

離散時間の信用リスクのある割引債券モデル

九州大学大学院経済学研究科 宮本正和 (Miyamoto Masakazu)

九州大学大学院経済学研究院 中井 達 (Nakai Toru)

Faculty of Economics, Kyushu University

1 はじめに

ここでは、金利の期間構造の変動を信用リスクのない割引債の価格の2項格子モデルによって特徴付けた、Ho-Leeモデル [2] をもとにして、信用リスクがある割引債の無裁定価格を導くことを目的とする。

まず、2節では、モデルを構築する際の基本的な仮定を述べる。3節では、Ho-Leeによる割引国債の2項格子モデルを特徴付ける状態の推移と推移関数について説明し、Ho-Leeで得られた結果について、必要な性質を述べる。とくに、割引債によるポートフォリオが裁定機会を生み出すことのない状況、つまり無裁定状態を保証するリスク中立確率について、推移関数が満たすべき条件と、信用リスクのない割引債の価格によって特徴付けられる割引関数が、経路に関して独立性をもつような条件を求める。さらに、これらのもとで推移関数を特定化する。4節では、状態が推移した際の割引関数の減少性の保存と状態推移の完全性が成り立つための十分条件を求めた。5節では、信用リスクのある割引債のモデルを考察する。まず、信用リスクを表す関数である生存関数を用いて、信用リスクのある割引債の価格を求める。最後に6節で、比較静学分析を通してその特徴をみる。

2 前提

すべての取引が離散時点で行われる摩擦のない市場を想定する。摩擦のない市場とは、税金や取引コストがなく、すべての有価証券は完全に分割可能である市場のことである。また、債券市場は完備であり、各満期 $n(n = 0, 1, 2, \dots)$ の債券がすべて存在する。さらに、各時点 n において、可能な状態が有限個存在するものとする。この状態に応じて、金利の期間構造が変化し、状態を表す数値が大きいものの方が、低金利の期間構造をもち、利率が悪いと考える。

ここで、割引債は満期において1単位を受け取ることの出来る債券とし、信用リスクのない割引債を「割引国債」、信用リスクのある割引債を「割引社債」と呼ぶことにする。時点 n で状態 i のときの満期 T の割引国債の価格を $v_i^{(n)}(T)$ 、割引社債の価格を $V_i^{(n)}(T)$ と

割引債は資産の価値とみなせることから必ず正の値をとり、満期においては必ず 1 単位を受けとることができるので、すべての時点 n 、状態 i に対して、 $v_i^{(n)}(0) = V_i^{(n)}(0) = 1$ を満たす。

また、割引国債の価格を満期 T に関する関数 $v_i^{(n)}(\cdot)$ と見たとき、これを割引関数と呼ぶ。割引関数は、時点 n で状態 i が実現したときの金利の期間構造を完全に表現できる。

3 Ho-Lee モデル

3.1 割引国債の 2 項格子モデル

割引関数 $v_i^{(n)}(\cdot)$ に関して、次のような 2 項格子モデルを構築する。

1. 初期時点 0 での割引関数を $v_0^{(0)}(\cdot)$ とし、状態が 0 という。また、初期時点の割引関数を単に $v(\cdot)$ と表す場合もある。
2. 時点 1 では、2 つの割引関数 $v_1^{(1)}(\cdot)$ か $v_0^{(1)}(\cdot)$ のいずれかが実現する。つまり、時点 1 においては 2 つの状態 (0, 1) が存在する。また、割引関数が $v_1^{(1)}(\cdot)$ のときを上昇状態といい、状態が 1 であるという。また、 $v_0^{(1)}(\cdot)$ のときを下落状態といい、状態が 0 であるという。
3. 次に、時点 1 から時点 2 での 2 期間目の状態の推移を考える。時点 1 での割引関数は、時点 2 では 2 つの状態のうちどちらか一方に推移する。時点 1 で状態が 1 のとき、割引関数は $v_1^{(1)}(\cdot)$ で、時点 2 のときの割引関数は、 $v_2^{(2)}(\cdot)$ か $v_1^{(2)}(\cdot)$ のいずれかになる。同様に、時点 1 で状態が 0 のとき、割引関数は $v_0^{(1)}(\cdot)$ で、時点 2 のときの割引関数は $v_1^{(2)}(\cdot)$ か $v_0^{(2)}(\cdot)$ のいずれかになる。ここで、2 期間での変化を考えたとき、1 期目で上昇し 2 期目で下落したときの状態と、1 期目で下落して 2 期目で上昇したときの状態は一致するものとする。言いかえれば、割引関数は、推移の経路に関して独立であり、それまでの状態の上昇回数と下落回数だけに依存する。
4. 最後に、時点 n から時点 $n+1$ での n 期間目の推移を考える。時点 n で状態が i のときの割引関数は $v_i^{(n)}(\cdot)$ である。このとき、 n 期間目の推移が上昇、下落にしたがって、2 期間目と同じ様に、それぞれ 2 つの状態に変化する。ここで、割引関数はそれまでの上昇回数だけに依存し、その経路には依存しないとすれば、 n 期間目の変化は図1のように表せ、各時点 n において、 $n+1$ 個の状態が存在することになる。

3.2 推移関数 $u(T), d(T)$

ここでは、Ho-Lee モデルを扱う上で最も重要な位置を占める推移関数について述べる。Ho-Lee モデルは、株価の 2 項格子モデルである CRR モデル (Cox, Ross, Rubinstein モデル)[1] の債券版であるが、CRR モデルと大きく異なるのは、割引国債の場合、満期において不確実性は存在せず、確実に 1 単位の現金を得ることができる点である。そのため、時間の経過と共に情報の不確実性は増大するものの、それに反して、満期が近づいてくことで、価

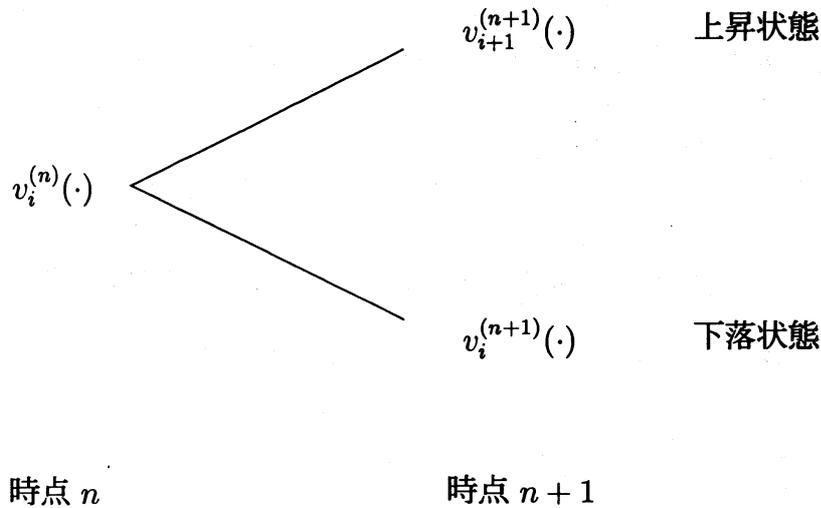


図 1: n 期間目の状態の推移

格に対する不確実性は減少する。2項格子モデルの性質から時間の経過と共に状態の数は増加する。これにより、時間の経過に対する不確実性の増大を表現している。そこで、満期が近づくことによる不確実性の減少を推移関数を用いることで表現する。

2節で、 n 時点での状態が i であるときの割引関数を $v_i^{(n)}(T)$ としたが、もし、すべての投資家が次の期間の無リスク金利を正確に知っていれば、上昇状態に推移したときの金利の期間構造と下落状態に推移したときの金利の期間構造は完全に一致しなければならない。なぜなら、次の期間の無リスク金利を完全に知っているということは、状態が上昇状態と下落状態のどちらに推移するかを知っているということであり、その場合、金利の先物と割引国債を組み合わせることで、リスクなしに収益を上げることができる。したがって、不確実性がない場合には、次の関係が成り立っている必要がある。

$$f_i^{(n)}(T) = v_i^{(n+1)}(T) = v_{i+1}^{(n+1)}(T) = \frac{v_i^{(n)}(T+1)}{v_i^{(n)}(1)}, \quad T = 0, 1, 2, \dots$$

