数理解析研究所講究録 1212 巻 2001 年 32-42

自己双対方程式のパンルベ解析

大阪大学数学　奥村昌司(Shoji Okumura)
Math. Sci. Osaka Univ., Japan

1 導入

この論文の目的は,群 $SU(2)$ による3次元の作用によって不変な実4次元リーマン計量 g についての反自己双対方程式を解析することである. ここでは主に scalar-flat Kähler 計量を扱う. scalar-flat Kähler 計量とは scalar 曲率が平坦な Kähler 計量であり, 自動的に標準的な向きづけのもとで反自己双対的となる.

$SU(2)$ 不変な反自己双対的な計量は Hitchin[6] によって, generic な場合には Painlevé VI 型方程式の解と対応し,特に計量が scalar-flat Kähler の場合にはPainlevé III 型方程式の解と対応することが示されている. そこでは, 自己双対方程式と Painlevé 方程式を対応づけるのに, twistor 対応が重要な役割を果しているおり, この対応は単なる変数変換によって得られるものではない.

M 上の $\mathbb{CP}^1$-bundle Z を考えると Z 上に概複素構造が定義できる. そしてこの概複素構造の可積分条件が M の自己双対条件と同値となることが知られている. このとき Z は複素3次元の空間となり,twistor 空間と呼ばれる. ここで M 上の $SU(2)$ の作用を持上げることによって, Z に $SU(2)$ の pre-homogenious な作用が定まり, これによって $\mathbb{CP}^1$-bundle 上の接続のモノドロミー不変な族が得られる. こうして Painlevé 方程式が現れた.

この対応において Dancer[5] は $SU(2)$ 対称な scalar-flat Kähler 計量を解析し,Hitchin[6] は $SU(2)$ 対称な反自己双対 Einstein 計量の分類を行った. いずれの研究においても計量が対角的な場合にだけしか, 自己双対方程式と Painlevé 方程式の対応が具体的には与えられておらず, 非対角的な場合についてはほとんど知られていない. 特に scalar-flat Kähler 計量について, 非対角的な場合には複素構造も知られていない.

この論文では $SU(2)$ 対称な自己双対方程式に対応する Schlesinger 方程式を構成することによって, 非対角的な場合を含めた場合について解析した.

第2章では非対角的な計量について Besse[3] による曲率テンソルの分解を用いて, 自己双対方程式に同値な9階の方程式を与えた.

第3章では $SU(2)$ 対称な反自己双対多様体とモノドロミー不変変形の対応を与え, 対応する Schlesinger 方程式の形を具体的に与えた.

第4章では自己双対方程式が Painlevé III 型方程式に対応することが,計量がエルミート構造を持つことと必要十分であることを示した. このとき自己双対方程式に対応する9階の系はは7階の系に帰着し, さらに Kähler 構造も仮定すると,6階の系に退化することを示した.

Acknowledgements
この分野に導いてくださった大山陽介氏に感謝の念を表します.

2 非対角的な自己双対方程式

3次元の軌道を持つ $SU(2)$ の作用によって不変な Rieman 計量は次の形に書くことができる:

$$g = f(\tau)d\tau^2 + \sum_{l,m=1}^{3} h_{lm}(\tau)\,\sigma_l\sigma_m.$$

ここで $\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ は各 $SU(2)$ 軌道上の左不変な 1形式 たちの基底であり, 次を満たす. $SU(2)$-orbit satisfying

$$d\sigma_1 = \sigma_2 \wedge \sigma_3, \qquad d\sigma_2 = \sigma_3 \wedge \sigma_1, \qquad d\sigma_3 = \sigma_1 \wedge \sigma_2.$$

Killing 形式を用いることにより,計量 g を各 $SU(2)$ 軌道上対角化できる. こうして,次のように計量をあらわすことができる:

$$g = (abc)^2dt^2 + a^2d\tilde{\sigma}_1^2 + b^2\tilde{\sigma}_2^2 + c^2\tilde{\sigma}_3^2,$$

ここで $t = t(\tau), a = a(t), b = b(t), c = c(t)$ であり,

$$\begin{pmatrix} \tilde{\sigma}_1 \\ \tilde{\sigma}_2 \\ \tilde{\sigma}_3 \end{pmatrix} = R(t) \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{pmatrix},$$

$R(t)$ は $SO(3)$ 値の関数である.

