

磁性流体自由表面の非線形波動解析における解析性

北大大学院工学研究科 水 田 洋 (Yo Mizuta)

Grad. Sch. of Engineering Sciences, Hokkaido Univ.

1. はじめに

円錐・スパイク集合状に特異変形する磁性流体自由表面について、本研究ではこれまで、磁場の調和性 (Laplace 方程式を満たすポテンシャルで表される) に基づいて複素磁場を複素解析における解析関数とみなし、写像変換・Hilbert 変換を利用して、自由表面形状を決定する解析法を構築してきた [1, 2, 3]. その主な特長は、(1) 大変形・非 1 価な表面形状、(2) 大きさと方向が一様でない磁場、(3) 磁力線・ポテンシャルと界面の交差角が任意.

(1) は表面変形を小さいとして摂動展開する弱非線形理論、(2) は一様磁場のもとでの周波数解析・安定性解析 [4], と対照的である. (3) は自由表面をはさむ両領域の透磁率に、無限大や 0 以外の任意の値を与えることによる. これらの仮定は、複雑になりがちな議論を簡略化するため当初用いられていたが、本解析では必要としない.

磁場と同様、流速場にも調和性も仮定すれば同様のことが言えるが、流速場の場合、(2),(3) については、固定壁に沿う流れと異なり、流線が場所ごとに異なる大きさと方向で移動界面と交わることを意味し、波動のような動的現象を扱えるようになる. 本稿ではこのような考えに基づいて、力学的条件と運動学的条件から磁場-流体強結合発展方程式を導出し、スペクトル法による解法を示した. これにより、波動の安定性解析など、磁性流体自由表面の動的解析を非線形性を充分取り込んだまま進めることができる.

ところでここまでの展開では、複素磁場と複素流速の解析性に基づく写

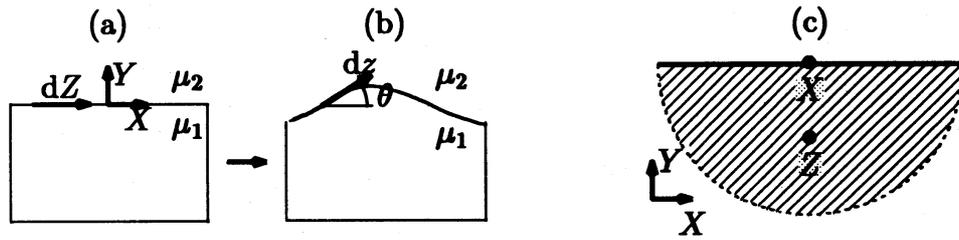


Fig. 1: (a) Flat Space, (b) Real Space and, (c) point X on the real axis for the Hilbert transform of $f(Z) + ig(Z)$ analytic in Z .

像変換・Hilbert変換を利用したが，3次元解析を考えるなら，磁場と流速場の調和性だけを前提に，複素解析を離れる必要がある．そのための準備として，本稿では，3次元曲面上や特異点がある場合へのHilbert変換の拡張についても述べた．

2. 解析関数による複素解析

2.1 複素磁場と複素流速

磁束密度 $\mathbf{b}_j = (b_{xj}, b_{yj})$ ，磁場 $\mathbf{h}_j = (h_{xj}, h_{yj})$ ，流速 $\mathbf{v} = (v_x, v_y)$ より複素磁場 $f_j = b_{xj} - ib_{yj} = \mu_j(h_{xj} - ih_{yj})$ ，複素流速 $g = v_x - iv_y$ を定義する ($j = 1$: 下側流体領域， $j = 2$: 上側真空領域， μ_j : 透磁率)．もしこれらに対し，磁束保存 $\text{div } \mathbf{b}_j = 0$ ，無電流 $\text{rot } \mathbf{h}_j = \mathbf{i} = 0$ (\mathbf{i} : 電流密度)，非圧縮性 $\text{div } \mathbf{v} = 0$ ，渦なし $\text{rot } \mathbf{v} = 0$ を前提として，その成分表示 $\partial b_{xj}/\partial x = -\partial b_{yj}/\partial y$ ， $\partial h_{yj}/\partial x = \partial h_{xj}/\partial y$ などを複素解析における **Cauchy-Riemann** の関係と見れば，複素磁場・複素流速は解析関数である．したがって，Real Space (Fig. 1(b), $z = x + iy$) におけるこれらの場は，界面が平らな Flat Space (Fig. 1(a), $Z = X + iY$) に用意した解析的な場を，やはり解析的な関係で Real Space に写像すれば求められる．また，Flat Space の上・下半面いずれかにおける解析性を前提に，実軸上で実部・虚部のどちらかを既知として，他方を **Hilbert** 変換で求めることができる (Fig. 1(c)).

