv:math.DG/9810138).
- [KT] B. G. Konopelchenko and I. A. Taimanov, Generalized Weierstrass formulae, soliton equations and Willmore surfaces, I. Tori of revolution and the mKDV equation, arXiv:dg-ga/9506011.
- [RU] A. Ros and F. Urbano, Lagrangian submanifolds of \mathbb{C}^n with conformal Maslov form and the Whitney sphere, J. Math. Soc. Japan **50** (1998), 203–226.