ここで $\dot{R}R^{-1}$ (where $\dot{*} = \frac{d}{dt}$) は $\mathfrak{so}(3)$ 値であるから次が得られる.

$$\begin{aligned} d\begin{pmatrix} \tilde{\sigma}_1 \\ \tilde{\sigma}_2 \\ \tilde{\sigma}_3 \end{pmatrix} &= R(t)\begin{pmatrix} \sigma_2 \wedge \sigma_3 \\ \sigma_3 \wedge \sigma_1 \\ \sigma_2 \wedge \sigma_2 \end{pmatrix} + \dot{R}\,dt \wedge \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \tilde{\sigma}_2 \wedge \tilde{\sigma}_3 \\ \tilde{\sigma}_3 \wedge \tilde{\sigma}_1 \\ \tilde{\sigma}_1 \wedge \tilde{\sigma}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \xi_3 & -\xi_2 \\ -\xi_3 & 0 & \xi_1 \\ \xi_2 & -\xi_1 & 0 \end{pmatrix} dt \wedge \begin{pmatrix} \tilde{\sigma}_1 \\ \tilde{\sigma}_2 \\ \tilde{\sigma}_3 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

ここで $\xi_1 = \xi_1(t)$, $\xi_2 = \xi_2(t)$, $\xi_3 = \xi_3(t)$.

もし $\xi_1 = 0, \xi_2 = 0, \xi_3 = 0$ であったとすると, 行列 (h_{lm}) はすべての τ について対角的となるように選び直すことができ, したがってこの場合は計量 g は対角的であると言うことができる.

この論文では主に非対角的な場合を扱う.

曲率テンソルを計算するために $\bigwedge^2$ の基底

$$\{\Omega_1^+, \Omega_2^+, \Omega_3^+, \Omega_1^- \Omega_2^-, \Omega_3^-\},$$

を

$$\begin{aligned}
\Omega_1^+ &= a^2bc\,dt \wedge \tilde{\sigma}_1 + bc\,\tilde{\sigma}_2 \wedge \tilde{\sigma}_3, \\
\Omega_2^+ &= ab^2c\,dt \wedge \tilde{\sigma}_2 + ca\,\tilde{\sigma}_3 \wedge \tilde{\sigma}_1, \\
\Omega_3^+ &= abc^2\,dt \wedge \tilde{\sigma}_3 + ab\,\tilde{\sigma}_1 \wedge \tilde{\sigma}_2, \\
\Omega_1^- &= a^2bc\,dt \wedge \tilde{\sigma}_1 - bc\,\tilde{\sigma}_2 \wedge \tilde{\sigma}_3, \\
\Omega_2^- &= ab^2c\,dt \wedge \tilde{\sigma}_2 - ca\,\tilde{\sigma}_3 \wedge \tilde{\sigma}_1, \\
\Omega_3^- &= abc^2\,dt \wedge \tilde{\sigma}_3 - ab\,\tilde{\sigma}_1 \wedge \tilde{\sigma}_2,
\end{aligned}$$

で定める. この フレーム に関して曲率テンソルは次のように分解される [3].

$$\begin{pmatrix} A & B \\ {}^tB & D \end{pmatrix},$$

ここで $s = 4\,\mathrm{trace}D$ は scalar 曲率, $W^+ = A - \frac{1}{12}s$ と $W^- = D - \frac{1}{12}s$ は Weyl 曲率のそれぞれ自己双対と反自己双対成分, B は Ricci テンソルの trace free 成分である.

