

共鳴器列を取り付けた管路内の非線形音波の伝播と 熱音響効果による増幅

阪大院 基礎工 杉本信正 (Nobumasa SUGIMOTO)
Graduate School of Engineering Science, Osaka University

1. はじめに

管路内の気体中を伝播する非線形音波において、管の長手に沿ってヘルムホルツ共鳴器列を取り付けると衝撃波の発生を抑制できることが知られている [1]。特に、粘性や熱伝導性が無視できる場合には、音響孤立波の伝播が可能になる [2,3]。音響孤立波は圧縮のパルス波で、波形を変えずに一定の速度で伝播する。孤立波内部の気体は密度、温度も断熱的に上昇し、また伝播の向きに変位するので、孤立波は質量、運動量、エネルギーを遠方まで運ぶ能力を有している [4]。共鳴器列を取り付けなければ、パルス波は非線形性により突っ立ち、伝播するにつれ衝撃波を形成する。衝撃波が発生すれば、波は壁面摩擦などの線形減衰とは別に非線形減衰をうけ急速に減衰する。このため衝撃波はエネルギーを定常的に輸送する能力を持たない。孤立波のみならず一般に衝撃波を発生させずに大きな圧力変動を作り出すことは色々なメリットがある。さらに、その圧力変動が増幅できれば応用が広がることが期待される。一昨年この研究会で、管壁に沿って温度勾配を設けることによって、音響孤立波のエネルギー流束が増幅できる可能性があることを示した [5]。そこで、本報告では具体的に孤立波などの圧縮パルス波の発展を求めることにより、増幅が可能かどうか調べる。

圧力波の増幅のメカニズムを述べる前に、まず減衰のメカニズムについて考えてみる。普通音響レイノルズ数が十分大きいので、減衰は主に境界層を介した管壁での摩擦に起因する。境界層は管の直径に比べて遙かに薄く、その外部である管の内部（主流という）では平面波を仮定できる。境界層外縁での管の半径内向き速度成分 $v_b(x, t)$ は、主流部の速度 $u(x, t)$ (x, t はそれぞれ軸方向座標と時間) を用いて次のように表すことができる [5] :

$$v_b = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{\sqrt{Pr}}\right) \sqrt{\nu_e} \frac{\partial^{-\frac{1}{2}}}{\partial t^{-\frac{1}{2}}} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\sqrt{\nu_e}}{\sqrt{Pr}(1 + \sqrt{Pr})} \left(\frac{1}{T_e} \frac{dT_e}{dx}\right) \frac{\partial^{-\frac{1}{2}} u}{\partial t^{-\frac{1}{2}}}. \quad (1.1)$$

ただし、 $\nu_e(x)$ は動粘性係数であり、 γ, Pr はそれぞれ比熱比とプラントル数である。管壁の温度 $T_e(x)$ が軸方向に変わらないとすると、第 2 項は落ち、 ν_e は一定である。非整数 $\pm 1/2$ 階の微分は以下のように定義される [6,7] :

$$\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^t \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} \frac{\partial^{\alpha+\frac{1}{2}}}{\partial \tau^{\alpha+\frac{1}{2}}} u(x, \tau) d\tau. \quad (1.2)$$

