

## 定常輸送と拡散のもとでの物質の密度波について

宇都宮大学工学部 矢嶋 徹 (YAJIMA Tetsu)

1次元空間において、媒質中で拡散するとともに、一定速度で運転される輸送体があり、相互の間で物質のやりとりがあるような状況で、物質の密度の時間発展について考える。媒質と輸送体の間のやりとりがそれぞれの上にある物質の密度に比例するという仮定のもとで、密度がみたすべき方程式を考え、その解の振る舞いを調べた。解は移動しつつ減衰するパルスとなる。この解を実験結果と比較検討することで、輸送体などを特徴づけるパラメーターを推定することが期待される。

## 1. はじめに

1次元における物質の移動は、比較的理想化された状況ならば、簡単な偏微分方程式で表すことができる。たとえば、もし物質移動の要因が拡散だけであるならば、その運動は、熱伝導方程式を与えられた条件のもとで解くことによって、詳細に調べることができる。しかしながら、物質の移動が拡散だけで記述できるような場合は少なく、実際には何らかの外的な要因によりドライブされるような効果が加わることが多いように考えられる。本稿では、輸送体が存在するような状況での1次元系における物質の移動について考えたい。

具体的に考えるべき状況を挙げると、たとえば神経においては、ある種の物質は移動をつかさどる物体と結合することで運搬される。このような機構に起因する物質移動の速度は、温度や運ばれる物質の種類を問わず比較的安定している。物質と輸送体は常に結合した状態ではなく、適宜結合と分離を繰り返して物質が移動して行くと考えられている。このように、物質と輸送体が結合したり離れたりすることで物質の移動が行われている状況で、拡散の他に輸送体による強制移動の効果を取り込むことによって、初期波形の時間発展を調べるのが目的である。

以下では、まず線形問題を考え、物質の密度がみたすべき方程式を求め、次にその方程式の解を適当な初期条件のもとで解き、どのように時間発展をするのか、特にその漸近的な振る舞いを調べる。また、非線形効果を考えた場合、どのような方程式が導出されるのか、その可能性を考える。最後に解の振る舞いについての検討や、今後の可能性の議論などを

## 2. 線形問題

### 2.1 考えるべき方程式と初期値問題

初めに、考えるべきモデル方程式を導出しよう。前節で述べたような神経等での物質輸送を例にとって考える。移動をつかさどる物体についてはいろいろな描像が考えられるが、ここでは系の方向に一定速度で運転されるベルトコンベアのようなものであると考えることにする。そのような輸送体と、1次元媒質の間で物質のやりとりがなされていると考えよう。媒質内では熱伝導のように密度勾配に比例して拡散するものとしよう。いま、媒質中および輸送体上の物質の個数線密度をそれぞれ  $n(x, t)$ ,  $m(x, t)$  とする。単位長さあたりの物質の収支を考えると、媒質中では、密度勾配による移動と、輸送体との物質のやりとりに起因するものがある。熱伝導方程式におけるものと同様、密度勾配による移動は  $\frac{\partial^2 n}{\partial x^2}$  に比例する項で表される。輸送体との間で行われる物質のやりとりは、それぞれの上での密度に比例して減少するものとすれば、この効果は  $-\alpha n$  と  $\beta m$  に比例することになり、結局単位時間あたりの密度の増加は、 $a, \alpha, \beta$  を定数として  $a \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} - \alpha n + \beta m$  で与えられることになる。

一方、輸送体による物質の移送が一定速度  $v$  で行われているとすると、その上での密度の、単位時間あたりの増加は、輸送体上の密度の空間的变化に起因する  $-v \frac{\partial m}{\partial x}$  と、媒質とのやりとりによる  $\alpha n - \beta m$  で与えられることになる。以上により、変数  $n, m$  は次の方程式に従う：

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial n}{\partial t} &= a \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} - \alpha n + \beta m \\ \frac{\partial m}{\partial t} &= -v \frac{\partial m}{\partial x} + \alpha n - \beta m \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

ただし、 $a, v, \alpha, \beta$  は正定数である。

さて、上記の方程式を解いて、密度  $n, m$  を求めてみよう。簡単のため、時刻  $t = 0$  で媒質中の  $x = 0$  の地点に物質が注入され、輸送体上に全く物質が存在しなかったとする。すなわち、