2.2 写像変換と両空間量の関係

Fig. 1(a),(b)のように, Flat Space 内の微小要素 dZ を Real Space 内の dz に写すとして, $dz = e^{i\{\theta(Z)+i\tau(Z)\}}dZ$ で表される写像変換を考える. θ は, dZ が Flat Space で界面 $Y = 0$ に接するとき界面勾配角となり, θ と共役な ($\theta + i\tau$ を解析的にする) τ は空間収縮率である. これを

$$\frac{\partial(x + iy)}{\partial X} = e^{i(\theta+i\tau)} = e^{-\tau}(\cos \theta + i \sin \theta) \quad (1)$$

と書き換え, さらに実部・虚部を X で積分すると, 媒介変数表示で自由表面形状が次のように求められる.

$$\begin{pmatrix} x(X) \\ y(X) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(X_0) \\ y(X_0) \end{pmatrix} + \int_{X_0}^X dX' e^{-\tau} \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}. \quad (2)$$

写像変換は通例, ポテンシャルや流線のいずれかが境界と一致する場合に適用するが, ここではこれを, 界面を挟む透磁率差が有限で磁場が界面の両側に存在したり, 流線が移動界面を横切っても構わないように拡張する. 界面条件を満たす磁力線や流線は, Real Space より Flat Space で容易に求められるはずであり, 界面変形の効果は θ と τ が担うことになる.

Real Space, Flat Space それぞれのスカラーポテンシャル ψ_j, Ψ_j とベクトルポテンシャルの z 成分 a_j, A_j で複素磁気ポテンシャルを $w_j = \mu_j \psi_j - ia_j$, $W_j = \mu_j \Psi_j - iA_j$ と定義すれば, 複素磁場はこれらの複素関数微分で $f_j = -dw_j/dz$, $F_j = -dW_j/dZ$ と表される. $w_j(z) = W_j(Z)$ の合成関数微分に $dZ/dz = e^{-i(\theta+i\tau)}$ を用いれば, 両空間量の関係は次のようになる.

$$\begin{cases} b_{xj} - ib_{yj} = e^{-i(\theta+i\tau)}(\mu_j H_X - iB_Y) = \mu_j(h_{xj} - ih_{yj}), \\ v_x - iv_y = e^{-i(\theta+i\tau)}(V_X - iV_Y). \end{cases} \quad (3)$$

ここには, 複素磁場と同様に導かれる複素流速の関係も示した.

2.3 界面条件

界面上のベクトル (u_x, u_y) について、接線成分 u_s と法線成分 u_n を合わせた簡潔な表示 $-u_s - iu_n = e^{i\theta}(u_x - iu_y)$ を用いると、Flat Spaceにおける H_X, B_Y, V_X, V_Y で、接線磁場 h_s , 法線磁束密度 b_n , 接線流速 v_s , 法線流速 v_n などの界面成分は

$$\begin{cases} -\mu_j h_s - i b_n = e^{i\theta}(b_{xj} - i b_{yj}) = e^\tau(\mu_j H_X - i B_Y), \\ -v_s - i v_n = e^{i\theta}(v_x - i v_y) = e^\tau(V_X - i V_Y), \end{cases}$$

