

渦糸の絡み合いダイナミクスの数値計算

横国大工、東京農工大工^A 大塚一路(Kazumichi Ohtsuka)、
高木隆司^A(Ryuji Takaki)、渡辺慎介(Shinsuke Watanabe)

2本の渦糸の時間発展を記述する方程式としては Biot-Savart 方程式、及びこの方程式を局所誘導型の方程式に近似した絡み合いの方程式が挙げられる。絡み合いの方程式は従来の局所誘導方程式とは自らの渦糸と相手の渦糸に対して定義している部分で異なる。本講では後者の方程式を用いた数値計算を行い、計算結果を示す事とする。

1 これまでの研究の流れ

渦糸の理論的な研究は主に単独の渦糸のダイナミクスについて行われてきた。しかしながら2本の渦糸についての理論的な研究は少数ではあるが成されている。本節では2本の渦糸の研究について特に詳しく触れる事とする。2本の渦糸の非線形相互作用は流体の乱流秩序構造と深く関係している。この2つの現象の接点を歴史的に追ってみると、まず2次元の秩序構造として混合層内における Brown-Roshko 構造 [1] が発見された。これは渦層が下流に流されながら混合・合併して生まれる秩序構造である。同じ様に2層流体の境界で観測される Kelvin-Helmholtz 不安定は下流において秩序構造のスケールが変化しないという点で上述の構造とは異なる。その後同じ系において3次的に絡み合う渦糸(ヘリカルペアリング)を C. Chandrusuda らが可視化実験によって観測した [2]。Takaki らは 1984 年にこの時観測された2本の渦糸の絡み合い現象に対して理論的な解析を行ない厳密解としてヘリカルペアリングが存在することを示している [3]。さらに著者らはこの絡み合いの方程式から K-dV 方程式を導くことに成功しておりこの方程式におけるソリトン解が2本の渦糸においては局所的な絡みに対応していることを示した [4]。

2 大域的な絡み合いに対する理論解析

初めに Takaki [3] らによる2本の渦糸の絡み合いについての理論解析を示す。

2本の渦糸の絡み合いの本質は自己誘導と相互誘導の重ね合わせである。渦糸の誘導速度を $u(x)$ とすると

$$u(x) = -\frac{\kappa}{4\pi} \int \frac{s \times dl}{s^3} - \frac{\hat{\kappa}}{4\pi} \int \frac{\hat{s} \times dl}{s^3} \tag{1}$$

ここに κ は循環、 dl は渦糸の接戦方向のベクトル、 s は誘導速度を与える点から与えられる渦糸上の点 x への方向ベクトル、ハットは第二の渦糸における物理量とする。式 (1) の積分を実行して局所誘導型の方程式を導き $\kappa = \hat{\kappa}, z$ 軸対称の仮定のもとに複素数

$$W(z, t) = x(z, t) + iy(z, t) \tag{2}$$

を用いて表記すると

$$\frac{\partial W}{\partial t} = AiW'' + \frac{i}{W} \left(1 - \frac{1}{2} W' \bar{W}' + \frac{(\text{Re} W \bar{W}')^2}{W \bar{W}} - \text{Re}(W \bar{W}'') \right) + \frac{(\text{Im} W \bar{W}')}{W \bar{W}} W \tag{3}$$

$$A = \ln \frac{Ls_0}{L^* \sigma} \tag{4}$$

となる。式 (3) は絡み合い方程式と呼ばれている。ただし、プライムは z に関する微分、バーは複素共役、また L, σ は式 (1) の第一項の積分における 1 の上限と下限の値、 L^*, s_0 は同様に第 2 項における $\hat{1}$ の上限と下限である。