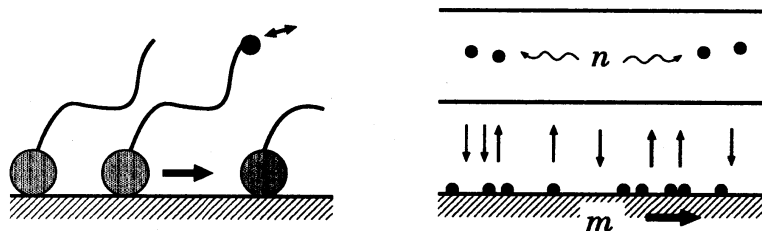


図1 1次元媒質中の状況。左は実際に移動が行われている様子、右はそれを2成分系に解釈したもの。

$$n(x, t) = N_0 \delta(x), \quad m(x, t) = 0$$

とする.  $n, m$  の  $x$  に関するフーリエ変換を, それぞれ  $\hat{n}(p, t), \hat{m}(p, t)$  とすると, (1) により連立常微分方程式

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \hat{n}}{\partial t} &= -(\alpha + ap^2)\hat{n} + \beta\hat{m} \\ \frac{\partial \hat{m}}{\partial t} &= \alpha\hat{n} - (\beta + ivp)\hat{m} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

$$\hat{n}(p, 0) = N_0, \quad \hat{m}(p, 0) = 0 \quad (3)$$

が得られる. この方程式は複素係数で, (2) の係数行列の固有値も複素数となり, 固有値は次の複素 2 次方程式をみたす.

$$\lambda^2 + (\alpha + \beta + ap^2 + ivp)\lambda + a\beta p^2 + i(\alpha + ap^2)vp = 0 \quad (4)$$

式(4)の解を  $\lambda_1, \lambda_2$  とし, それぞれに属する固有ベクトルを

$$\lambda_1 \text{ に対して } \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \nu_1 \end{pmatrix}, \quad \lambda_2 \text{ に対して } \begin{pmatrix} \mu_2 \\ \nu_2 \end{pmatrix}$$

としよう. 初期条件を考慮に入れると,  $\hat{n}, \hat{m}$  は次のようになる

$$\left. \begin{aligned} \hat{n}(p, t) &= \frac{N_0(\mu_1\nu_2 e^{\lambda_1 t} - \mu_2\nu_1 e^{\lambda_2 t})}{\mu_1\nu_2 - \mu_2\nu_1} \\ \hat{m}(p, t) &= \frac{\nu_1\nu_2 N_0(e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t})}{\mu_1\nu_2 - \mu_2\nu_1} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

したがって, 媒質中の物質の密度  $n$  は,

$$n(x, t) = \frac{N_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dp e^{ixp} \frac{N_0(\mu_1\nu_2 e^{\lambda_1 t} - \mu_2\nu_1 e^{\lambda_2 t})}{\mu_1\nu_2 - \mu_2\nu_1} \quad (6)$$

で与えられる. 実際の固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} \mu_j \\ \nu_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_j + \beta + ivp \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta \\ \alpha + ap^2 + \lambda_j \end{pmatrix}, \quad (j = 1, 2)$$

で与えられるから, これを (6) に代入して,

$$\begin{aligned} n(x, t) &= \frac{N_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda_1 + \beta + ivp}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{ixp + \lambda_1 t} dp - \frac{N_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda_2 + \beta + ivp}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{ixp + \lambda_2 t} dp \\ m(x, t) &= \frac{N_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t}}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{ixp} dp \end{aligned}$$

が初期値問題の解として得られることがわかった。なお、固有方程式 (4) が重根をもつ場合は、この式の被積分関数の分母が 0 となる。これは、

$$p = \pm \frac{2\sqrt{\alpha\beta}}{v}, \quad \frac{4a\alpha\beta}{(\beta - \alpha)v^2}$$

のときに実現されるが、そのような場合は積分を実行する際に実軸上の特異点を避けてやればよい。

## 2.2 得られた解の時間発展

さて、(6) で表される  $n$  の時間発展を考えてみたい。以下、簡単のためスケール変換により次のような変数とパラメーターを導入する。

$$\xi \equiv \frac{v}{2a}x, \quad \tau \equiv \frac{v^2}{4a}t, \quad \frac{4a\alpha}{v^2} \equiv b, \quad \frac{4a\beta}{v^2} \equiv c \quad (7)$$