ただし、 $f_i^{(n)}(T)$ は、割引国債の先物の価格を満期 T に関する関数としてみた先物割引関数である。もし、次の期間の割引関数が先物割引関数と異なると、投資家は裁定機会を得ることになる。それゆえ、不確実性をもつ期間構造をモデル化するときには、いかに裁定機会を生まないようにするかがポイントとなる。そこで、不確実性を取り入れるために、次の期間における先物割引関数からのずれを表す関数(これを推移関数と呼ぶ) $u(T), d(T)$ を次のように定義する。上昇状態に推移したときを、

$$v_{i+1}^{(n+1)}(T) = \frac{v_i^{(n)}(T+1)}{v_i^{(n)}(1)} u(T) \quad (1)$$

とおき、下落状態に推移したときは、

$$v_i^{(n+1)}(T) = \frac{v_i^{(n)}(T+1)}{v_i^{(n)}(1)} d(T) \quad (2)$$

とおく。ここで、上昇状態では、 $u(T)$ はすべての T に対して 1 以上の値を取り、あらゆる満期の割引国債の価格は相対的に上昇する。逆に、下落状態では、 $d(T)$ はすべての T に対して $(0, 1]$ の値を取り、割引国債の価格は相対的に下落する。また、 $u(T)$ を満期 T に関する増加関数、 $d(T)$ を満期 T に関する減少関数としてやれば、両関数は満期 T の減少と共に 1 に近づく。よって、満期の到来が近づくことによる不確実性の減少を表現することができる。さらに、 $v_i^{(n)}(0) = 1$ と式(1)、式(2)から $u(0) = d(0) = 1$ が得られる。今、式(1)と式(2)によって割引関数のモデルを特徴付けたが、このモデルが実際に裁定機会を生まないか、さらに、経路に関する独立性を満足しているかを確認する必要がある。

補題 1 (リスク中立確率 π) 2項格子モデルの各頂点 (n, i) からの上昇確率を π とするとき、

$$\frac{1 - d(S)}{u(S) - d(S)} = \frac{1 - d(T)}{u(T) - d(T)}, \quad S, T = 1, 2, \dots$$

が成り立てば、裁定機会が存在しないようなリスク中立確率 π が存在し、

$$\pi = \frac{1 - d(T)}{u(T) - d(T)}, \quad T = 1, 2, \dots \quad (3)$$

で与えられる。

[証明]

まず、時点 n において状態が i であるとき、次の 1 期間にかけて裁定機会が存在しないためには、

$$v_i^{(n)}(T) = [\pi v_{i+1}^{(n+1)}(T-1) + (1 - \pi)v_i^{(n+1)}(T-1)]v_i^{(n)}(1), \quad T = 1, 2, \dots$$

を満たさなければならない。これに、式(1)と式(2)を代入すれば、

$$\begin{aligned} v_i^{(n)}(T) &= \left[\pi \frac{v_i^{(n)}(T)}{v_i^{(n)}(1)} u(T) + (1 - \pi) \frac{v_i^{(n)}(T)}{v_i^{(n)}(1)} d(T) \right] v_i^{(n)}(1) \\ &= v_i^{(n)}(T) [\pi u(T) + (1 - \pi)d(T)] \end{aligned}$$

となる。よって、

$$\pi u(T) + (1 - \pi)d(T) = 1$$

これを π について解くと、

$$\pi = \frac{1 - d(T)}{u(T) - d(T)}, \quad T = 1, 2, \dots$$

となる。また、 $u(T) > 1$ 、 $0 < d(T) < 1$ ($T = 1, 2, \dots$) であるから、 $0 < \pi < 1$ となる。したがって、

$$\frac{1 - d(S)}{u(S) - d(S)} = \frac{1 - d(T)}{u(T) - d(T)}, \quad S, T = 1, 2, \dots$$

が成り立てば裁定機会が存在しないようなリスク中立確率 π を与えることができ、 π は $(0, 1)$ で一意に定まる。□

補題 2 (経路に関する独立性) 次の関係が成立するとき、割引国債の 2 項格子モデルは、経路に関する独立性をもつ。

$$u(T+1)d(T)d(1) = d(T+1)u(T)u(1), \quad T = 0, 1, 2, \dots \quad (4)$$

[証明]

時点 n から時点 $n+2$ までの 2 期間を考え、時点 n で状態が i とする。このとき、1 期目で状態が上昇し、2 期間目で下落して、時点 $n+2$ で状態が $i+1$ になる場合と、1 期目で下落し、2 期目で上昇して、時点 $n+2$ で状態が $i+1$ になる場合を考える。割引国債の価格、すなわち割引関数が経路に依存せず、それまでの上昇回数と下落回数にだけ依存するという性質を持つためには、これらの 2 つの経路によって、時点 $n+2$ で状態が $i+1$ となったときの価格が等しくなっていなければならない。(図 2)

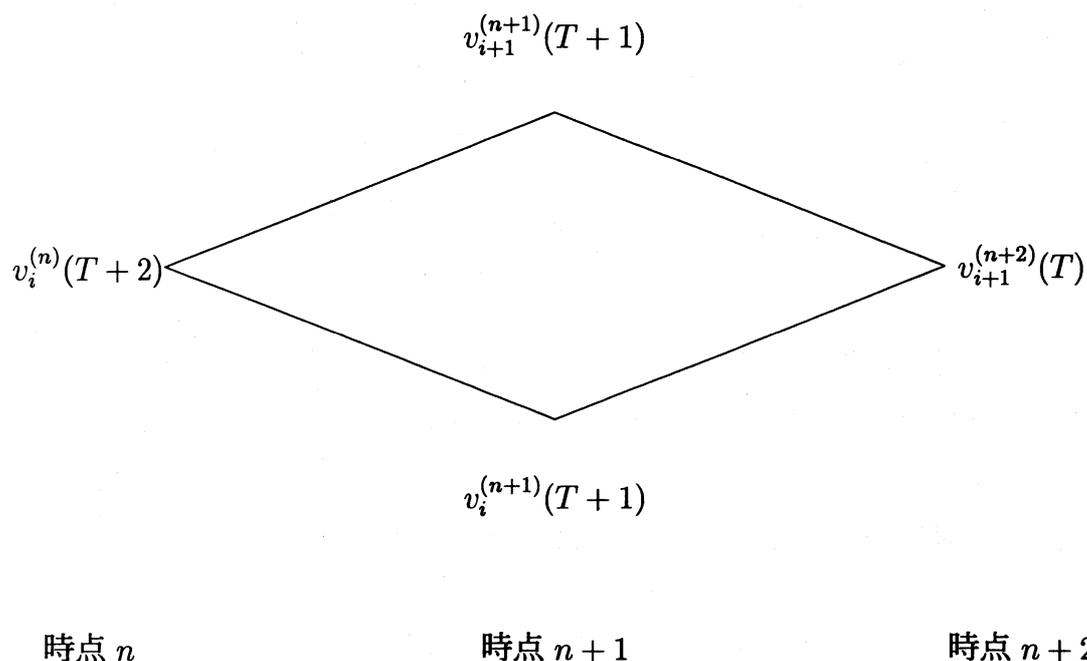


図 2: 経路に関する独立性

式(1)、式(2)から、時点 $n+2$ で状態が $i+1$ のときの価格 $v_{i+1}^{(n+2)}(T)$ は、時点 n の状態にしたがって、2 通りの表し方ができる。すなわち、時点 $n+1$ で状態が $i+1$ の場合は、

$$v_{i+1}^{(n+2)}(T) = \frac{v_{i+1}^{(n+1)}(T+1)}{v_i^{(n+1)}(1)} u(T)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{v_i^{(n)}(T+2)d(T+1)}{v_i^{(n)}(1)} u(T) \\
&= \frac{v_i^{(n)}(2)d(1)}{v_i^{(n)}(1)} u(T) \\
&= \frac{v_i^{(n)}(T+2)d(T+1)u(T)}{v_i^{(n)}(2)d(1)} \tag{5}
\end{aligned}$$