式 (3) には 2 本の渦糸が相互に絡み合った解が存在し

$$W = \exp ik(z - ct) \quad (5)$$

$$kc = -1 + k^2(A + \frac{1}{2}) \quad (6)$$

と書き下すことが出来る。この解による 2 本の渦糸の形状は上述したヘリカルペアである。ここで注意することは解は指数関数であるのだが絡み合いの方程式、つまり非線形方程式の解となっているという点である。その結果この解は非線形効果により「波数によって螺旋形状の伝播方向が変わる。」というユニークな性質を持つこととなる。またヘリカルペアとの比較のため単独渦糸における螺旋形状の分散関係を示しておく。

$$kc = A'k^2 \quad (7)$$

ただしこの分散関係式には長波長近似が成されており、 $A' = \text{Im} \frac{L}{\sigma}$ である。以上が Takaki [3] らによって得られているこれまでの解析結果である。

3 局所的な絡み合いに対する理論解析

本節では線形化された絡み合いの方程式の分散関係が $\omega = ak + bk^3$ (ただし a, b は定数) となる事を示し絡み合い方程式から K-dV 方程式が導かれることを示す。まずは渦糸の形状を

$$W = \exp(it)g(z, t) \exp[i \int^z f(z, t) dz] \quad (8)$$

とし、さらに上式における変数 f, g を次の様に定義する

$$g(z, t) = 1 + G(z, t) \quad (9)$$

$$f(z, t) = F(z, t) \quad (10)$$

これらの方程式を絡み合い方程式 (3) に代入して線形化すると

$$\text{Re} : \dot{G} = -AF' \quad (11)$$

$$\text{Im} : 2G' + \dot{f} = (A - 1)G''' \quad (12)$$

となる。次に G, F に対して次の様な伝播解を仮定する。

$$G = G_0 \exp i(kx - \omega t) \quad (13)$$

$$F = F_0 \exp i(kx - \omega t) \quad (14)$$

すると式 (11), (12) から分散関係は

$$\omega = \pm k \sqrt{2A + A(A - 1)k^2} \quad (15)$$

となる。 $\omega > 0$ とし長波長の仮定のもとに展開すると

$$\omega = \sqrt{2A}k + \frac{A(A-1)}{2\sqrt{2A}}k^3 \quad (17)$$

となる。つまり線形化された絡み合い方程式に長波長近似を施すと $\omega = ak + bk^3$ の分散関係が出てくることが分かった。

話を非線形の絡み合い方程式に戻して K-dV 方程式を導く。まず次の座標系を導入する。

$$\xi = \epsilon^{\frac{1}{2}}(z - c_0 t) \quad (18)$$

$$\tau = \epsilon^{\frac{3}{2}}t \quad (19)$$

また g, f を微小パラメータ ϵ について次の様に展開する。

$$g = 1 + \epsilon G^{(1)}(\xi, \tau) + \epsilon^2 G^{(2)}(\xi, \tau) + \dots \quad (20)$$

$$f = \epsilon F^{(1)}(\xi, \tau) + \epsilon^2 F^{(2)}(\xi, \tau) + \dots \quad (21)$$

これらをも絡み合い方程式に代入してオーダー別にまとめると

$$O(\epsilon^{\frac{3}{2}}): C_0 = \sqrt{2A} \quad (22)$$

$$O(\epsilon): F^{(1)} = \sqrt{\frac{2}{A}}G^{(1)} \quad (23)$$

$$O(\epsilon^2), O(\epsilon^{\frac{5}{2}}): G_{\tau}^{(1)} + (\sqrt{2A} + \sqrt{\frac{2}{A}})G^{(1)}G_{\xi}^{(1)} - \frac{A(A-1)}{2\sqrt{2A}}G_{\xi\xi\xi}^{(1)} = 0 \quad (24)$$

となる。式 (24) は K-dV 方程式である。この系において K-dV 方程式における soliton 解は局所的な渦糸の絡み合いを示している。以上の結果から得られた 2 本渦糸の局所的な絡みのダイナミクスの例を図 1, 2 に示しておく。