そして $w_1 = bc, w_2 = ca, w_3 = ab$ とおき $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ を次で定義する:

$$\begin{aligned}
\dot{w}_1 &= -w_2w_3 + w_1(\alpha_2 + \alpha_3), \\
\dot{w}_2 &= -w_3w_1 + w_2(\alpha_3 + \alpha_1), \\
\dot{w}_3 &= -w_1w_2 + w_3(\alpha_1 + \alpha_2).
\end{aligned} \tag{1}$$

ここで $A = 0$ となる条件を計算して次の定理が得られる.

Theorem 2.1 計量が反自己双対かつ *scalar* 曲率零になるのことは $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$

と ξ_1, ξ_2, ξ_3 が以下の方程式をみたすことと同値である:

$$
\begin{aligned}
\dot{\alpha}_1 =& -\alpha_2\alpha_3 + \alpha_1(\alpha_2+\alpha_3) + \frac{1}{4}(w_2^2 - w_3^2)^2 \left(\frac{\xi_1}{w_2w_3}\right)^2 \\
&+ \frac{1}{4}(w_3^2 - w_1^2)(3w_1^2 + w_3^2)\left(\frac{\xi_2}{w_3w_1}\right)^2 \\
&+ \frac{1}{4}(w_2^2 - w_1^2)(3w_1^2 + w_2^2)\left(\frac{\xi_3}{w_1w_2}\right)^2, \\
\dot{\alpha}_2 =& -\alpha_3\alpha_1 + \alpha_2(\alpha_3+\alpha_1) + \frac{1}{4}(w_3^2 - w_1^2)^2 \left(\frac{\xi_2}{w_3w_1}\right)^2 \\
&+ \frac{1}{4}(w_1^2 - w_2^2)(3w_2^2 + w_1^2)\left(\frac{\xi_3}{w_1w_2}\right)^2 \\
&+ \frac{1}{4}(w_3^2 - w_2^2)(3w_2^2 + w_3^2)\left(\frac{\xi_1}{w_2w_3}\right)^2, \\
\dot{\alpha}_3 =& -\alpha_1\alpha_2 + \alpha_3(\alpha_1+\alpha_2) + \frac{1}{4}(w_1^2 - w_2^2)^2 \left(\frac{\xi_3}{w_1w_2}\right)^2 \\
&+ \frac{1}{4}(w_2^2 - w_3^2)(3w_3^2 + w_2^2)\left(\frac{\xi_1}{w_2w_3}\right)^2 \\
&+ \frac{1}{4}(w_1^2 - w_3^2)(3w_3^2 + w_1^2)\left(\frac{\xi_2}{w_3w_1}\right)^2,
\end{aligned} \tag{2}
$$

さらに

$$
\begin{aligned}
(w_2^2 - w_3^2)\frac{d}{dt}\left(\frac{\xi_1}{w_2w_3}\right) =& \frac{\xi_2}{w_3w_1}\frac{\xi_3}{w_1w_2}(-2w_2^2w_3^2 + w_3^2w_1^2 + w_1^2w_2^2) \\
&+ \frac{\xi_1}{w_2w_3}(\alpha_2w_2^2 - \alpha_3w_3^2 + 3\alpha_2w_3^2 + 3\alpha_3w_2^2), \\
(w_3^2 - w_1^2)\frac{d}{dt}\left(\frac{\xi_2}{w_3w_1}\right) =& \frac{\xi_3}{w_1w_2}\frac{\xi_1}{w_2w_3}(-2w_3^2w_1^2 + w_1^2w_2^2 + w_2^2w_3^2) \\
&+ \frac{\xi_2}{w_3w_1}(\alpha_3w_3^2 - \alpha_1w_1^2 + 3\alpha_3w_1^2 + 3\alpha_1w_2^2), \\
(w_1^2 - w_2^2)\frac{d}{dt}\left(\frac{\xi_3}{w_1w_2}\right) =& \frac{\xi_1}{w_1w_3}\frac{\xi_2}{w_3w_1}(-2w_1^2w_2^2 + w_2^2w_3^2 + w_3^2w_1^2) \\
&+ \frac{\xi_3}{w_1w_2}(\alpha_1w_1^2 - \alpha_2w_2^2 + 3\alpha_1w_2^2 + 3\alpha_2w_1^2).
\end{aligned} \tag{3}
$$