であり、時点 $n+1$ での状態が i の場合は、

$$\begin{aligned}
v_{i+1}^{(n+2)}(T) &= \frac{v_{i+1}^{(n+1)}(T+1)}{v_{i+1}^{(n+1)}(1)} d(T) \\
&= \frac{v_i^{(n)}(T+2)u(T+1)}{v_i^{(n)}(1)} d(T) \\
&= \frac{v_i^{(n)}(2)u(1)}{v_i^{(n)}(1)} d(T) \\
&= \frac{v_i^{(n)}(T+2)u(T+1)d(T)}{v_i^{(n)}(2)u(1)} \tag{6}
\end{aligned}$$

である。したがって、経路に依存しないためには、式(5)と式(6)の値が一致しなければならない。よって、

$$\begin{aligned}
v_{i+1}^{(n+2)}(T) &= \frac{v_i^{(n)}(T+2)u(T+1)d(T)}{v_i^{(n)}(2)u(1)} = \frac{v_i^{(n)}(T+2)d(T+1)u(T)}{v_i^{(n)}(2)d(1)} \\
&= \frac{u(T+1)d(T)}{u(1)} = \frac{d(T+1)u(T)}{d(1)}
\end{aligned}$$

つまり、

$$u(T+1)d(T)d(1) = d(T+1)u(T)u(1), \quad T = 0, 1, 2, \dots$$

という関係式を満たせば、割引国債の価格は経路に依存しない。□

系 1 補題 1 と補題 2 の結果から、割引関数は次のように得られる。

$$u(T) = \frac{\alpha^T}{(1-\pi) + \pi\alpha^T} \tag{7}$$

$$d(T) = \frac{1}{(1-\pi) + \pi\alpha^T} \tag{8}$$

ただし、

$$\pi = \frac{1-d(1)}{u(1)-d(1)} \tag{9}$$

$$\alpha = \frac{u(1)}{d(1)} \tag{10}$$

まず、式(4)に $T = 1$ を代入すると、

$$\begin{aligned} u(2)d(1)d(1) &= d(2)u(1)u(1) \\ \frac{u(2)}{d(2)} &= \left(\frac{u(1)}{d(1)}\right)^2 \end{aligned}$$

である。同様にして、逐次に求めていくと、

$$\begin{aligned} \frac{u(T)}{d(T)} &= \left(\frac{u(1)}{d(1)}\right)^T \\ &= \alpha^T, \quad T = 1, 2, \dots \end{aligned} \tag{11}$$

を得る。次に、式(3)と式(11)から、

$$\begin{aligned} \pi &= \frac{1 - d(T)}{u(T) - d(T)} \\ \pi &= \frac{\frac{1}{d(T)} - 1}{\frac{u(T)}{d(T)} - 1} \\ \frac{1}{d(T)} &= \pi(\alpha^T - 1) + 1 \\ d(T) &= \frac{1}{(1 - \pi) + \pi\alpha^T} \end{aligned}$$

また、式(11)から、

$$u(T) = \frac{\alpha^T}{(1 - \pi) + \pi\alpha^T}$$

となる。ここで、式(3)より、

$$\pi = \frac{1 - d(1)}{u(1) - d(1)}$$

としてもよいので、 $u(1) > 1, 0 < d(1) < 1$ を満たすように $u(1), d(1)$ を与えれば、式(9)、式(10)より π, α が決定し、あわせて式(7)、式(8)から関数 $u(T), d(T)$ が定まる。□

4 割引関数 $v(T)$ の性質

前節までは、Ho-Lee の論文の引用であるが、ここでは、Ho-Lee の論文では触れられていない割引関数の性質について見ていく。

割引関数は、割引国債の列として表現されるが、割引国債の価格は通常、満期が長いほど低いと予想される。つまり、割引関数は、満期 T に関する減少関数であるべきである。よって、現時点 ($t = 0$) における割引関数は、減少関数として与えられる。そこで、式(1)、

式(2)によって、時点の経過と共に推移する割引関数が、任意の時点、任意の状態において減少関数であるかをチェックする必要がある。

また、式(1)、式(2)によって特徴付けられる割引国債の価格の推移は、同一の割引国債の相対的な増加、あるいは減少であり、異時点間における満期の等しい割引国債の価格までは、比較の対称としていない。しかし、状態が上昇したとき、満期の等しい割引国債の価格は上昇し、状態が下落したときには、満期の等しい割引国債の価格は減少しているべきだと考えられる。

4.1 割引関数 $v_i^{(n)}(T)$

2つの性質に関してみる前に、これまで漸化式として与えられていた $v_i^{(n)}(T)$ を求める。

定理 1 割引関数 $v_i^{(n)}(T)$ は、時点 n 、状態 i 、満期 T の関数として、次のように表せる。

$$v_i^{(n)}(T) = v(T)\alpha^{-(n-i-1)T} \prod_{k=0}^{n-1} \frac{p(k)}{p(T+k)} \quad (12)$$

[証明]

経路に関して独立であるという性質を使うと、 n 時点までにある特定の経路を通ってきたと仮定して $v_i^{(n)}(T)$ を求めても問題はないので、ここでは、始めの i 期間、状態は上昇しつつ、時点 i では、状態は i であり、残りの $n-i$ 期間、下落しつつ、時点 n で状態が i になったものとする(図3参照)。

以上の仮定のもとで、式(1)と式(2)を繰り返し用いると、

$$v_i^{(n)}(1) = \frac{\prod_{j=1}^{n-i} d(j) \prod_{k=n-i+1}^n u(k)}{\prod_{j=i}^{n-1} v_i^{(j)}(1) \prod_{k=0}^{i-1} v_k^{(k)}(1)} v(n+1) \quad (13)$$

と表せる。両辺に $\prod_{j=i}^{n-1} v_i^{(j)}(1)$ を掛けると、

$$\prod_{j=i}^n v_i^{(j)} = \frac{\prod_{j=1}^{n-i} d(j) \prod_{k=n-i+1}^n u(k)}{\prod_{k=0}^{i-1} v_k^{(k)}(1)} v(n+1) \quad (14)$$

となる。さらに式(14)の n を $n-1$ と置き換えて式(13)に代入すると、

$$\begin{aligned} v_i^{(n)}(1) &= \frac{\prod_{j=1}^{n-i} d(j) \prod_{k=n-i+1}^n u(k)}{\frac{\prod_{j=1}^{n-i-1} d(j) \prod_{k=n-i}^{n-1} u(k)}{\prod_{k=0}^{i-1} v_k^{(k)}(1)} v(n) \prod_{k=0}^{i-1} v_k^{(k)}(1)} v(n+1) \\ &= \frac{d(n-i)u(n)v(n+1)}{u(n-i)v(n)} \\ &= \frac{1}{\alpha^{n-i}p(n)} \end{aligned} \quad (15)$$