4 絡み合い方程式の数値計算

本節では渦糸ダイナミクスの基礎的な性質を調べるため、1本の渦糸の相互作用を詳しく調べる事とする。そのため単独な渦糸について絡み合い方程式の数値計算を行った。方程式は絡み合い方程式を 1本の方程式について考え、余分な項を消去した式

$$\frac{\partial W}{\partial t} = A' i W'' \quad (25)$$

を用いる。螺旋の形状を有する 1本の渦糸は波数によっては伝播方向を変えないが螺旋形状の「右巻き」「左巻き」によって伝播方向が反転する。式 (25) に初期形状として渦糸に局所的な螺旋形状を与えたときの時間発展の計算結果を図 3 に示す。図から見て明らかな様に波数の大きい形状がより速く伝播している。これは式 (7) と図 3 より明らかである。また巻き目の異なる螺旋形状を 1本の渦糸上に配置させる事によって螺旋波を衝突させることもできる。この結果を図 4 に示す。図から螺旋波は相互作用によって形が崩れていない事が確認できる。また上式の長波長近似を施していない式は

$$\frac{\partial W}{\partial t} = A' i \frac{1}{(1 + W'W')^{\frac{3}{2}}} W'' \quad (26)$$

である。上式は局所誘導方程式の厳密な形であり、またこの方程式は非線形方程式である。同様に衝突過程を考えてみると絡み合いの方程式と同じように相互作用によって形状は変わっていない(図5)、以上の1本の渦糸の数値計算から非線形方程式を用いた螺旋波の衝突においても螺旋波の形状は乱されないことが確認できた。

5 1本の渦糸の計算結果の考察

本節では数値計算の結果を考察する。まず重要なのは式(26)の非線形方程式においてさえも螺旋波衝突によって形状を保っているということである。これはヘリシティの保存という概念で説明できる。まずはヘリシティについて説明す。この概念は絡みの度合いを表すパラメータで。方程式

$$H = \int u(\mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\omega} \, dv \quad (27)$$

で表される。このパラメータは直線状の形状で0, 右巻きで正の値、左巻きで負の値を取る。この物理量は完全流体中においては保存されることが知られている。そのためここでも保存されていると考えられる。

6 2本の渦糸の計算結果の考察

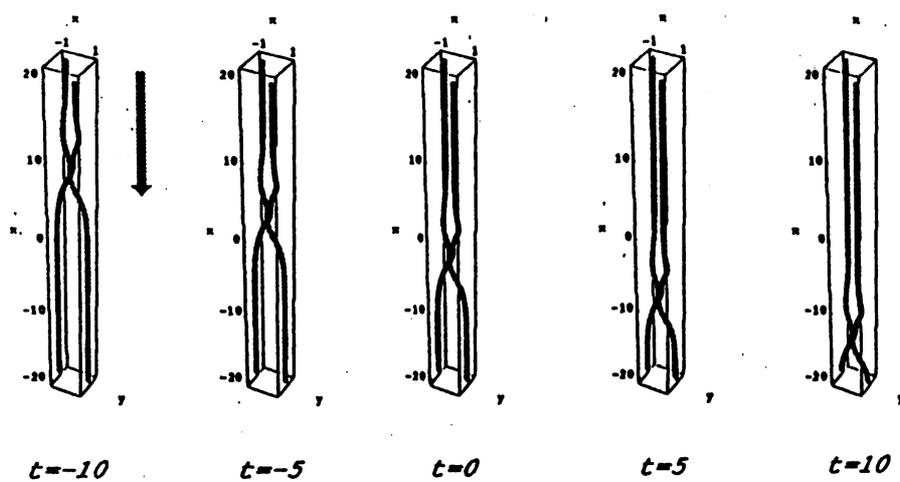
2本の渦糸の計算を絡み合い方程式より行った。この結果を図6に示す。その結果非常に短い時間ではあるがヘリカルペアの安定伝播が再現できた。しかしながらフレキシブルな渦糸の形状を安定に時間発展させるまで安定なスキームを得ることは出来なかった。