Remark 2.2 もし $\xi_1 = 0$, $\xi_2 = 0$,$\xi_3 = 0$ ならば (1), (2), (3) は *Tod*[9] により与えられた *6* 階の方程式に退化する. これは *Hitchin*[6] の分類した自

己双対 *Einstein* 計量や *Dancer*[5] の *scalar-flat Käheler* 計量を含む. さらに, もし $\alpha_1 = w_1, \alpha_2 = w_2, \alpha_3 = w_3$ ならば(1),(2),(3) は *3* 階の方程式に退化し *Atiyha-Hitchin* 計量を定める. また, $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, \alpha_3 = 0$ ならば *3* 階の方程式に退化し, これは *BGPP* 計量になる.

Remark 2.3 もし $w_2 = w_3$ ならば, フレームを取直すことによって $\xi_1 = 0$, $\xi_2 = 0$, $\xi_3 = 0$ とすることができる. これも対角的な場合である. したがって, 以降非対角的な場合を考察するために $(w_2 - w_3)(w_3 - w_1)(w_1 - w_2) \neq 0$ を仮定する.

3 反自己双対方程式に対応するSchlesinger方程式

(M, g) を向き付られた 4 次元 Riemann 多様体とする. ここで Z を自己双対 2 次形式のバンドルの中の単位球面バンドルとする. そして $\pi : Z \to M$ を射影とする. Z の各点 z は $\pi(z)$ 上のファイバーに含まれ, 接空間 $T_{\pi(z)}M$ 上に計量と向きづけに可換な複素構造を定める.

Levi-Civita 接続を用いて, 接空間 $T_z Z$ を水平方向と垂直方向に分解できる. そして, 射影 π は水平方向を $T_{\pi(z)}M$ に同一視させる. こうして $T_z Z$ の水平方向は z によって定まる複素構造を持ち, 垂直方向は $S^3 \cong \mathbb{CP}^1$ の接空間と同一視できるから自然な複素構造を持つ.

こうして Z の各点の接空間に対して複素構造が定義でき,Z 全体に概複素構造が定義される. この概複素構造が可積分であることと, 計量が反自己双対的であることが同値であることが知られている [2, 8]. このとき Z は (M, g) の twistor 空間と呼ばれ, ファイバーは実 twistor 直線と呼ばれる.

Z 上の概複素構造は次の (1, 0) 形式で定義される:

$$
\begin{aligned}
\Theta_1 =& z(e^2 + \sqrt{-1}e^3) - (e^0 + \sqrt{-1}e^1), \\
\Theta_2 =& z(e^0 - \sqrt{-1}e^1) + (e^2 - \sqrt{-1}e^3), \\
\Theta_3 =& dz + \frac{1}{2}z^2(\omega_2^0 - \omega_1^3 + \sqrt{-1}(\omega_3^0 - \omega_2^1)) \\
& - \sqrt{-1}z(\omega_1^0 - \omega_3^2) + \frac{1}{2}(\omega_2^0 - \omega_1^3 - \sqrt{-1}(\omega_3^0 - \omega_2^1)),
\end{aligned} \tag{4}
$$

ここで $\{e^0, e^1, e^2, e^3\}$ は M の直交フレームであり, ω_j^i たちは $de^i + \omega_j^i \wedge e^j = 0$ と $\omega_j^i + \omega_i^j = 0$ によって定まる Levi-Civita 接続である. すると反自己双対の条件は次で書ける:

$$
d\Theta_1 \equiv 0, \qquad d\Theta_2 \equiv 0, \qquad d\Theta_3 \equiv 0 \qquad (\text{mod } \Theta_1, \Theta_2, \Theta_3). \tag{5}
$$

もし計量が $SU(2)$ 不変ならば, 先の条件は

$$\begin{pmatrix} \Theta_1 \\ \Theta_2 \\ \Theta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} dz + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} dt + A \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{pmatrix}, \tag{6}$$

と書直せる. ここで $v_1 = v_1(z,t), v_2 = v_2(z,t), v_3 = v_3(z,t); A = (a_{ij}(z,t))_{i,j=1,2,3}$ である.