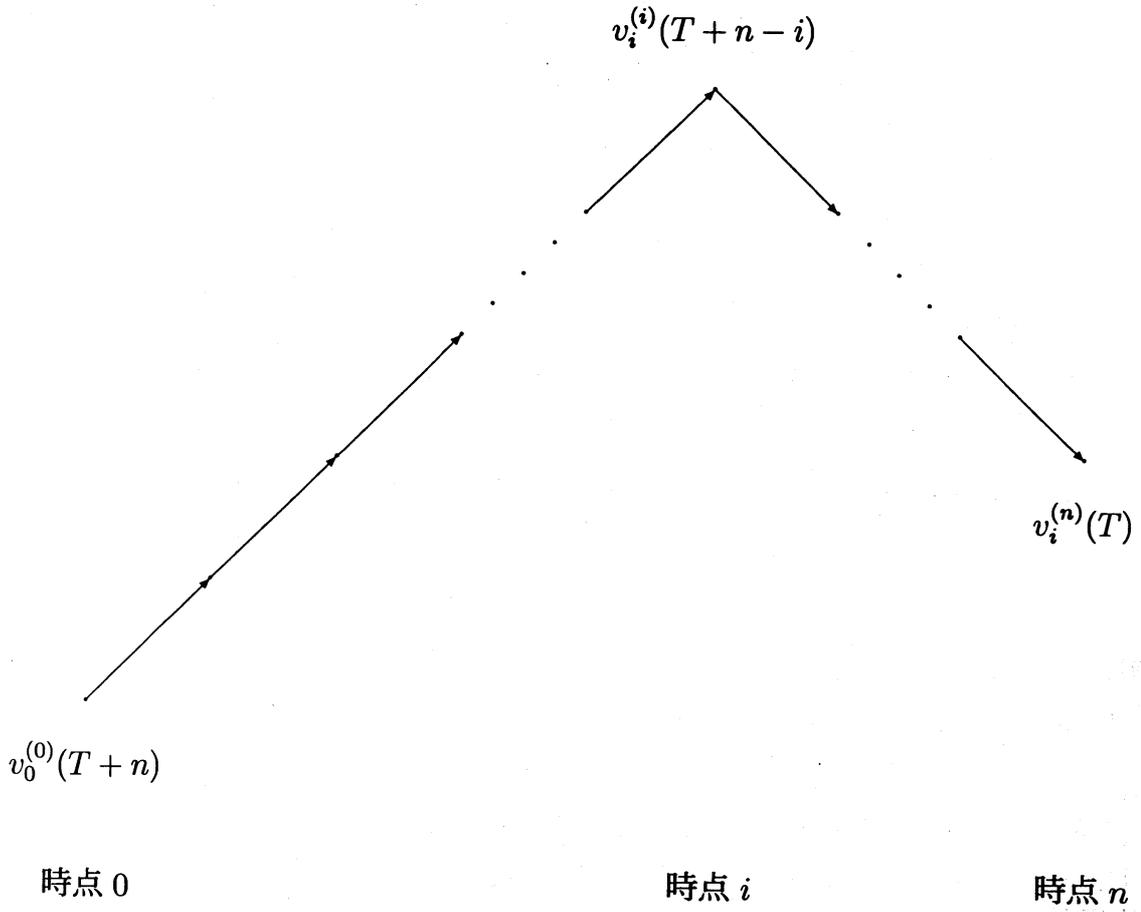


図 3: ある特定の経路

となる。ただし、

$$p(n) = \frac{v(n)}{v(n+1)u(n)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

とする。同様の考え方で、 $v_i^{(n)}(T)$ に式(1)、式(2)を繰り返し用いると、

$$v_i^{(n)}(T) = \frac{\prod_{j=T}^{T+n-i-1} d(j) \prod_{k=T+n-i}^{T+n-1} u(k)}{\prod_{j=i}^{n-1} v_i^{(j)}(1) \prod_{k=0}^{i-1} v_k^{(k)}(1)} v(T+n)$$

が得られる。これに、式(11)と式(15)を代入すると、

$$\begin{aligned}
 v_i^{(n)}(T) &= \frac{\prod_{j=T}^{T+n-i-1} \alpha^{-j} u(j) \prod_{k=T+n-i}^{T+n-1} u(k)}{\prod_{j=i}^{n-1} \frac{1}{\alpha^{j-i} p(j)} \prod_{k=0}^{i-1} \frac{1}{p(k)}} v(T+n) \\
 &= v(T+n) \prod_{j=0}^{n-i-1} \alpha^{-T} \prod_{k=T}^{T+n-1} u(k) \prod_{m=0}^{n-1} p(m) \\
 &= v(T+n) \alpha^{-(n-i-1)T} \frac{v(T)}{v(T+n)} \prod_{k=T}^{T+n-1} \frac{v(k+1)u(k)}{v(k)} \prod_{m=0}^{n-1} p(m)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= v(T)\alpha^{-(n-i-1)T} \prod_{k=T}^{T+n-1} \frac{1}{p(k)} \prod_{m=0}^{n-1} p(m) \\
&= v(T)\alpha^{-(n-i-1)T} \prod_{k=0}^{n-1} \frac{p(k)}{p(T+k)}
\end{aligned}$$

となり、時点 n 、状態が i のときの割引関数 $v_i^{(n)}(T)$ が得られる。□

4.2 $v_i^{(n)}(T)$ の減少性の保存

割引債は、満期が長いほどその価格は通常低くなる。つまり、割引関数 $v_i^{(n)}(T)$ は、満期 T に関する減少関数でなくてはならない。ここでは、 $v(T)$ を T に関する減少関数として、 $v_i^{(n)}(T)$ が T に関する減少関数になっているかを確認する。

定理 2 初期の割引関数 $v(T)$ が T に関する減少関数であり、任意の満期 $T(= 0, 1, 2, \dots)$ に対して、

$$\frac{v(T)}{v(T+1)} > u(T) \quad (16)$$

を満足するとき、任意の時点 $n(= 1, 2, \dots)$ 、任意の状態 $i(= 0, 1, 2, \dots, n)$ に対して、割引関数 $v_i^{(n)}(T)$ は、 T に関する減少関数となる。

[証明]

まず、時点 n において状態が i のとき、その割引関数 $v_i^{(n)}(T)$ が T に関する減少関数と仮定して、時点 $n+1$ で状態が i 、つまり下落状態に推移したとき、 $v_i^{(n+1)}(T)$ が T に関する減少関数となることを示す。 $v_i^{(n)}(T)$ は T に関する減少関数であるから、

$$v_i^{(n)}(T) > v_i^{(n)}(T+1), \quad T = 0, 1, 2, \dots \quad (17)$$

を満たす。ここで、式(2)より、

$$\begin{aligned}
v_i^{(n+1)}(T) - v_i^{(n+1)}(T+1) &= \frac{v_i^{(n)}(T+1)}{v_i^{(n)}(1)} d(T) - \frac{v_i^{(n)}(T+2)}{v_i^{(n)}(1)} d(T+1) \\
&= \frac{1}{v_i^{(n)}(1)} [v_i^{(n)}(T+1)d(T) - v_i^{(n)}(T+2)d(T+1)]
\end{aligned}$$

となり、式(17)と $d(T) > d(T+1) > 0$ より、

$$v_i^{(n+1)}(T) > v_i^{(n+1)}(T+1), \quad T = 0, 1, 2, \dots$$

となる。よって、状態が下落したときには、割引関数の T に関する減少性は保存される。

次に、経路に関する独立性から、時点 n で状態が i のときの割引関数 $v_i^{(n)}(T)$ は、時点 0 から時点 i にかけて状態が上昇しつづけ、時点 i から時点 n にかけて下落したと仮定しても一般性を失うことはない。今、下落状態に推移したとき、 T に関する減少性は保存さ

れるから、 $v_i^{(i)}(T)$ が T に関する減少関数であれば、 $v_i^{(n)}(T)$ も T に関する減少関数である。すなわち、 $v_n^{(n)}(T)$ が任意の n に対して T に関する減少関数であることがいえれば、任意の時点 $n(=1, 2, \dots)$ 、任意の状態 $i(=0, 1, 2, \dots, n)$ に対して、割引関数 $v_i^{(n)}(T)$ は、 T に関する減少関数であるといえる。そこで、時点 0 で満期が T と $T+1$ である 2 つの割引国債の価格に関して、

$$v_n^{(n)}(T-n) > v_n^{(n)}(T-n+1), \quad \forall n \leq T \quad (18)$$

が満たされることを示すことで、 $v_n^{(n)}(T)$ の T に関する減少性を証明する。まず、時点 1 において、式(18)が成り立つためには、式(1)を用いると、

$$\begin{aligned} v_1^{(1)}(T-1) - v_1^{(1)}(T) &= \frac{v(T)}{v(1)}u(T-1) - \frac{v(T+1)}{v(1)}u(T) \\ &= \frac{1}{v(1)}[v(T)u(T-1) - v(T+1)u(T)] \end{aligned}$$