すなわち

$$(-h_s, b_n, -v_s, v_n) = e^\tau(H_X, B_Y, V_X, V_Y) \quad (4)$$

と表される。磁場・磁束密度に対しては、界面条件として b_n, h_s の連続性が要請されるが（それを見越して添え字 j を省いた）、既知量としての H_X, B_Y を最初から連続に選び、 τ を界面を挟む両流域で区別しなければ、この表示から界面条件は自然に満たされることがわかる。例えば H_X, B_Y は、平らな界面下方の磁気双極子による磁場を鏡像法などで構成する [1, 6]。なお V_X, V_Y は、動的解析の場合、 θ, τ と共に未知量として求める。

3. 磁場－流体強結合発展方程式

流速ポテンシャル、重力加速度、磁性流体密度、磁性流体側圧力、真空側圧力、表面変位、流速、磁気応力差、表面張力を $\phi, g, \rho, p_i, p_e (= 0), \eta, \mathbf{v} = -\nabla\phi, T, p_c$ で表せば、渦なし・非粘性の場合の Bernoulli 方程式および界面における法線応力連続条件は [5]

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial X} \left(-\frac{\partial\phi}{\partial t} + g\eta + \frac{p_i}{\rho} + \frac{\mathbf{v}^2}{2} \right) = 0, \\ -p_e + p_i - T = p_c \end{cases} \quad (5)$$

となる。ここで界面に沿う微分は、 $Y = 0$ 上での X 微分となる。 p_i を消去すれば、力学的条件が導かれるが、次にこれを θ, τ および Flat Space における量で表す。

1. 重力項の界面勾配には、式 (1) の虚部をそのまま使う。
2. 表面張力係数と表面の曲率半径を γ, R として、式 (1) の実部・虚部を用い、表面張力項を $p_c = \gamma/R = -\gamma e^\tau \partial\theta/\partial X$ と書き換える。
3. 磁気力項は、 h_s, b_n による磁気応力差の表式

$$T = -(1/2) [1/\mu_j] (\mu_1 \mu_2 h_s^2 + b_n^2)$$
 を式 (4) で書き換える。
4. 加速度項は $V_X = -\partial\Phi/\partial X$ により、動圧項は式 (4) で書き換える。

以上により、力学的条件から、次のような V_X に対する発展方程式が導かれる。

$$\frac{\partial V_X}{\partial t} = -g e^{-\tau} \sin \theta + \frac{\gamma}{\rho} \frac{\partial}{\partial X} \left(e^\tau \frac{\partial \theta}{\partial X} \right) + \frac{\partial}{\partial X} \left\{ \frac{e^{2\tau}}{2\rho} \left[\frac{1}{\mu_j} \right] (\mu_1 \mu_2 H_X^2 + B_Y^2) \right\} - \frac{\partial}{\partial X} \left\{ \frac{e^{2\tau}}{2} (V_X^2 + V_Y^2) \right\}. \quad (6)$$

式 (6) に含まれる $\theta, \tau, V_X, V_Y, H_X, B_Y$ のうち、 H_X, B_Y は既知量として扱う。また定常問題の場合、 V_X, V_Y は 0 となるため、式 (6) は、重力・表面張力・磁気力の釣り合いを θ, τ だけで表した方程式となる。既に述べたように、 $\theta + i\tau$ の解析性より θ, τ は Hilbert 変換を通じて相互依存するので、結局これらは閉じた方程式の解として求められる。しかし動的解析では、 V_X, V_Y を未知量として求めることになり、それには、運動学的条件から導かれる以下の方程式と連立する必要がある。

運動学的条件としては、 $\partial\eta/\partial t + \mathbf{v} \cdot \nabla\eta = 0$ を用いることが多いが、これは η が X に関して 1 価関数であることを前提としている。ここではこれを

用いずに，界面上の点の座標 (x, y) の時間微分による界面移動速度の定義

$$u_x - iu_y = \frac{\partial(x - iy)}{\partial t} = e^{-i(\theta+i\tau)}(U_X - iU_Y) \quad (7)$$