ここで $\det A \equiv 0$ ならば計量は BGPP[4] になることを注意しておく.

また $\det A \neq 0$ ならば次のように書ける

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{pmatrix} \equiv -A^{-1} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} dz + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} dt \right) =: \begin{pmatrix} \varsigma_1 \\ \varsigma_2 \\ \varsigma_3 \end{pmatrix}, \tag{7}$$

したがって

$$d \begin{pmatrix} \varsigma_1 \\ \varsigma_2 \\ \varsigma_3 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \varsigma_2 \wedge \varsigma_3 \\ \varsigma_3 \wedge \varsigma_1 \\ \varsigma_1 \wedge \varsigma_2 \end{pmatrix}. \tag{8}$$

$\varsigma_1, \varsigma_2, \varsigma_3$ は (z,t) 平面状の 1 形式なので次が成立つ:

$$d \begin{pmatrix} \varsigma_1 \\ \varsigma_2 \\ \varsigma_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varsigma_2 \wedge \varsigma_3 \\ \varsigma_3 \wedge \varsigma_1 \\ \varsigma_1 \wedge \varsigma_2 \end{pmatrix}. \tag{9}$$

もし

$$\Sigma = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{-1}\varsigma_1 & \varsigma_3 + \sqrt{-1}\varsigma_2 \\ \varsigma_3 + \sqrt{-1}\varsigma_2 & \sqrt{-1}\varsigma_1 \end{pmatrix} \tag{10}$$

$$=: -B_1\, dz - B_2\, dt, \tag{11}$$

が成立つと仮定すると

$$d\Sigma + \Sigma \wedge \Sigma = 0 \tag{12}$$

となる. これは次の方程式のモノドロミー保存の条件 (Schlesinger 方程式) である:

$$\left(\frac{d}{dz} - B_1 \right) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = 0. \tag{13}$$

ここで B_1 は $\{z \mid \det A = 0\}$ 上に極をもつ.

Remark 3.1 *Hitchin*[6] や *Dancer*[5] らの研究において，この *Schleginger* 方程式の具体的な形が知られていなかったことが非対角的な場合の研究の一つの障害となっていた.

Lemma 3.2 条件 $det\, A = 0$ は 次の方程式と同値である:

$$z^4\left((\alpha_2+\alpha_3)-\sqrt{-1}X_1\right)-2z^3\left(X_2-\sqrt{-1}X_3\right)+2z^2\left(-2\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3\right)$$
$$+2z\left(X_2+\sqrt{-1}X_3\right)+\left((\alpha_2+\alpha_3)+\sqrt{-1}X_1\right)=0, \quad (14)$$

ここで

$$X_1=\frac{w_2^2-w_3^2}{w_2w_3}\xi_1, \qquad X_2=\frac{w_3^2-w_1^2}{w_3w_1}\xi_2, \qquad X_3=\frac{w_1^2-w_2^2}{w_1w_2}\xi_3.$$

この Lemma によって，generic には B_1 は 4 点の一位の極を持つことがわかる.

Theorem 3.3 $SU(2)$ 不変な計量についての反自己双対方程式は *generic* には *Painlevé VI* 型の方程式に帰着する.

Remark 3.4 $z=\zeta$ が $detA=0$ の解であったとすると $z=-1/\bar{\zeta}$ もまた解である. したがって条件 $detA=0$ は *twistor* 空間の実構造と可換である.