と表せるので、

$$\frac{v(T)}{v(T+1)} > \frac{u(T)}{u(T-1)}$$

を満たさなければならない。同様に、時点 $n(\leq T)$ において、式(18)が成り立つためには、式(1)を繰り返し用いることで、それぞれ、

$$\begin{aligned} v_n^{(n)}(T-n) &= \frac{v(T)}{\prod_{j=0}^{n-1} v_j^{(j)}(1)} \prod_{j=T-n}^{T-1} u(j) \\ v_n^{(n)}(T-n+1) &= \frac{v(T+1)}{\prod_{j=0}^{n-1} v_j^{(j)}(1)} \prod_{j=T-n+1}^T u(j) \end{aligned}$$

と表せるから、

$$v_n^{(n)}(T-n) - v_n^{(n)}(T-n+1) = \frac{\prod_{j=T-n+1}^{T-1} u(j)}{\prod_{j=0}^{n-1} v_j^{(j)}(1)} [v(T)u(T-n) - v(T+1)u(T)]$$

となり、

$$\frac{v(T)}{v(T+1)} > \frac{u(T)}{u(T-n)}, \quad n = 1, 2, \dots, T$$

を満たせば式(18)が成り立つ。さらに、任意の T に対して、 $1 < u(T) < u(T+1)$ だから、

$$\frac{v(T)}{v(T+1)} > \frac{u(T)}{u(0)} > \frac{u(T)}{u(1)} > \dots > \frac{u(T)}{u(T-1)} > 1$$

となり、 $u(0) = 1$ より、

$$\frac{v(T)}{v(T+1)} > u(T)$$

であれば満期まで状態が上昇し続けても、満期の長い割引国債が満期の短い割引国債の価格を超えることはない。つまり T に関する減少性は保存される。□

4.3 満期の等しい割引国債の価格

満期の等しい割引国債の価格を比較したとき、状態が上昇すれば価格も上昇し、状態が下落すれば価格も下落する(図4)。これを式で表せば、状態が上昇した場合は、

$$v_i^{(n)}(T) < v_{i+1}^{(n+1)}(T), \quad i, n = 0, 1, 2, \dots, T = 1, 2, \dots \quad (19)$$

下落した場合は、

$$v_i^{(n)}(T) > v_{i+1}^{(n+1)}(T), \quad i, n = 0, 1, 2, \dots, T = 1, 2, \dots \quad (20)$$

である。この性質を満足するためには、ある条件を満たす必要がある。

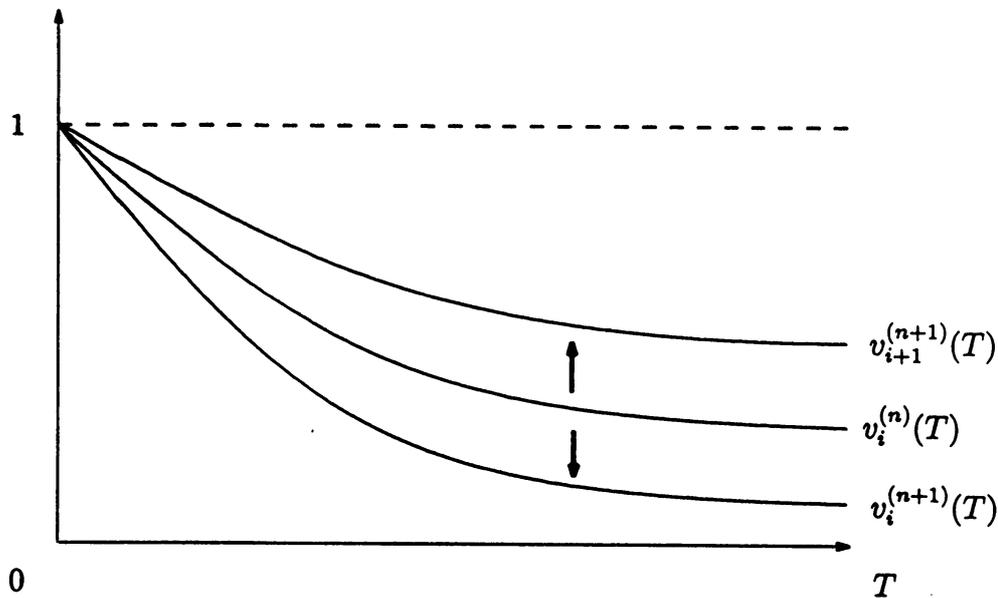


図4: 等しい満期をもつ割引国債の価格

定理 3 任意の $n = 0, 1, 2, \dots$ に対して、

$$1 < \frac{p(n)}{p(T+n)} < \alpha^T$$

を満たすとき、満期の等しい割引国債の価格に関して、

$$v_{i+1}^{(n+1)}(T) < v_i^{(n)}(T) < v_i^{(n+1)}(T), \quad i, n = 0, 1, 2, \dots, T = 1, 2, \dots$$

が成り立つ。

[証明]

まず、式(19)に関して、両辺の差を取ると、式(12)より、

$$\begin{aligned} v_{i+1}^{(n+1)}(T) - v_i^{(n)}(T) &= v(T)\alpha^{-(n-i-1)T} \prod_{k=0}^n \frac{p(k)}{p(T+k)} - v(T)\alpha^{-(n-i-1)T} \prod_{k=0}^{n-1} \frac{p(k)}{p(T+k)} \\ &= v(T)\alpha^{-(n-i-1)T} \prod_{k=0}^{n-1} \frac{p(k)}{p(T+k)} \left[\frac{p(n)}{p(T+n)} - 1 \right] \end{aligned}$$

となる。よって、

$$\frac{p(n)}{p(T+n)} > 1$$

が満たされれば、式(19)は成り立つ。同様に、式(20)を満たすための条件を導出する。まず両辺の差を取ると、式(12)より、

$$\begin{aligned} v_i^{(n)}(T) - v_i^{(n+1)}(T) &= v(T)\alpha^{-(n-i-1)T} \prod_{k=0}^{n-1} \frac{p(k)}{p(T+k)} - v(T)\alpha^{-(n-i)T} \prod_{k=0}^n \frac{p(k)}{p(T+k)} \\ &= v(T)\alpha^{-(n-i)T} \prod_{k=0}^{n-1} \frac{p(k)}{p(T+k)} \left[\alpha^T - \frac{p(n)}{p(T+n)} \right] \end{aligned}$$