このとき、特性方程式 (4) は

$$\lambda^2 + (b + c + 2ip)\lambda^2 + cp^2 + 2i(b + p^2) = 0$$

となることに注意して、これらの解を改めて  $\lambda_1, \lambda_2$  と書くと、

$$n = (\partial_\tau + 2\partial_\xi + c)I, \quad m = bI, \quad I \equiv \frac{N_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\lambda_1\tau} - e^{\lambda_2\tau}}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{i\xi p} dp$$

となる。これらはともに  $\exp[-(\xi + (b + c - 3)\tau/2)]$  を因子にもつ、次のような形の関数であることがわかる。

$$n = e^{-[\xi + (b+c-3)\tau/2]} f(\xi - 2\tau, \tau), \quad m = e^{-[\xi + (b+c-3)\tau/2]} g(\xi - 2\tau, \tau)$$

$f, g$  は積分  $I$  を級数展開して求めることができ、次のようになる。

$$f(X, T) = \frac{N_0}{2\pi} \left[ \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(T/2)^{2j}}{(2j)!} K_j - \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(T/2)^{2j+1}}{(2j+1)!} J_j \right], \quad g(X, T) = \frac{N_0 b}{2\pi} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(T/2)^{2j+1}}{(2j+1)!} K_j$$

$K_j$  や  $J_j$  ( $j = 0, 1, \dots$ ) は次のように表される積分である。

$$\begin{aligned} K_j &\equiv \int_{-\infty}^{\infty} e^{-T/2 + iXp} [(p^2 + 2\gamma)^2 + 4bc]^j dp \\ &= \sum_{k=0}^j \sum_{l=0}^j A_{k,l} e^{-X^2/2T} M\left(-k-l, \frac{1}{2}, \frac{X^2}{2T}\right) \\ I_j &\equiv \int_{-\infty}^{\infty} e^{-T/2 + iXp} [(p^2 + 2\gamma)^2 + 4bc]^j (p^2 + 2\gamma) dp \\ &= \sum_{k=0}^j \sum_{l=0}^j A_{k,l} \left[ 2\gamma M\left(-k-l, \frac{1}{2}, \frac{X^2}{2T}\right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{2k+2l+1}{T} M\left(-k-l+1, \frac{1}{2}, \frac{X^2}{2T}\right) \right] e^{-X^2/2T} \end{aligned}$$

ここで、 $\gamma \equiv \frac{b-c+1}{2}$  として、

$$A_{k,l} \equiv \binom{j}{k} \binom{j}{l} q_0^{j-k} q_0^{*j-l} \frac{\Gamma(k+l+1/2)}{(T/2)^{k+l+1/2}}, \quad q_0 \equiv 2\gamma + 2i\sqrt{bc}$$

また、 $M(\mu, \nu, z)$  は Kummer の関数である。特に、ここでのように第 2 引数が  $\frac{1}{2}$  である場合は、Hermite 関数となる：

$$M\left(-n, \frac{1}{2}, \frac{z^2}{2}\right) = \frac{n!}{(2n)!} \left(\frac{-1}{2}\right)^{-n} \tilde{H}_{2n}(z)$$

$$\tilde{H}_{2n}(z) = (2n)! \sum_{m=0}^n \frac{(-)^m z^{2n-2m}}{2^m \cdot m! \cdot (2m-2n)!}$$

上記の積分  $K_j$ ,  $J_j$  は、いずれも  $(\xi - 2\tau)^2/2\tau$  および  $\tau$  の関数である。 $\xi, \tau$  依存性を考えると、 $f$  は  $\xi - 2\tau = 0$  付近で頂上をもつ波形である。十分に時間が経過した後では、級数展開をなす  $K_j, I_j$  のうち、 $k, l$  に関して低い次数の項の寄与が支配的となる。このような条件を考えて  $f(z, \cdot)$  を描画すると、下に示す図 2 のようになる。