7 結論

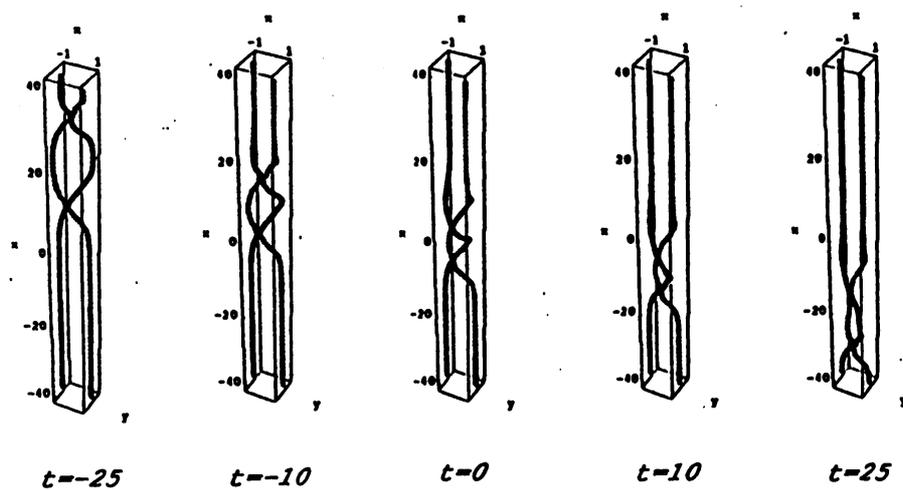
今回の研究では1本の方程式においては非線形であっても絡みの度合いは保存されることが明らかになった。しかしながら2本の渦糸におけるシュミレーションはまだまだヘリカルペアの伝播を本の短い時間だけ再現しているだけであり。まだまだ問題が残っている。

参考文献

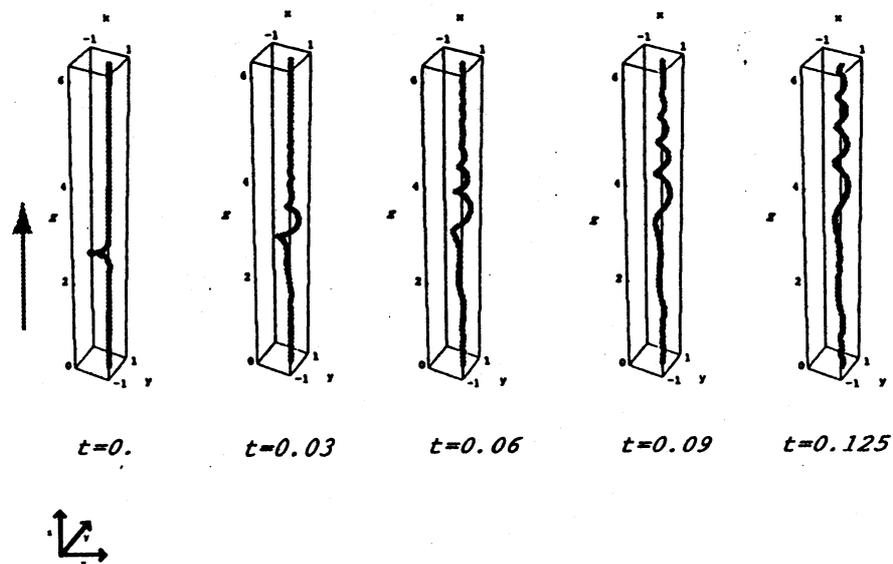
- [1] G. L. Brown and A. Roshko: J. Fluid. Mech 64 (1974) 775
- [2] C. Chandrusuda ,R. D. Mehta and A. D. Weir & P. Bradshaw :J. Fluid. Mech. 85 (1978) 693
- [3] R. takaki & A. K. M. F. Hussan: Phys. Fluid 27 (1984) 761
- [4] K. Ohtsuka, R. Takaki & S. Watanabe: 'Dynamics of the local entanglement about two vortex filaments described by K-dV equation' in preparation (2000)