となる。よって、

$$\frac{p(n)}{p(T+n)} < \alpha^T$$

が満たされれば、式(20)は成り立つ。□

例 1 これまで、モデルの満たすべき性質を述べ、個々の性質を満たすための条件を示してきたが、実際にそれらの条件を満たすような関数について考える。まず、 $u(1)$ 、 $d(1)$ を与える。 $u(0) = d(0) = 1$ であり、さらに $u(T)$ は T に関する増加関数、 $d(T)$ は T に関する減少関数であることを考慮して、

$$u(1) = 1 + \varepsilon, \quad d(1) = 1 - \varepsilon$$

とする。ただし、 ε は十分小さな正の数とする。式(9)、式(10)から、

$$\alpha = \frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon} > 1$$

$$\pi = \frac{1}{2}$$

となる。さらに、式(7)と式(8)から、

$$u(T) = \frac{2\alpha^T}{1 + \alpha^T} \quad (21)$$

$$d(T) = \frac{2}{1 + \alpha^T} \quad (22)$$

となる。ここで、

$$v(T) = e^{-\beta T}, \quad \beta > 0 \quad (23)$$

とする。これが、定理2、定理3を満たしていることを確認する。まず、式(16)に式(23)を代入すると、

$$e^\beta > u(T)$$

が得られる。 $u(T)$ は、式(21)から1以上2以下の値をとることから、 β を $\log 2$ 以上の値にしたやればよい。次に、式(21)、式(22)から、

$$\frac{p(n)}{p(T+n)} = \alpha^T \frac{1 + \alpha^n}{1 + \alpha^{T+n}}$$

となる。これは、式(3)を満たす。

例1でみたように、モデルを満足する関数が存在することは確認できたが、この例には、問題点がある。 $\frac{v(T)}{v(T+1)}$ が一定の値、しかも $\log 2$ 以上であると、 $v(T)$ は $T=1$ で0.5以下の値であり、 $T=2$ では0.25以下の値となり、モデルとしての性質は満たしているが、このままでは、現実に即したモデルとは言えない。

例2 ここでは、より現実的な例を考える。まず、例1と同様に、

$$u(1) = 1 + \varepsilon, \quad d(1) = 1 - \varepsilon$$

とする。さらに、

$$\frac{v(T)}{v(T+1)} = \frac{2\alpha^T}{1 + \alpha^T} (1 + \alpha^{-T-a})$$

とする。ただし、 $v(0) = 1$ であり、 a は充分大きな正数とする。右辺が1より大きいことから、 $v(T)$ は T に関する減少関数であり、減少の速度も例1と比べると、ずっと遅い。また、 $1 + \alpha^{-T-a} > 1$ であるから、

$$\frac{v(T)}{v(T+1)} > \frac{2\alpha^T}{1 + \alpha^T} = u(T)$$

となり、定理2を満足する。次に、

$$\frac{p(n)}{p(T+n)} = \frac{1 + \alpha^{-n-a}}{1 + \alpha^{-T-n-a}} > 1$$

であり、また、

$$\alpha^T - \frac{p(n)}{p(T+n)} = \frac{\alpha^T - 1}{1 + \alpha^{-T-n-a}} > 0$$

となるから、定理3も満たす。

5 信用リスクのある割引債（割引社債）

ここでは、信用リスクのある割引債（割引社債）の無裁定価格について考える。ここで、次のような仮定をおく。

1. 問題となる割引社債を発行している企業のデフォルト過程は、状態とは独立で時点のみ依存して決まる。ハザード関数を $h^{(n)}$ で表す。ここで、ハザード関数とは、時点 n までにデフォルトを起こしていないという条件の下で、その時点でデフォルトを起こす確率である。当然、割引国債の場合と同様のモデルを想定するので状態は1時点進むごとに上昇あるいは下落し、経路には独立であり、とりうる状態の数は1期間進むごとに1つずつ増える。リスク中立の上昇確率は π である。
2. 問題となる割引社債を発行している企業がデフォルトを起こした場合、その割引社債の保有者は、満期において額面に対して一定の回収率 δ を受け取ることができる。
3. デフォルトを起こした割引社債の価格を $\hat{V}_i^{(n)}(T)$ と表す。

以上の仮定の下で、割引社債のモデルは図5のように表せる。ただし、 $p_i^{(n+1)}$ 、 $\hat{p}_i^{(n+1)}$ は各状態への推移確率を表す。割引社債の無裁定価格を考える前に、発行元の企業がデフォルトを起こしてしまったときの割引社債の価格を考える。デフォルトが発生した場合、満期において確実に δ を受け取ることができるので、これは額面 δ の割引国債と見なすことができる。従って、

$$\hat{V}_i^{(n)}(T) = \delta v_i^{(n)}(T), \quad \forall i \in [0, n], \forall n, T \in \mathcal{N} \quad (24)$$

と表せる。ここで、 n 時点から $n+1$ 時点において、裁定機会が存在しないためには、次式が成立しなければならない。

$$V_i^{(n)}(T) = v_i^{(n)}(1) \left[p_{i+1}^{(n+1)} V_{i+1}^{(n+1)}(T-1) + \hat{p}_{i+1}^{(n+1)} \hat{V}_{i+1}^{(n+1)}(T-1) + p_i^{(n+1)} V_i^{(n+1)}(T-1) + \hat{p}_i^{(n+1)} \hat{V}_i^{(n+1)}(T-1) \right] \quad (25)$$

ここで、 $T=1$ の場合を考える。 $V_i^{(n)}(0) = 1$ 、 $\hat{V}_i^{(n)}(0) = \delta v_i^{(n)}(0) = \delta$ であることを考慮して、

$$\begin{aligned} V_i^{(n)}(1) &= v_i^{(n)}(1) \left[\pi [1 - h^{(n+1)}] + \pi h^{(n+1)} \delta \right. \\ &\quad \left. + (1 - \pi) [1 - h^{(n+1)}] + (1 - \pi) h^{(n+1)} \delta \right] \\ &= v_i^{(n)}(1) \left[[1 - h^{(n+1)}] + h^{(n+1)} \delta \right] \end{aligned} \quad (26)$$

となる。また、 $T=2$ のとき、式(24)、式(26)より

$$\begin{aligned} V_i^{(n)}(2) &= v_i^{(n)}(1) \left[\pi [1 - h^{(n+1)}] V_{i+1}^{(n+1)}(1) + \pi h^{(n+1)} \hat{V}_{i+1}^{(n+1)}(1) \right. \\ &\quad \left. + (1 - \pi) [1 - h^{(n+1)}] V_i^{(n+1)}(1) + (1 - \pi) h^{(n+1)} \hat{V}_i^{(n+1)}(1) \right] \\ &= v_i^{(n)}(1) \left[[1 - h^{(n+1)}] \left[[1 - h^{(n+2)}] + h^{(n+2)} \delta \right] \left[\pi v_{i+1}^{(n+1)}(1) + (1 - \pi) v_i^{(n+1)}(1) \right] \right. \\ &\quad \left. + h^{(n+1)} \delta \left[\pi v_{i+1}^{(n+1)}(1) + (1 - \pi) v_i^{(n+1)}(1) \right] \right] \end{aligned}$$