Remark 3.5 *Hitchin* [6] の方法は $SU(2)$ の *twistor* 空間 Z に持上げられた作用がベクトルバンドルの順同型写像 $\alpha: Z\times \mathfrak{su}(2)^{\mathbb{C}}\to TZ$ を定めることによる. そして α の逆は *meromorphic* な $SL(2,\mathbb{C})$ 接続をさだめ，こうしてモノドロミー保存変形が定まった. 上で定めた $\Theta_1,\Theta_2,\Theta_3$ を Z の微少変分だと考えると，Σ は α^{-1} と同一視できる.

Lemma 3.6 g を非対角的な $SU(2)$ 不変の計量とする. すると (14) が *2*つの *2*位の解を持つ条件は次を満足する関数 $f(t)$ が存在する条件と同値である:

$$\begin{aligned} X_1^2 =&4(f-\alpha_2)(f-\alpha_3),\\ X_2^2 =&4(f-\alpha_3)(f-\alpha_1),\\ X_3^2 =&4(f-\alpha_1)(f-\alpha_2). \end{aligned}$$

この条件の下で反自己双対方程式は (1), (2) と $\dot{f}=f^2$ に退化する.

証明.
方程式 (14) を次のような形に書くことができる:

$$\bar{a}\,z^4-\bar{b}\,z^3+c\,z^2+b\,z+a=0, \quad (15)$$

ここで a, b 複素係数であり c は実係数である.twistor 空間の実構造を保つ一次分数変換

$$z \mapsto \frac{(b-|b|)\,\zeta - b + |b|}{(-\bar{b}+|b|)\,\zeta - \bar{b} + |b|} \tag{16}$$

によって, (14) は

$$\zeta^4 - \bar{b}_0\zeta^3 + c_0\zeta^2 + b_0\zeta + 1 = 0, \tag{17}$$

と書きかえられる.ここで b_0 は複素係数であり c_0 は実係数である. この方程式は実構造と可換なので, $\zeta = \zeta_0$ が 2 次の解ならば $\zeta = -1/\bar{\zeta}_0$ もまた 2 次の解である. したがって

$$\zeta^4 - \bar{b}_0\zeta^3 + c_0\zeta^2 + b_0\zeta + 1 = (\zeta - \zeta_0)^2(\zeta + 1/\bar{\zeta}_0)^2, \tag{18}$$

こうして $\zeta_0^2\left(-1/\bar{\zeta}_0\right)^2 = 1$ さらに $\zeta_0 = \pm\bar{\zeta}_0$ が得られる. この条件から ζ_0 は実数であるか順虚数であることがわかる. したがって b_0 は実数であるか順虚数でなければならない. この条件を計算して Lemmaが証明される.

4 エルミート構造と Painlevé III

Hitchin [6] は もし計量が scalar-flat Kähler (Hyper-Kählerの場合は除く)であるとすると, 反自己双対方程式は Painleve III 型の方程式に帰着することを示した. われわれの言葉で言いかえると次のようなことになる

Corollary 4.1 もし計量が *scalar-flat-Kähler(hyper-Kähler* の場合は除く*)* とすると方程式 (14) は *2*つの *2*位の解を持つ.

$z = z(t)$ を (14) の解としよう. Z 上の 1 形式 Θ_1, Θ_2 を $z = z(t)$ に制限すると, M 上の $(1,0)$ 形式が定まるり, これは M 上の概複素構造を定める. この概複素構造に注意すると, 次の定理が得られる.

Theorem 4.2 g を $SU(2)$ 不変な反自己双対な *scalar-flat* 計量とする. すると $SU(2)$ 不変なエルミート構造 (g, I) が存在することと(14) が *2*位解を持つことは同値である.

証明.