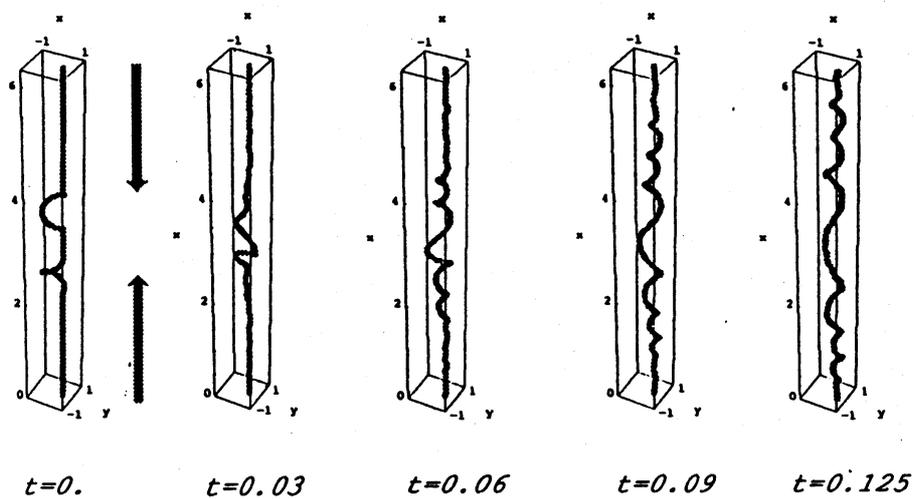
☒ 1: Dynamics of a local entanglement



☒ 2 Dynamics of two local entanglement



⊠ 3: Dynamics of helical propagation



⊠ 4: Head-on collision of helical propagation by Eq.(25) (linear)

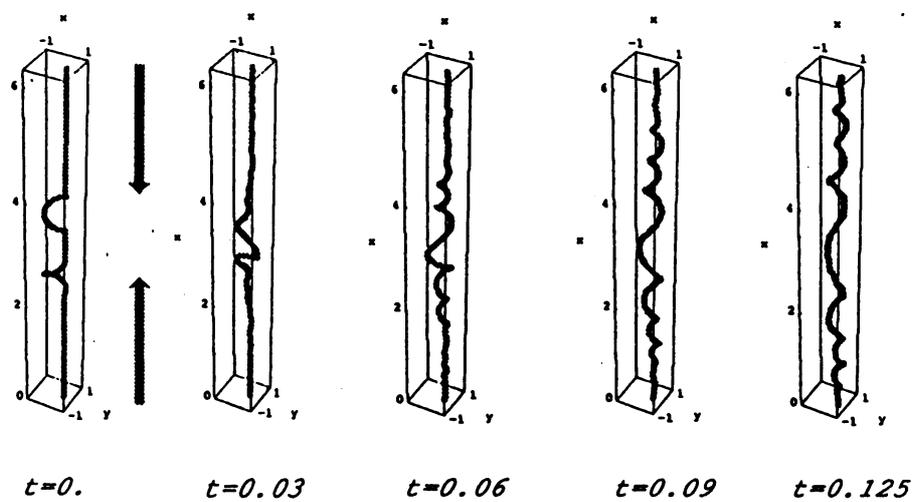


图 5: Head-on collision of helical propagation by Eq.(26) (nonlinear)

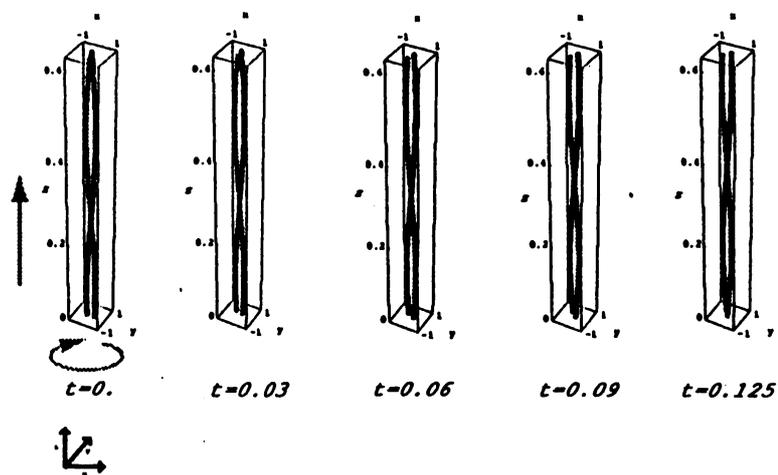


图 6: Dynamics of helical pairing propagation