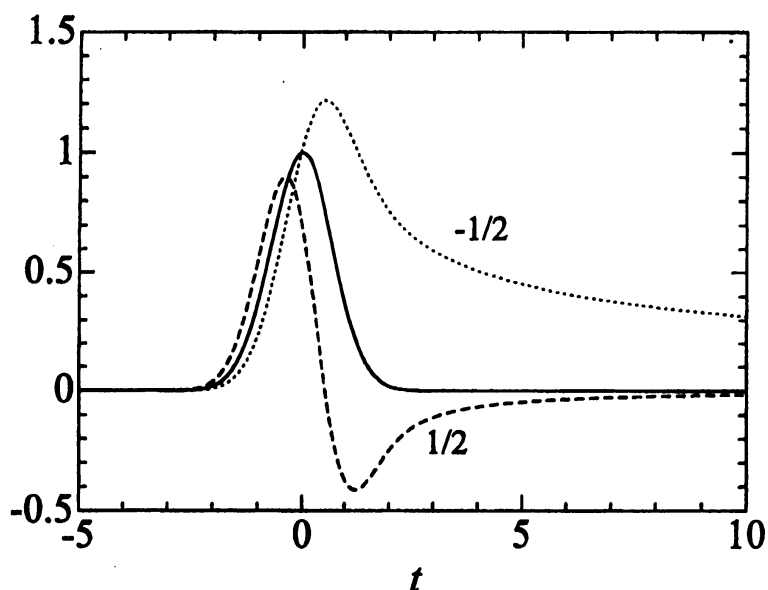


図1：ガウス分布型関数 $\exp(-t^2)$ の $\pm 1/2$ 階微分導関数の形

ここで、 α は $1/2$ または $-1/2$ とする。例として、 u がガウス分布型パルス関数 $\exp(-t^2)$ の場合の $\pm 1/2$ 階微分導関数を図1に示す。パルス背後 ($t \gg 1$) に緩和効果による代数的に減衰する尻尾が現れるのがこの導関数の大きな特徴である。

圧力波の摩擦による減衰は、主流部が v_b を介して外に仕事 $-p'v_b$ をすることによって解釈できる。実際、主流部の超過圧力 p' がガウス分布型に上昇したとすると、第1項の $\partial u / \partial x$ は線形化された連続の式から $-(\rho_e a_e^2)^{-1} \partial p' / \partial t$ とかけるので、圧力の $1/2$ 階微分になる。ここで、 $\rho_e(x)$ 、 $a_e(x)$ は平衡状態での気体の密度、局所線形音速であり、1階微分の $-1/2$ 階微分は $1/2$ 階微分になることを用いた。このとき符号が反転するので、図1から明らかのように、 $-p'v_b$ の時間積分が正になる。すなわち主流部は全体として外に仕事をする事が分かる、ただ、 $1/2$ 階導関数が負になる領域があるので、そのときには境界層から逆に仕事をされることになる。これは、境界層がもつ弾性によるものである。主流が外に仕事をする結果、圧力波の減衰が生じる。

これに対し、壁面に温度勾配があると(1.1)の第2項からの寄与が加わる。管の中を一方方向に伝播する圧力波では、超過圧力と速度は比例し、その比 p'/u が音響インピーダンスを $\rho_e a_e$ を与える。この関係を用いると、 $-1/2$ 階導関数はパルス波に対しては常に正となる。そこで適当な正の温度勾配を設けると、第1項の負の部分打ち消し、 v_b を正にできる。すると境界層が圧力の高い主流部に対して仕事をする事になり、エネルギーの増幅が生じる。これが熱音響効果によるエネルギー増幅メカニズムのエッセンスである。本報告では、以前導いた式を用いて、パルス波の空間発展を求め、シナリオ通りに実際エネルギー流束が増幅されるか調べる。

2. 基礎方程式

基礎方程式の導出については文献[5]を参照されたい。十分長い管の中の一方方向伝播を考え、境界層や共鳴器取り付け部近傍の領域を除いた主流部では平面波を仮定する。共鳴器取り付け間隔は十分短いと仮定し、共鳴器列を連続体近似すると、基礎方程式は次のように与えられる：

$$\frac{\partial f}{\partial X} - f \frac{\partial f}{\partial \theta} + \frac{1}{4H_e} \frac{dH_e}{dX} f = -\delta_e \frac{\partial^{\frac{3}{2}} f}{\partial \theta^{\frac{3}{2}}} + \frac{\lambda_e}{H_e} \frac{dH_e}{dX} \frac{\partial^{-\frac{1}{2}} f}{\partial \theta^{-\frac{1}{2}}} + \beta \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} - K \frac{\partial g}{\partial \theta}, \quad (2.1)$$

および

$$\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2} + \delta_{re} \frac{\partial^{\frac{3}{2}} g}{\partial \theta^{\frac{3}{2}}} + \Omega_e g = \Omega_e f. \quad (2.2)$$