(g, I) を $SU(2)$ 不変なエルミート構造とする. 複素構造 I に対応して t だけに依存する $z = z(t)$ が存在して $\Theta_1|_{z=z(t)}$ and $\Theta_2|_{z=z(t)}$ が独立な2つの $(1,0)$

形式になる. I は複素構造なので, $\Theta_3|_{z=z(t)} \equiv 0 \pmod{\Theta_1|_{z=z(t)}, \Theta_2|_{z=z(t)}}$ が成立つ. したがって次が成立つ:

$$\begin{aligned} dz|_{z=z(t)} = \Big\{ & \frac{1}{4}\left(-\alpha_2+\alpha_3+\sqrt{-1}X_1\right) z^3 \\ & -\frac{1}{2}\left(\frac{w_1^2}{w_3^2-w_1^2}X_2+\sqrt{-1}\frac{w_1^2}{w_1^2-w_2^2}X_3\right) z^2 + \frac{\sqrt{-1}}{2}X_1 z \\ & -\frac{1}{2}\left(\frac{w_1^2}{w_3^2-w_1^2}X_2-\sqrt{-1}\frac{w_1^2}{w_1^2-w_2^2}X_3\right) \\ & +\frac{1}{4}\left(\alpha_2-\alpha_3+\sqrt{-1}X_1\right) z^3 \Big\} dt. \end{aligned} \tag{19}$$

他方, $\Theta_3|_{z=z(t)} \equiv 0$ であることから, $z = z(t)$ は (14) の解である. さらに $z = z(t)$ と (19) を (14) 左辺の微分に代入すると零になることが計算できる. したがって (14) は2位の解をもつ.

逆に, $z = z_0$ は2位の解であるとすると, Lemma 3.2 より次が得られる: $X_1X_2X_3 \neq 0$ のときは

$$z_0 = \frac{X_2X_3 \pm \sqrt{X_2^2X_3^2 + X_3^2X_2^2 + X_1^2X_2^2}}{X_1(X_2 - \sqrt{-1}X_3)}, \tag{20}$$

したがって $\Theta_3|_{z=z(t)} \equiv 0$ が成立つ. こうして (1,0) 形式 $\Theta_1|_{z=z(t)}$, $\Theta_2|_{z=z(t)}$ によって定まる概複素構造は可積分である.

$X_1X_2X_3 = 0$ のときは, f は α_1, α_2 , α_3 のいずれかに等しくなければならない. ここで $f = \alpha_1$ とすると, $X_2 = 0$ と $X_3 = 0$ が成立ち, したがって

$$z_0 = \frac{\sqrt{\alpha_3 - \alpha_1} + \sqrt{-1}\sqrt{\alpha_2 - \alpha_1}}{\sqrt{\alpha_2 + \alpha_3 + 2\alpha_1}}, \tag{21}$$

が成立つ. さらに $\Theta_3|_{z=z(t)} \equiv 0$. この場合も概複素構造は可積分である.

Remark 4.3 $SU(2)$ 不変なエルミート構造を持つならば, 反自己双対方程式は 7階の方程式に帰着する.

Theorem 4.4 *theorem* 4.2によって定められるエルミート構造 (g, I) が *Kähler* となるの必要十分条件は

$$X_1^2 = 4\alpha_2\alpha_3, \qquad X_2^2 = 4\alpha_3\alpha_1, \qquad X_3^2 = 4\alpha_1\alpha_2 \tag{22}$$

証明.

$X_1X_2X_3 \neq 0$ を仮定する. すると Kähler 形式 は (20) によって次のように定まる:

$$\Omega = \frac{X_2X_3}{\sqrt{X_2^2X_3^2 + X_3^2X_2^2 + X_1^2X_2^2}}\Omega_1^+ + \frac{X_3X_1}{\sqrt{X_2^2X_3^2 + X_3^2X_2^2 + X_1^2X_2^2}}\Omega_2^+ + \frac{X_1X_2}{\sqrt{X_2^2X_3^2 + X_3^2X_2^2 + X_1^2X_2^2}}\Omega_3^+.$$