から始める．ただし (U_X, U_Y) は Flat Space における界面移動速度である．写像変換 (1) を時間微分した後，式 (7) を適用すると，

$$\frac{\partial e^{i(\theta+i\tau)}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial X} \frac{\partial(x + iy)}{\partial t} = \frac{\partial(u_x + iu_y)}{\partial X} = \frac{\partial e^{i(\theta+i\tau)}(e^{2\tau}U_X + ie^{2\tau}U_Y)}{\partial X} \quad (8)$$

となる．ところで運動学的条件は，流速と界面移動速度の法線成分同士の一一致を述べたもので，これは Real Space で $u_n = v_n$ ，Flat Space で $U_Y = V_Y$ と表される．上の式を整理してこの条件を用いれば，式 (6) と連立して解くべき次の式が得られる．

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \text{Im} e^{-i(\theta+i\tau)} \frac{\partial e^{i(\theta+i\tau)}}{\partial t} = (e^{2\tau}U_X) \frac{\partial \theta}{\partial X} - (e^{2\tau}V_Y) \frac{\partial \tau}{\partial X} + \frac{\partial}{\partial X}(e^{2\tau}V_Y). \quad (9)$$

ここで U_X は任意に与えられるように思われるが，式 (8) の両辺が解析的になるよう， $e^{2\tau}V_Y$ と共役な $e^{2\tau}U_X$ を求めるべきである．

4. 動的解析のための手続き

4.1 基底関数によるスペクトル展開

Flat Space の区間長を L として，境界 $X = \pm L/2$ における値または勾配が 0 という境界条件のもとで式 (6),(9) の解 $\theta(X, t)$, $\tau(X, t)$, $V_X(X, t)$, $V_Y(X, t)$ を求めるには，これらを Fourier 級数に展開して，そのスペクトル成分の時間発展を見るのが簡明である．整数・半整数による波数ごとの反対称・対称な基底関数

$$\begin{cases} S_n^e(X) = \sin k_n^e X, & C_n^e(X) = \cos k_n^e X, & k_n^e \equiv \frac{n\pi}{L/2}, \\ C_n^o(X) = \cos k_n^o X, & S_n^o(X) = \sin k_n^o X, & k_n^o \equiv \frac{(n+1/2)\pi}{L/2} \end{cases} \quad (10)$$

を導入すれば, θ, V_X のように $f(X, t)|_{X=\pm L/2} = 0$ を課した関数 $f(X, t)$, τ, V_Y のように $\partial g(X, t)/\partial X|_{X=\pm L/2} = 0$ を課した関数 $g(X, t)$ はそれぞれ

$$\begin{cases} f(X, t) = \sum_{n=1}^N [a_n(t)S_n^e(X) + b_n(t)C_n^o(X)], \\ g(X, t) = \sum_{n=1}^N [-a_n(t)C_n^e(X) + b_n(t)S_n^o(X)] \end{cases} \quad (11)$$

と展開できる. ここでそれぞれの関数を反対称・対称部分ごとに展開し, 次節の解析性の議論を踏まえて符号をつけた.

4.2 解析性に基づく相互共役関数の導出

式 (11) によれば,

$$\begin{cases} (f + ig)(Z) = \sum_{n=1}^N [-ia_n(t)e^{ik_n^o Z} + b_n(t)e^{ik_n^e Z}], \\ (f - ig)(Z) = \sum_{n=1}^N [ia_n(t)e^{-ik_n^e Z} + b_n(t)e^{-ik_n^o Z}] \end{cases} \quad (12)$$

はそれぞれ, Flat Space の上半面・下半面で解析的である. これより, どちらの半面にも共通に実軸 $Z = X$ 上で成り立つ Hilbert 変換

$$\begin{cases} f(X) = H^{-1}g(X) \equiv \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dX' \frac{g(X')}{X' - X}, \\ g(X) = Hf(X) \equiv -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dX' \frac{f(X')}{X' - X} \end{cases} \quad (13)$$

を導くことができる.