ここで 3/2 階微分は 1/2 階微分を 1 階微分したもので定義される。 f, g はそれぞれ主流部での超過圧 p' 、共鳴器空洞内の超過圧 p'_c に相当し、次のように無次元化されている：
 $\varepsilon f = [(\gamma + 1)/2\gamma] p'/p_0$, $\varepsilon g = [(\gamma + 1)/2\gamma] p'_c/p_0$ (ただし、 ε ($0 < \varepsilon \ll 1$) は非線形性の程度を表す小さなパラメータである)。一方、独立変数 X, θ はそれぞれ遠方場座標および局所線形音速 a_e で測った遅延時間を表す：

$$X = \varepsilon \omega \int_0^x \frac{dx}{a_e} \quad \text{および} \quad \theta = \omega \left(t - \int_0^x \frac{dx}{a_e} \right). \quad (2.3)$$

ここで、 ω は代表角周波数である。 $H_e(X)$ は $X = 0$ での温度 T_0 で無次元化した管壁温度 T_e/T_0 を表し、 X の与えられた関数とする。方程式の中の係数は次のように定義される：

$$\left. \begin{aligned} \delta_e &= C \frac{\sqrt{\nu_e/\omega}}{\varepsilon R^*}, \quad \lambda_e = \left(\frac{1}{2} C + C_T \right) \frac{\sqrt{\nu_e/\omega}}{R^*}, \quad \beta = \frac{\nu_{de} \omega}{2\varepsilon a_e^2}, \\ \delta_{re} &= \frac{2\sqrt{\nu_e/\omega}}{r}, \quad K = \frac{\kappa}{2\varepsilon}, \quad \Omega_e = \left(\frac{\omega_e}{\omega} \right)^2. \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

ここで、 C および C_T はそれぞれ定数 $1 + (\gamma - 1)/\sqrt{Pr}$, $1/\sqrt{Pr}(1 + \sqrt{Pr})$ で、 ν_{de} は音の拡散係数である。 R^* は管の換算半径で実際の半径より僅かに大きい、それに等しいとおいても差し支えない。 r はスロート半径である。 κ ($\ll 1$) は共鳴器列の大きさを表すパラメータであり、空洞体積を取り付け間隔当たりの管の体積でわったものである。 ω_e は共鳴器の固有角振動数で、 X に依存する。添え字 e を付けた平衡状態での各量は管壁の温度によって変化し、 ν_e, ν_{de} は H_e に比例し、 a_e, ω_e は $\sqrt{H_e}$ に比例する。 λ_e の定義で、文献[5]では $C/2$ が落ちていることに注意する。

3. 非線形音波の発展と増幅

3.1. 方程式の規格化

時間, 空間的に局在したパルスを $X = 0$ で与えその発展を調べる. ある場所を通過する全エネルギー流束密度 $p'u$ の変化率は, (2.1), (2.2) から次の様に与えられる:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dX} \int_{-\infty}^{\infty} H_e^{1/2} f^2 d\theta &= 2H_e^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\left(\delta_e \frac{\partial f}{\partial \theta} + \frac{\lambda_e}{H_e} \frac{dH_e}{dX} f \right) \frac{\partial^{-1/2} f}{\partial \theta^{-1/2}} \right. \\ &\quad \left. - \beta \left(\frac{\partial f}{\partial \theta} \right)^2 - \frac{\delta_{re} K}{\Omega_e} \frac{\partial g}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial^{3/2} g}{\partial \theta^{3/2}} \right] d\theta. \end{aligned} \quad (3.1)$$