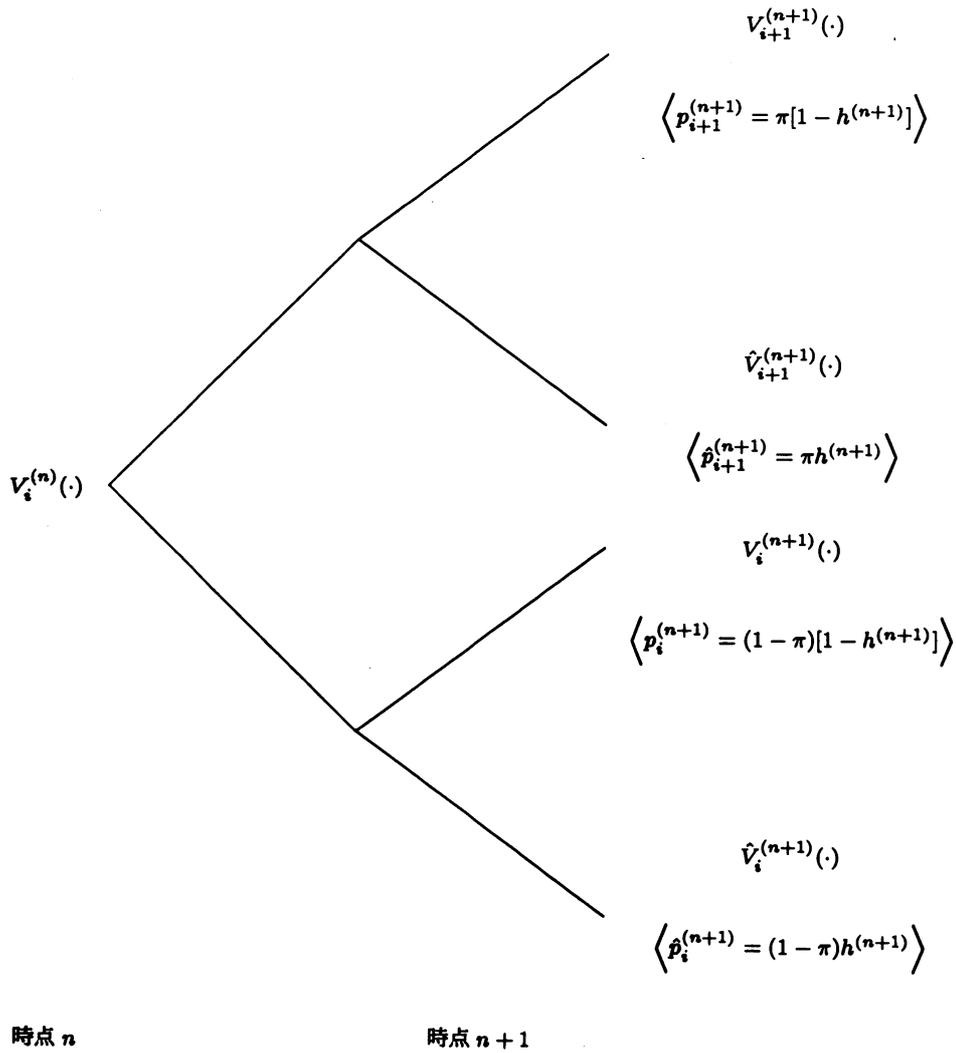


図 5: 割引社債の価格推移

となる。さらに、式(1)、式(2)、式(3)より、

$$\begin{aligned}
 V_i^{(n)}(2) &= v_i^{(n)}(1) \left[[1 - h^{(n+1)}][1 - h^{(n+2)}] + [1 - h^{(n+1)}]h^{(n+2)} + h^{(n+1)} \right] \delta \\
 &\quad \times \left[\frac{1 - d(1)}{u(1) - d(1)} \cdot \frac{v_i^{(n)}(2)}{v_i^{(n)}(1)} \cdot u(1) + \frac{u(1) - 1}{u(1) - d(1)} \cdot \frac{v_i^{(n)}(2)}{v_i^{(n)}(1)} \cdot d(1) \right] \\
 &= v_i^{(n)}(2) \left[[1 - h^{(n+1)}][1 - h^{(n+2)}] + [1 - h^{(n+1)}]h^{(n+2)} + h^{(n+1)} \right] \delta
 \end{aligned}$$

である。 $T = 1$ 及び $T = 2$ の結果から、

$$V_i^{(n)}(T) = v_i^{(n)}(T) \left[S^{(n)}(T) + [1 - S^{(n)}(T)] \delta \right] \quad (27)$$

と予想できる。ただし、

$$S^{(n)}(T) = \prod_{j=n+1}^{n+T} [1 - h^{(j)}] \quad (28)$$

とする。このとき、 $S^{(n)}(T)$ は、 n 時点までデフォルトを起こしていないとき、さらに T 期間デフォルトを起こさない確率。すなわち、 n 時点における $n+T$ までの生存確率である。この仮定の下で、次の式は容易に確認できる。

$$1 - S^{(n)}(T) = \sum_{j=n+2}^{n+T} h^{(j)} \prod_{k=n+1}^{j-1} [1 - h^{(k)}] + h^{(n+1)}$$

式(27)を証明するために、 T に関する数学的帰納法を用いる。 $T=2$ のとき式(27)は成立することは明らかである。そこで、 $T=t$ のとき式(27)が成立すると仮定する。つまり、

$$V_i^{(n)}(t) = v_i^{(n)}(t) \left[S^{(n)}(t) + [1 - S^{(n)}(t)] \delta \right] \quad (29)$$

と仮定したとき、 $V_i^{(n)}(t+1)$ が式(27)を満たすことを証明する。まず、式(25)より、

$$\begin{aligned} V_i^{(n)}(t+1) &= v_i^{(n)}(1) \left[\pi [1 - h^{(n+1)}] V_{i+1}^{(n+1)}(t) + \pi h^{(n+1)} \hat{V}_{i+1}^{(n+1)}(t) \right. \\ &\quad \left. + (1 - \pi) [1 - h^{(n+1)}] V_i^{(n+1)}(t) + (1 - \pi) h^{(n+1)} \hat{V}_i^{(n+1)}(t) \right] \end{aligned}$$

である。これに、式(24)、式(29)を代入すると、

$$\begin{aligned} V_i^{(n)}(t+1) &= v_i^{(n)}(1) \left[[1 - h^{(n+1)}] \left[S^{(n+1)}(t) + [1 - S^{(n+1)}(t)] \delta \right] \right. \\ &\quad \left. \times \left[\pi v_{i+1}^{(n)}(t) + (1 - \pi) v_i^{(n)}(t) \right] + h^{(n+1)} \delta \left[\pi v_{i+1}^{(n+1)}(t) + (1 - \pi) v_i^{(n+1)}(t) \right] \right] \end{aligned}$$

となる。さらに、式(1)、式(2)、式(3)を利用して、

$$\begin{aligned} V_i^{(n)}(t+1) &= v_i^{(n)}(1) \left[S^{(n)}(t+1) + [1 - S^{(n)}(t+1)] \delta \right] \\ &\quad \times \left[\frac{1 - d(t)}{u(t) - d(t)} \cdot \frac{v_i^{(n)}(t+1)}{v_i^{(n)}(1)} \cdot u(t) + \frac{u(t) - 1}{u(t) - d(t)} \cdot \frac{v_i^{(n)}(t+1)}{v_i^{(n)}(1)} \cdot d(t) \right] \\ &= v_i^{(n)}(t+1) \left[S^{(n)}(t+1) + [1 - S^{(n)}(t+1)] \delta \right] \end{aligned}$$

となる。よって、 $T=t+1$ のときも式(27)を満たすことが分かる。

定理 4 割引社債の無裁定価格は、満期の等しい割引国債の価格と生存確率及び回収率を用いて、

$$V_i^{(n)}(T) = v_i^{(n)}(T) \left[S^{(n)}(T)(1 - \delta) + \delta \right] \quad (30)$$

と表せる。

注 1 木島正明 [6] では、割引国債のスポット・レートとデフォルト過程を、互いに独立なある確率過程に従うと仮定した Jarrow - Turnbull [3] のモデルから、割引社債の無裁定価格は、

$$V(t, T) = v(t, T) \left[\delta + (1 - \delta) E_t[e^{-H(t, T)}] \right], \quad t \leq T \quad (31)$$

でえられるとしている。ただし、 $v(t, T)$ を時点 t における満期 T の割引国債の価格、 $V(t, T)$ を割引社債の価格、 δ を回収率、 $H(t, T)$ は累積デフォルト率を表している。また、 E_t は、時点 t での条件付期待値を表している。

式(30)と式(31)を比較すると、非常に似た結果といえる。しかし、前者は、割引国債の価格を2項格子モデルによってモデル化したものであり、一方後者は、スポット・レートを確認率微分方程式でモデル化したものであり、その整合性に関しては、今後の課題である。

6 割引社債の無裁定価格の比較静学分析

式(30)で与えられる割引社債の無裁定価格に関して、比較静学分析を通して、その特徴を見る。

6.1 状態 i に関する比較静学分析

まず、式(30)の $[S^{(n)}(T)(1 - \delta) + \delta]$ の部分に注目すると、これは、 n と T の関数であるから、 i に関して見たとき定数であり、ハザード関数の形状に関わらず、常に正の値を取ることが分かる。よって、割引社債の無裁定価格は、 i に関する増加関数である。

i は経済の状態を表す変数であり、割引債の価格がより高い状態、つまり市場利子率が低い状態のとき、 i はより大きな値を取るように仮定しているのので、当然の結果と言える。