式 (13) は, 式 (6), (9) を時間積分して $V_X(X, t) \theta(X, t)$ を得た後, 残る V_Y, τ, U_X を求めるために利用できる. $\theta + i\tau, V_X - iV_Y, e^{2\tau}U_X + ie^{2\tau}V_Y$ の解析性を仮定するときは,

$$\tau(X) = H\theta, \quad V_Y(X) = -HV_X, \quad U_X(X) = e^{-2\tau}H^{-1}e^{2\tau}V_Y. \quad (14)$$

ただし実際にこの関係を使うとき，式(13)における積分の実行は必要なく，式(11)に基づいて Fourier 係数 $a_n(t)$, $b_n(t)$ を求めた後，共役関数の逆変換にこれを用いればよい．なお，このような相互共役関数の求め方は，今井による著書 [7] でも述べられている．

5. Hilbert 変換の拡張

これまで述べてきたように，複素解析は，2次元解析にとどまる限り，極めてよい見通しを与えるが，3次元解析へ移るためには，これに頼らない拡張を進めて行く必要がある．ここでは Hilbert 変換を取り上げる．

2次元 Hilbert 変換は，複素関数 $\theta + i\tau$ の解析性から実軸上での θ と τ の相互依存を導くが，解析性は Laplace 方程式 $\nabla^2\Phi = 0$ を満たすポテンシャル Φ の存在に帰着する．ここで $\Phi \equiv (\varphi, a)^T$ はベクトルで， φ, a は Cauchy-Riemann の関係 $\partial\tau/\partial X = -\partial\theta/\partial Y$, $\partial\theta/\partial X = \partial\tau/\partial Y$ を満たす θ, τ を与えるため，以下のように導入した．

$$\frac{\partial\Phi}{\partial X} = \begin{pmatrix} \theta \\ \tau \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial\Phi}{\partial Y} = \begin{pmatrix} -\tau \\ \theta \end{pmatrix}. \quad (15)$$

ところで， $\mathbf{r} = (x, y)$ をソース点座標， $\mathbf{R} = (X, Y)$ を観測点座標， $\nabla_{\mathbf{r}}^2\psi = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{R})$ を満たす $\psi(\mathbf{r} - \mathbf{R})$ を基本解と呼べば， $\nabla^2\Phi = 0$ を満たす Φ に対して境界要素法方程式 (BEM 方程式)

$$c_i\Phi(\mathbf{R}) = \iint_S dS \left[\Phi(\mathbf{r}) \frac{\partial\psi}{\partial n} - \frac{\partial\Phi(\mathbf{r})}{\partial n} \psi \right] \quad (16)$$

が成り立つ [8]．ここで閉領域の表面積分 $\iint_S dS$ と法線微分 $\partial/\partial n$ はソース点に関して行う．また c_i は， \mathbf{R} が領域の外部・内部・境界・隅に応じて，0, 1, 1/2, 1/4 と変化する．2次元・3次元における基本解とその勾配は次

のようになる。

$$\psi = \begin{cases} \frac{\ln|\mathbf{r} - \mathbf{R}|}{2\pi} & (2 \text{次元}), \\ \frac{-1}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{R}|} & (3 \text{次元}), \end{cases} \quad \nabla_{\mathbf{r}}\psi = \begin{cases} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{R}}{2\pi|\mathbf{r} - \mathbf{R}|^2} & (2 \text{次元}), \\ \frac{\mathbf{r} - \mathbf{R}}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{R}|^3} & (3 \text{次元}). \end{cases} \quad (17)$$

次に式(16)の両辺を X で偏微分する。ここで X は表面座標で、 x と共に前節までの Flat Space の X に相当する。左辺は、(15)で置き換える。右辺でこの微分は ψ にかかるが、 ψ は $\mathbf{r} - \mathbf{R}$ の関数なので、 $\partial\psi/\partial X = -\partial\psi/\partial x$ である。被積分関数の第1項は部分積分の後、閉領域の表面積分より