ここで, $|\theta| \rightarrow \infty$ で $f, \partial f/\partial \theta, g \rightarrow 0$ を用いた. 音の拡散係数 ν_{de} による β をもつ項は負で, 明らかにエネルギー流束を減少させるように作用するが, 他の項に比べて遙かに小さく無視できる. また最後の項は共鳴器スロート部での摩擦からの寄与であり, エネルギー流束を減少させることは物理的に明らかである. そこで全エネルギー流束を増幅させるためには, f が正とすると, その $-1/2$ 階微分は定義より常に正となり, この微分と右辺第1項の丸括弧の中の量との積の積分が正で, しかもスロート部の摩擦の項を加えても正であることが要求される. そのように温度勾配を設けることができれば, 増幅は可能である. ちなみに, 右辺の散逸効果を全て無視すればエネルギー流束は伝播に際して保存されることになる. このようなもう一つの積分量として

$$\frac{d}{dX} \int_{-\infty}^{\infty} H_e^{1/4} f d\theta = H_e^{1/4} \int_{-\infty}^{\infty} \left(-\delta_e \frac{\partial^{1/2} f}{\partial \theta^{1/2}} + \frac{\lambda_e}{H_e} \frac{dH_e}{dX} \frac{\partial^{-1/2} f}{\partial \theta^{-1/2}} \right) d\theta \quad (3.2)$$

があるが, 左辺の物理的な意味はない.

さて, 増幅の予想を初期値問題を解いて確かめてみる. その前に方程式(2.1), (2.2) を以下のように置いて規格化する.

$$(f, g) \rightarrow (Kf, Kg) \quad \text{および} \quad (X, \theta) \rightarrow (X/K\sqrt{\Omega_{e0}}, \theta/\sqrt{\Omega_{e0}}). \quad (3.3)$$

ここで, 添え字0は $X = 0$ での値を示す. この置き換えで, K および Ω_e はそれぞれ1, H_e と置き, また θ, X は次のように再定義される:

$$\theta = \omega_{e0} \left(t - \int_0^x \frac{dx}{a_e} \right), \quad \text{および} \quad X = \frac{\kappa \omega_{e0}}{2} \int_0^x \frac{dx}{a_e}. \quad (3.4)$$

残りのパラメータ $\delta_e, \lambda_e, \delta_{re}, \beta$ は以下のようになる:

$$(\delta_e, \lambda_e, \delta_{re}, \beta) \rightarrow \left(\frac{2C\sqrt{\nu_e/\omega_{e0}}}{\kappa R^*}, \frac{(C + 2C_T)\sqrt{\nu_e/\omega_{e0}}}{\kappa R^*}, \frac{2\sqrt{\nu_e/\omega_{e0}}}{r}, \frac{\nu_{de}\omega_{e0}}{\kappa a_e^2} \right). \quad (3.5)$$

ν_e は H_e に比例するので、次の関係が成り立つ:

$$(\delta_e, \lambda_e, \delta_{re}) = (\delta_{e0}, \lambda_{e0}, \delta_{re0})\sqrt{H_e}. \quad (3.6)$$

ここで、添え字 0 は $X = 0$ での値を示し、 β は H_e には依存しない。

次に壁面温度 $T_e(x)$ として、直線分布を考える:

$$T_e(x) = T_0 \left(1 + \frac{x}{l}\right). \quad (3.7)$$

ここで l は代表長さである。このとき $H_e(X)$ は定義(3.4)に従うと

$$H_e(X) = \left(1 + \frac{a_{e0}}{\kappa\omega_{e0}l}X\right)^2 \quad (3.8)$$

と書ける。計算に用いるパラメータの値は、音響孤立波を発生させた実験装置[3]を想定し、以下のように選ぶ。大気圧下の室温を基準にとり、管の半径を 4cm, スロート半径を 3.6mm とし、 $\kappa = 0.2$, $\varepsilon = 0.1$, $\omega_{e0}/2\pi = 238$ Hz とすると、パラメータの値は、 $\delta_{e0} = 0.018$, $\delta_{re0} = 0.053$, $\lambda_{e0} = 0.003$ となる。また、温度分布には $a_{e0}/\kappa\omega_{e0}l = 1/4$ を仮定する。このとき、 l は 4.6 m に相当し、 $x = l$ は $X = 1.66$ に相当する。

3.2. 音響孤立波の場合

音響孤立波解はパラメータ s ($0 < s < 1$) を用いて次のように与えられる[2]:

$$-4 \tan^{-1} \sqrt{\frac{f_+ - f}{f - f_-}} + \frac{2s}{\sqrt{-f_+ f_-}} \times \log \left| \frac{[\sqrt{-f_-(f_+ - f)} - \sqrt{f_+(f - f_-)}]^2}{(f_+ - f_-)f} \right| = |\theta|. \quad (3.9)$$