(1),(2),(3), によって次が成立つ:

$$d\Omega = \frac{2f\,w_1X_2X_3}{\sqrt{X_2^2X_3^2 + X_3^2X_2^2 + X_1^2X_2^2}}\,dt \wedge \tilde{\sigma}_2 \wedge \tilde{\sigma}_3 + \frac{2f\,w_2X_3X_1}{\sqrt{X_2^2X_3^2 + X_3^2X_2^2 + X_1^2X_2^2}}\,dt \wedge \tilde{\sigma}_3 \wedge \tilde{\sigma}_1 + \frac{2f\,w_3X_1X_2}{\sqrt{X_2^2X_3^2 + X_3^2X_2^2 + X_1^2X_2^2}}\,dt \wedge \tilde{\sigma}_1 \wedge \tilde{\sigma}_2.$$

$w_1w_2w_3 \neq 0$ かつ $X_1X_2X_3 \neq 0$ だから, $d\Omega = 0$ は $f = 0$ と同値になる.

また $X_1X_2X_3 = 0$ とすると, f は α_1, α_2 or α_3 のいずれかでなければならない. ここで $f = \alpha_1$ としよう. すると $X_1^2 = 4(\alpha_2 - \alpha_1)(\alpha_3 - \alpha_1)$, $X_2 = 0$, $X_3 = 0$ である. Kähler 形式 は (21) によって次のように定まる:

$$\Omega = \frac{\sqrt{\alpha_2 - \alpha_1}}{\sqrt{\alpha_2 + \alpha_3 - 2\alpha_1}}\Omega_2^+ + \frac{\sqrt{\alpha_3 - \alpha_1}}{\sqrt{\alpha_2 + \alpha_3 - 2\alpha_1}}\Omega_3^+. \tag{23}$$

したがって

$$d\Omega = \frac{2w_2\alpha_1\sqrt{\alpha_2 - \alpha_1}}{\sqrt{\alpha_2 + \alpha_3 - 2\alpha_1}}dt \wedge \tilde{\alpha}_3 \wedge \tilde{\alpha}_1 + \frac{2w_3\alpha_1\sqrt{\alpha_3 - \alpha_1}}{\sqrt{\alpha_2 + \alpha_3 - 2\alpha_1}}dt \wedge \tilde{\alpha}_1 \wedge \alpha_2. \tag{24}$$

計量が非対角的な場合を考えているので, $X_1^2 = 4(\alpha_2 - \alpha_1)(\alpha_3 - \alpha_1) \neq 0$ であり, したがって $d\Omega = 0$ は $\alpha_1(= f) = 0$ と同値になる.

Remark 4.5 計量が *scalar-flat Kähler* ならば, 反自己双対方程式は *6* 階の方程式に退化する.

References

[1] Atiyah, M. F. and Hitchin, N. J.: Low energy scattering of non-Abelian monopoles, *Phys. Lett. A* **107** (1985), 21–25

[2] Atiyha, M. F., Hitchin, N. J. and Singer, I. M.: Self-duality in four-dimensional Riemannian geometry, *Proc. Roy. Soc, London Ser. A* **362** (1978) 425–461

[3] Besse, A. L.: Einstein Manifolds, Springer (1987)

[4] Belinski, V. A., Gibbons, G. W., Page, D. W., Page, D. W. and Pope, C. N.: Asymptotically Euclidean Bianchi IX metrics in quantum gravity, *Phys. Lett. B* **76** (1978),433–435

[5] Dancer, A. S.: Scalar-flat Kähler metrics with $SU(2)$ symmetry, *J. reine. angew. Math.* **479** (1996), 99–120

[6] Hitchin, N. J.: Twistor spaces, Einstein metrics and isomonodromic deformations, *J. Differential Geom.* **42** (1995), 30–112

[7] Pedersen, H. and Poon, Y. S.: Kähler surfaces with zero scalar curvature, *Classical Quantum Gravity* **7** (1990), 1707–1719

[8] Penrose, R.: Nonlinear gravitons and curved twistor theory, *Gen. Rel. Grav.* **7** (1976), 31–52

[9] Tod, K. P.: Self-dual Einstein metrics from the Painlevé VI equation, *Phys. Lett. A* **190** (1994), 221–224