$\iint_S dS \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \Phi(\mathbf{r}) \frac{\partial\psi}{\partial n} \right\}$ を0と置く。以上により、

$$\begin{aligned} c_i \frac{\partial\Phi(\mathbf{R})}{\partial X} &= c_i \begin{pmatrix} \theta(\mathbf{R}) \\ \tau(\mathbf{R}) \end{pmatrix} \\ &= \iint_S dS \left[\Phi(\mathbf{r}) \frac{\partial}{\partial X} \frac{\partial\psi}{\partial n} - \frac{\partial\Phi(\mathbf{r})}{\partial n} \frac{\partial\psi}{\partial X} \right] \\ &= \iint_S dS \left[\frac{\partial\Phi(\mathbf{r})}{\partial x} \frac{\partial\psi}{\partial n} + \frac{\partial\Phi(\mathbf{r})}{\partial n} \frac{\partial\psi}{\partial x} \right]. \end{aligned} \quad (18)$$

ここで積分領域を2次元無限平面 $y = 0$ に限定し、 \mathbf{n} , \mathbf{x} を法線ベクトル・表面ベクトルとすれば、 $\mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{R}) = 0$, $\mathbf{x} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{R}) = x - X$ より $\partial\psi/\partial n = \mathbf{n} \cdot \nabla_{\mathbf{r}}\psi = 0$, $\partial\psi/\partial x = \mathbf{x} \cdot \nabla_{\mathbf{r}}\psi = 1/2\pi(x - X)$ となる。また、表面積分を $\iint_S dS \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} dx$ と書き換えて、更に、式(15)より $\partial\Phi/\partial n = \mp \partial(\varphi, a)^{\mathbb{T}}/\partial y = \mp(-\tau, \theta)^{\mathbb{T}}$ (複号は領域が表面の上下にあることに対応する) とすれば、結局

$$\begin{pmatrix} \theta \\ \tau \end{pmatrix} = \mp \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{2c_i\pi(x - X)} \begin{pmatrix} -\tau \\ \theta \end{pmatrix} \quad (19)$$

が導出され、領域の境界上に観測点がある場合として $c_i = 1/2$ と置けば2次元 Hilbert 変換となる。これから式(18)が、3次元曲面にも適用可能な、

いわば一般化された Hilbert 変換であることが確認されたことになる。なお、表面に特異点のある場合は、その尖りに応じた値を (18) の c_i に与えれば扱えることが予想される。

6. まとめ

磁場と流速場の調和性は前提にするが、非一様な磁場分布、有限な透磁率差、表面張力などの現実的な条件を考慮した磁性流体自由表面の解析法を、波動の安定性解析などの動的解析ができるように拡張した。より現実的な状況に近づけるため、更に、(1) 粘性、(2) 有限領域、(3) 特異点、(4) 3次元化、の取り込みや拡張を予定しているが、本稿では、(4) のための焦点のひとつとなる Hilbert 変換が拡張可能であることを示した。

参考文献

- [1] Y.Mizuta: Analysis on large free surface deformation of magnetic fluid; *Mathematical Sciences and Applications*, **10**, p.337 (1997).
- [2] 水田 洋: 複素磁場を用いた磁性流体自由表面の無近似非線形波動解析; 日本流体力学会 2000 講演論文集, p.485 (2000).
- [3] 水田 洋: 磁場-流体強結合系の発展方程式とその解; 数値流体力学シンポジウム講演論文集, **14** (<http://wwwsoc.nacsis.ac.jp/jscfd/cfds14/cfds14.html>), C09-3 (2000).
- [4] R.E.Rosensweig: *Ferrohydrodynamics* (Cambridge University Press, Cambridge) Chap.7 (1985).
- [5] R.E.Rosensweig: *ibid.*, Chap.4, Chap.5.
- [6] 水田 洋: 磁性流体自由表面の大振幅変形に関する非線形解析; 磁性流体連合講演会講演論文集, **9**, p.30 (1995).
- [7] 今井 功: 流体力学(前編)(裳華房, 東京) p.221 (1973).
- [8] C.A. プレビア, S. ウォーカー: 境界要素法の基礎と応用(神谷紀生他訳)(培風館, 東京) 第2章 (1981).