ここで f_{\pm} は

$$f_{\pm} = -2 \left(s - \frac{2}{3}\right) \pm \sqrt{-\frac{4}{3}s + \frac{16}{9}} \quad (3.10)$$

である。なお、 g の初期値は(2.2)の解として求まるが、散逸項が小さいので、その解は厳密な孤立波解 $f^2/2 + sf$ に近い。

これら初期値に対する $H_e^{1/4}f$ の積分値 I_1 と、全エネルギー流束に相当する $H_e^{1/2}f^2$ の積分値 I_2 は以下のように求まる:

$$I_1(X=0) = \int_{-\infty}^{\infty} f d\theta = 8\sqrt{s(1-s)} + \left(\frac{16}{3} - 4s\right) \cos^{-1} \frac{(-2+3s)}{\sqrt{4-3s}}, \quad (3.11)$$

および

$$I_2(X=0) = \int_{-\infty}^{\infty} f^2 d\theta = 16\sqrt{s(1-s)^3} + \frac{8}{3}(1-s)(4-3s) \cos^{-1} \frac{(-2+3s)}{\sqrt{4-3s}}. \quad (3.12)$$

ただし、 $H_e(0) = 1$.

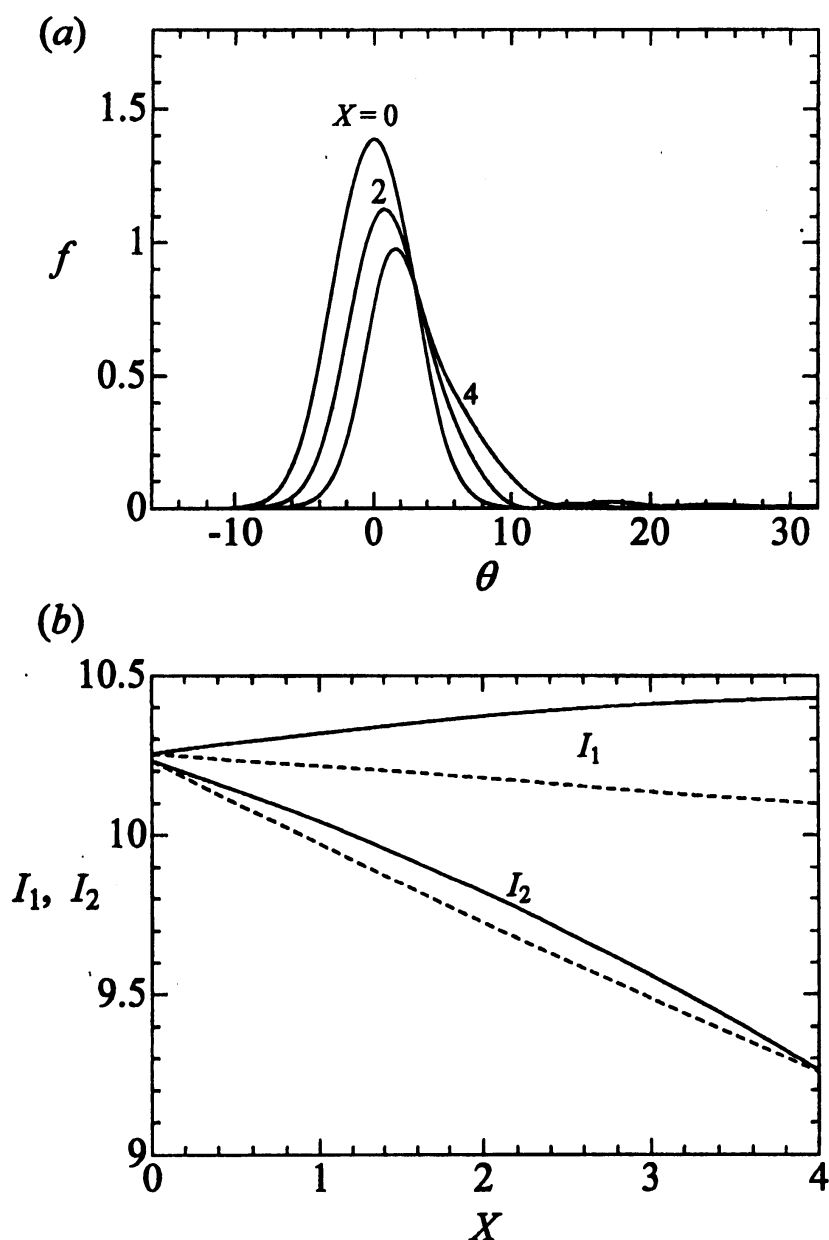


図2：音響孤立波($s = 0.5$)を初期値としたときの発展の様子：(a) f の波形と(b) 積分量 I_1, I_2 の変化

パラメータ $s = 0.5$ の場合の結果を図2に示す。図2(a)に f の波形を示す。壁面温度が上昇するにつれ、圧力の低下が見られるが分裂には至っていない。しかし流速は $\sqrt{H_e}f$ に比例するので、逆に増加することに注意する。図2(b)に、 I_1 および I_2 の変化の様子を示す。破線はそれぞれ、温度勾配を与えない場合である。 $s = 0.5$ では、 $X = 0$ での I_1 と I_2 は等しく、約10.30である。勾配をつけない場合と比較すると減衰は幾分抑えられるものの、増幅は認められない。