物質の密度を表す  $n$  全体で考えると、 $z \equiv \xi - 2\tau$  という座標系で見れば、 $n(z, \tau) \cong e^{-\gamma\tau} \cdot e^{-z^2 f(z/2\tau, \tau)}$  という形で表され、 $f$  を空間的に歪ませた波形となる。 $\tau$  が大きくなるにつれて、漸近的にその幅が広がることが期待される。実際、 $T$  を十分大きくすると、

$$n \sim e^{-X-\gamma T} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(2j)!} \sum_{k,j=0}^j \left(\frac{T}{2}\right)^{2j-k-l-1/2} e^{-X^2/2T} M(\cdot, \cdot, \frac{X^2}{2T}) + \dots$$

のように展開される。したがって、パルス波形が時間の経過とともに減衰・拡散し、パルス波形自体も前方に引っ張られる形で歪むことが予想される。

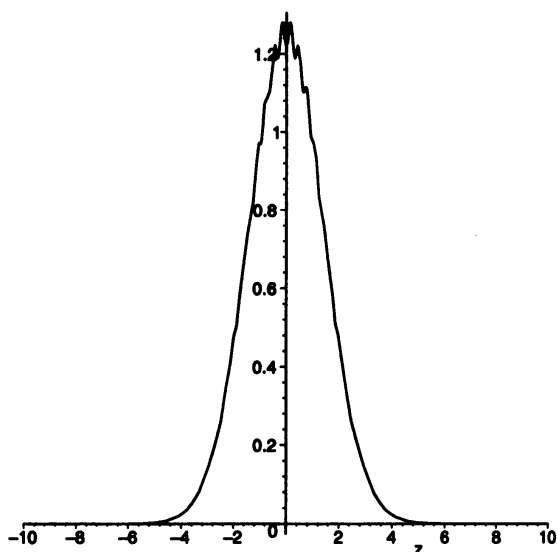


図 2 関数  $f(z, \cdot)$  の概形

### 3. 非線形問題

ここでは、このような系における密度変数を、非線形波動としてとらえることができるかどうか、その可能性を探ってみたい。まず、第2節の図1右と同様に、媒質と輸送体それぞれにおける密度の連立方程式を考えよう。ここで、これら相互のやりとりを表す量を  $U$  と書くと、連続の方程式と流体の運動方程式により、次式を得る。

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial(nv)}{\partial x} + U = 0$$

$$\frac{\partial m}{\partial t} + V \frac{\partial m}{\partial x} - U = 0$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} = F$$

ただし、 $F$  は速度  $V$  で動く輸送体が原因で物質がひきずられる効果を表す外力項である。物質のやりとりについて第2節と同様に仮定すると、 $b, c$  を定数として、 $U = bn - cm$  で与えられることになる。

まず、 $F$  の形を考えることにする。ある時点  $t$  で、媒質中から  $U(x, t)$  だけ輸送体に物質が移動し、 $\Delta t$  時間後に輸送体から媒質に戻ったとすると、媒質単位長さおよび単位時間あたりの運動量の変化は

$$\frac{V - v}{\Delta t} [-U(x + V\Delta t, t + \Delta t) + U(x, t)]$$

で与えられる。このことは、 $F$  が

$$F = \frac{V - v}{n} (U_t - VU_x)$$

と見積もることができることを表している。いま、時間変数を適当な変換によって無次元化し、

$$v \rightarrow Vv, \quad n \rightarrow \frac{n}{b}, \quad m \rightarrow \frac{m}{c}, \quad x \rightarrow Vx, \quad t \rightarrow t$$

とした上で、微小パラメータ  $\varepsilon$  を用いて、各係数が  $b = \beta\varepsilon^{3/2}$ ,  $c = \gamma\varepsilon^{3/2}$  という程度の大ききさで与えられているとすると、

$$\begin{aligned} n_t + (nv)_x - \beta\varepsilon^{3/2}(n - m) &= 0, \\ m_t + m_x + \gamma\varepsilon^{3/2}(n - m) &= 0, \\ v_t + vv_x + (n_t + n_x - m_t - m_x) \frac{1 - v}{n} - n_x &= 0 \end{aligned} \tag{8}$$