6.2 満期 T に関する比較静学分析

ここではまず、 $S^{(n)}(T)$ が満期 T に関してどのような特徴を持つか検討する。 $S^{(n)}(T)$ は、式(28)で表される。この式から、すべての $T > 0$ に関して次の結果が得られる。

$$\begin{aligned} S^{(n)}(T+1) &= \prod_{j=n+1}^{n+T+1} [1 - h^{(j)}] \\ &= [1 - h^{(n+T+1)}] \prod_{j=n+1}^{n+T} [1 - h^{(j)}] \\ &= [1 - h^{(n+T+1)}] S^{(n)}(T) < S^{(n)}(T) \end{aligned}$$

よって $S^{(n)}(T)$ は、満期 T に関する減少関数ということがわかる。ここで、割引国債の無裁定価格 $v_i^{(n)}(T)$ も満期 T に関する減少関数であるから、式(30)より、割引社債の無裁定価格 $V_i^{(n)}(T)$ も満期 T に関する減少関数である。

これは、満期が長い割引社債の価格は、割引国債の価格の場合と同様に、より低くなっているということを表している。

6.3 時点 n に関する比較静学分析

最後に、時点 n に関してであるが、割引国債のときと同様に、 $v_i^{(n)}(T)$ と $v_{i+1}^{(n+1)}(T)$ 及び $v_i^{(n+1)}(T)$ の比較により、その特徴をみる。まず、 $S^{(n)}(T)$ を n に関して見ると、

$$\begin{aligned} S^{(n+1)}(T) &= \prod_{j=n+2}^{n+T+1} [1 - h^{(j)}] \\ &= \frac{1 - h^{(n+T+1)}}{1 - h^{(n+1)}} \prod_{j=n+1}^{n+T} [1 - h^{(j)}] \\ &= \frac{1 - h^{(n+T+1)}}{1 - h^{(n+1)}} S^{(n)}(T) \end{aligned} \quad (32)$$

となる。しかし、これだけでは、 $S^{(n)}(T)$ と $S^{(n+1)}(T)$ の大小関係は分からない。そこで、ハザード関数 $h^{(n)}$ を次の3つのタイプに分類して考える。(図6)

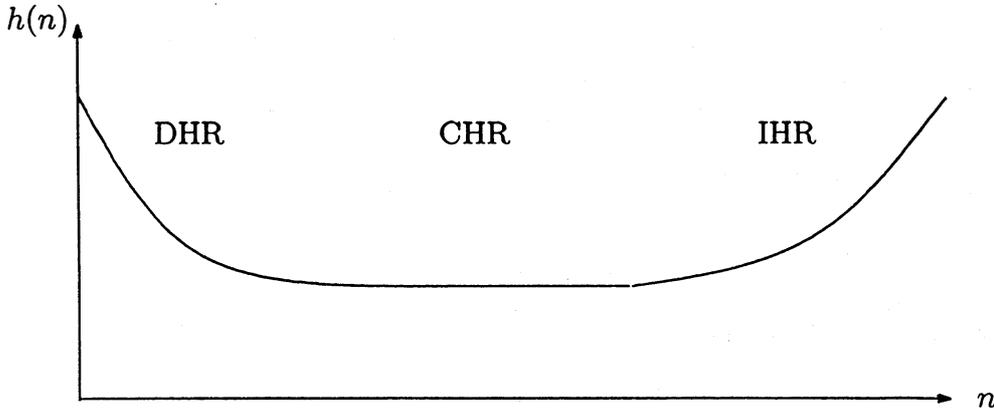


図 6: バスタブ型ハザード関数

- IHR(Increasing Hazard Rate)

ハザード関数 $h^{(n)}$ が時点 n に関して単調非減少のとき、これを IHR と呼ぶ。この場合、任意の $n, m (0 < n < m)$ に対して、

$$h^{(n)} \leq h^{(m)}$$

が成り立つ。よって、式(32)より、

$$S^{(n+1)}(T) \leq S^{(n)}(T)$$

となる。つまり、 $S^{(n)}(T)$ は n に関する減少関数となる。

- CHR(Constant Hazard Rate)

ハザード関数 $h^{(n)}$ が一定のとき、これを CHR と呼ぶ。この場合、任意の $n (> 0)$ に対して、

$$h^{(n)} = h$$

(h ; 一定) とおくことができる。よって、式(32)より、

$$S^{(n+1)}(T) = S^{(n)}(T)$$

となる。つまり、 $S^{(n)}(T)$ は n に関しては、定数となる。

- DHR(Decreasing Hazard Rate)

ハザード関数 $h^{(n)}$ が時点 n に関して単調非増加のとき、これをDHRと呼ぶ。この場合、任意の $n, m (0 < n < m)$ に対して、

$$h^{(n)} \geq h^{(m)}$$

が成り立つ。よって、式(32)より、

$$S^{(n+1)}(T) \geq S^{(n)}(T)$$

となる。つまり、 $S^{(n)}(T)$ は n に関する減少関数となる。

ここで、式(19)、式(20)と式(30)から次のことが確認できる。IHRの場合は、

$$V_i^{(n)}(T) > V_i^{(n+1)}(T)$$

は成り立つが、 $V_i^{(n)}(T)$ と $V_{i+1}^{(n+1)}(T)$ の大小関係については、はっきりしない。また、CHRの場合は、

$$V_i^{(n+1)}(T) < V_i^{(n)}(T) < V_{i+1}^{(n+1)}(T)$$

が成り立つ。最後に、DHRの場合は、

$$V_i^{(n)}(T) < V_{i+1}^{(n+1)}(T)$$

は成り立つが、 $V_i^{(n)}(T)$ と $V_i^{(n+1)}(T)$ の大小関係については、はっきりしない。

今、大小関係がはっきりしなかった2つのケース、つまり、IHRのときの $V_i^{(n)}(T)$ と $V_{i+1}^{(n+1)}(T)$ の関係と、DHRのときの $V_i^{(n)}(T)$ と $V_i^{(n+1)}(T)$ の関係について考えると、共に、時点が経過したことによる割引国債の価格の動きと、デフォルトの発生に伴う期待回収率が反対方向にシフトした場合であることが分かる。したがって、この2つのケースについては、今挙げた2つの要因が割引社債の価格に与える影響の度合いに依存すると考えられる。

7 おわりに

この論文では、Ho-Leeの2項格子モデルに新たに2つの性質を加え、さらに信用リスクをもつ割引債の無裁定価格を導出した。この結果は、5節の注1でも触れたように、Jarrow-Turnbullが連続時間のモデルとして、フォワード・レートを確率微分方程式で与えたモデルの結果と類似していることが分かったが、その整合性に関しては解決していない。実際の取引をモデル化する場合、連続時間のモデルの方が扱いやすいが、その特徴を見るには、離散時間のモデルの方が理解しやすい場合が多いため、この2つのモデルの整合性を見出すことが今後の課題となる。

参考文献

- [1] Cox, J.C., S.A. Ross, and M. Rubinstein (1979), Option Pricing; A Simplified Approach, *Journal of Financial Economics*, 7, 229-263
- [2] Ho, T.S., and S. Lee (1986), Term structure movements and pricing interest rate contingent claims, *Journal of Finance*, 41, 1011-1028
- [3] Jarrow, R.A., and S.M. Turnbull (1995), Pricing derivatives on financial securities subject to credit risk, *Journal of Finance*, 50, 53-86
- [4] 木島正明 (1998), 金融リスクの計量化[下]: クレジット・リスク, 金融財政事情研究会
- [5] 木島正明 (1999), 期間構造モデルと金融デリバティブ, 朝倉書店
- [6] 木島正明, 小守林克哉 (1999), 信用リスク評価の数理モデル, 朝倉書店