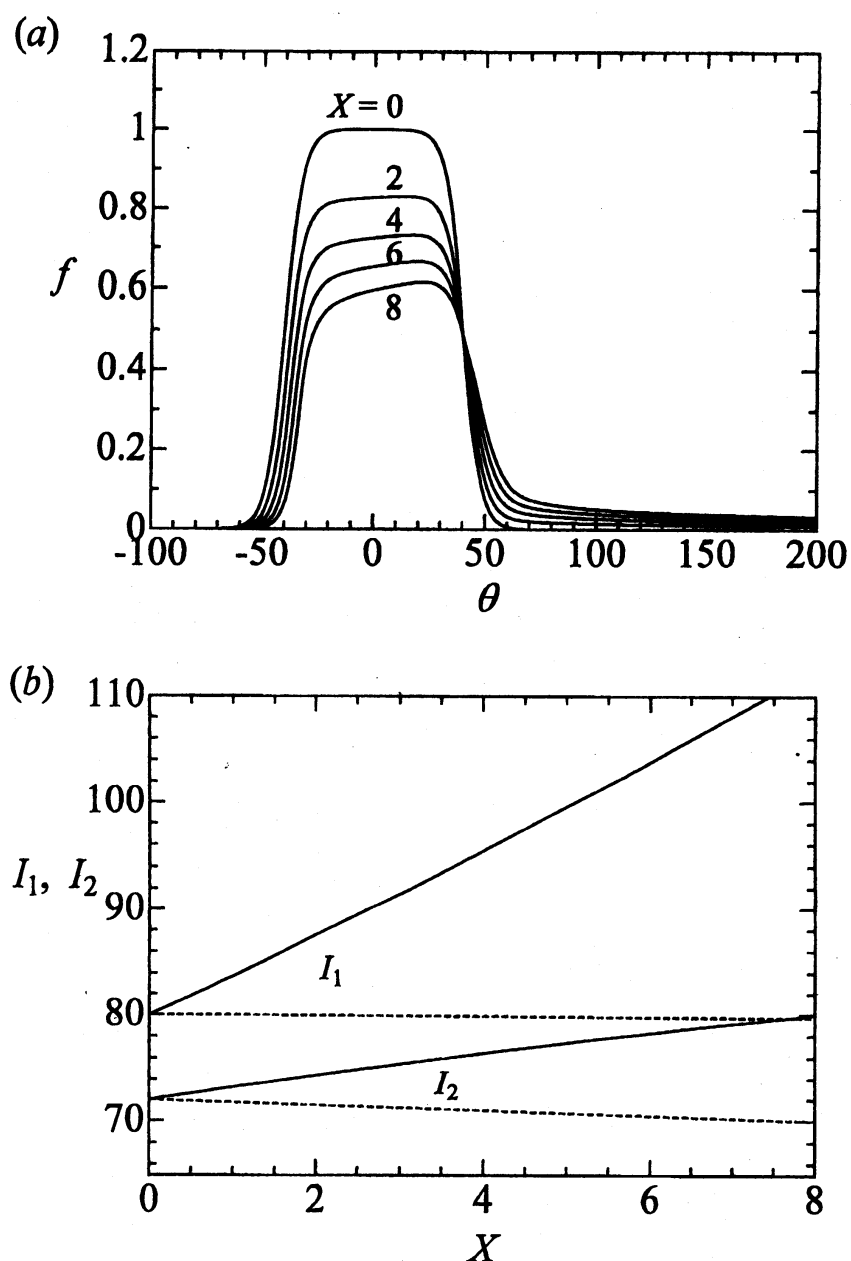


図3：方形パルス波を初期値としたときの発展の様子：(a) f の波形と (b) 積分量 I_1, I_2 の変化

3.3. 方形パルス波の場合

孤立波は増幅できなかったが、代わりに次の方形パルス波を考えてみる：

$$f(\theta, X=0) = \frac{1}{2} \left[\tanh\left(\frac{\theta}{b} + \frac{\tau}{2}\right) - \tanh\left(\frac{\theta}{b} - \frac{\tau}{2}\right) \right]. \quad (3.13)$$

ここで b は正として、 τ はパルス幅で自由に選べる。この場合の I_1, I_2 の初期値は