を得る。さらに、 $\xi = \varepsilon^{1/2}(x - t)$ ,  $\tau = \varepsilon^{3/2}t$  のように Gardner-Morikawa 変換を行い、

$$n = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k n_k, \quad m = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k m_k, \quad v = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k v_k$$

と展開しよう。これらを (8) に代入して整理すると、 $\varepsilon$  の最低次の係数から、

$$n_{1\xi} = v_{1\xi}, \quad m_{1\tau} = -\gamma(n_1 - m_1)$$

が得られる。 $\varepsilon$  の次の次数の係数と組み合わせると、閉じた方程式系

$$\left. \begin{aligned} 2n_{1\tau} + 3n_1 n_{1\xi} - \frac{\beta}{\gamma} m_{1\tau} &= 0 \\ n_1 &= m_1 - \frac{m_{1\tau}}{\gamma} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

を得ることができる。たとえば、この方程式から  $n_1$  を消去すると、

$$\left(2 + \frac{\beta}{\gamma}\right) m_{1\tau} - \frac{m_{1\tau\tau}}{\gamma} + 3 \left( m_1 m_{1\xi} + \frac{m_{1\tau} m_{1\xi\tau}}{\gamma^2} + \frac{m_1 m_{1\xi\tau} + m_{1\xi} m_{1\tau}}{\gamma} \right) = 0$$

この方程式の解を得ることは難しいが、線形化した方程式の分散関係は、

$$\left(2 + \frac{\beta}{\gamma}\right) \omega - \frac{i\omega^2}{\gamma} + 3k = 0$$

となる。これは、不安定系における波動から導かれるソリトン方程式と同様、 $\omega$  に関して複素数の解を与え、不安定な分岐となるような分散関係である。

#### 4. まとめ

本稿では、以上で見たように、1次元系における物質の移動について、輸送体による強制的な移動と拡散とが共存するという条件で、簡単なモデルを立て、そのときの個数密度の時間変化を調べた。まず線形問題では、漸近的な波形の振る舞いを考えると、最初にデルタ関数的に分布していた物質密度は、パルス幅の広がりやピークの高さの低下という定性的な挙動を示し、これは直観にもあった結論であると考えられる。ここで、第2節で求めた  $t \rightarrow \infty$  で解の表現の支配的な項を取り出すと、ピークの高さは時間に関して指数関数的に減少し、

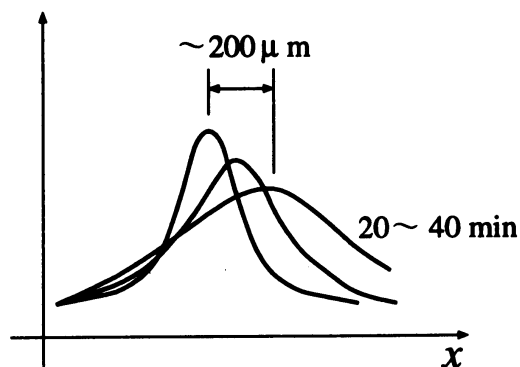


図3 神経中のある蛋白質の密度分布の時間的な変化の模式的な表現。(S. Terada et al. private communication による)

(7)における  $b, c$  を用いれば, その減少率は  $b+c+1$  程度である. また, 波形の広がり, その  $\xi, \tau$  依存性を考慮すると,  $\tau$  に比例して広がると考えられる.

実際に神経等でのある種の物質の移動を時間的に追ってみると, 前ページ図3のようになる. 図示された密度の時間変化を考えると, このような物質の移動は, 本稿で扱ったような機構に基づいて行なわれていることが想像できる. 将来的な課題として, 実際の実験結果における物質密度のパルス波形の減衰率などの量を測定することにより, 実際の輸送体と物質の吸着のしやすさを表すパラメーターなどの, 物質的な諸量を推測することが可能となるものと考えられる.

次に, 非線形問題に関しては, 方程式の形から考えると, その厳密解を求めることは難しい. 線形化された分散関係は周波数に関して複素係数の方程式であり, 線形波動は指数的な不安定性を示すと考えられる. このような場合, 不安定系におけるソリトンのように, 不安定性と非線形性が釣り合うような特定の状況において, 孤立波の生成の可能性が考えられるが, どのような状況でどのような特性をもつパルスが導かれるかは, 今後の課題である.