$$I_1(X=0) = \int_{-\infty}^{\infty} f d\theta = b \log \left[\frac{1 + \tanh(\tau/2)}{1 - \tanh(\tau/2)} \right] \approx b\tau \text{ for } \tau \gg 1, \quad (3.14)$$

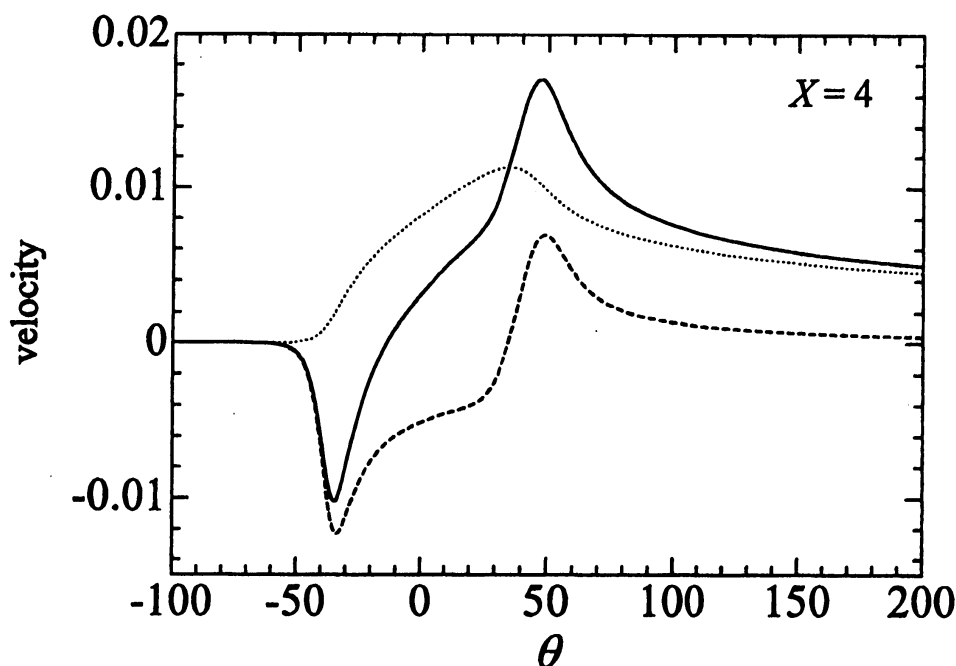


図4：境界層外縁での速度 v_b に相当する(2.1)の右辺第1項と第2項およびその和の $X = 4$ での値をそれぞれ破線，点線，実線で示す。

および

$$I_2(X=0) = \int_{-\infty}^{\infty} f^2 d\theta = \frac{b\tau}{2} \left(\tanh \frac{\tau}{2} + \coth \frac{\tau}{2} \right) - b \approx b(\tau - 1) \text{ for } \tau \gg 1. \quad (3.15)$$

図3に $b=8, \tau=10$ としたときの結果を示す。図3(a)に f の波形を示し，図3(b)に積分量の変化の様子を示す。破線は温度勾配のない場合を表す。圧力の減衰が見られるが波形の分裂は発生していない。しかし尻尾の存在が確認される。エネルギーの初期値は約72と，孤立波の約7倍の大きさがある。この例では増幅が生じ， $X=4$ で数パーセント増加する。積分量 I_1 の増幅は顕著である。その定義から分かるように，共鳴器スロート部の摩擦は関与していないので，温度勾配の増幅効果が顕著に現れる。

最後に，図4に境界層外縁での速度 v_b に相当する(2.1)の右辺第1項と第2項およびその和の $X=4$ での値を示す。実線は両者の和，破線および点線はそれぞれ第1項，第2項の大きさを表す。これから分かるように，圧力波は最初境界層を壁に向かって押しつけ仕事をしますが，圧力のピークである $\theta=0$ から後は仕事をされるようになり，増幅が得られる。パルスの幅を広くすると，第2項の効果が大きくなり大きな増幅ができる。

4. おわりに

管壁の温度勾配による熱音響効果によって、圧縮パルス波のエネルギー流束が増幅できることを理論上確認した。孤立波の増幅は難しいが、方形パルス波では、数パーセント程度のエネルギー流束の増幅ができる。音響孤立波の増幅はしかし原理的に不可能と言うわけではない。ここでは熱音響効果を増大させるための工夫、例えば管の中に薄くて長い平板を軸方向におき、それに沿って温度勾配を設けることは考えなかった。これを用いれば管の半径が実質的に小さくなるので散逸効果が大きくなるが、増幅効果も大きくなり、孤立波の増幅の可能性は否定できない。

ここでは直線的に温度が上昇する場合の増幅だけを扱った。もしループ状に閉じた管路に沿って温度の勾配をつけ、その中をパルス波を一周させたときに、全エネルギー流束が増幅できるかを考えると面白い。エネルギー流束が正味増加すると、熱から運動エネルギーへの変換ができたことになる。このエネルギーの増加分を取り出し、変換を周期的に行わせるサイクルを構築できれば、これは原動機として作動することになる。いま増幅が可能になったことでその第1段階はクリアできた。

参考文献

1. Sugimoto, N. "Propagation of nonlinear acoustic waves in a tunnel with an array of Helmholtz resonators," *J. Fluid Mech.*, **244**, 55-78 (1992).
2. Sugimoto, N. "Acoustic solitary waves in a tunnel with an array of Helmholtz resonators," *J. Acoust. Soc. Am.*, **99**, 1971-1976 (1996).
3. Sugimoto, N., Masuda, M., Ohno, J. & Motoi, D. "Experimental demonstration of generation and propagation of acoustic solitary waves in an air-filled tube," *Phys. Rev. Lett.*, **83**, 4053-4056 (1999).
4. Sugimoto, N. "Mass, momentum, and energy transfer by the propagation of acoustic solitary waves," *J. Acoust. Soc. Am.*, **107**, 2398-2405 (2000).
5. 杉本信正 "音響孤立波の伝播に及ぼす加熱・冷却効果," 京都大学数理解析研究所講究録 #1092 大自由度・強非線形の波動現象の数理解析, 100-109 (1999).
6. 杉本信正 "非整数階微分・積分とその応用," *ながれ* **4**, 110-120 (1985).
7. Sugimoto, N. "'Generalized' Burgers equations and fractional calculus," In *Nonlinear Wave Motion* (ed. Jeffrey, A.) (Longman, Essex/England, 1989), 162-179.