

# WDVV 方程式とモノドロミ保存変形

大阪大学理学研究科・大山陽介 (Yousuke Ohyama) <sup>1</sup>

## 1 はじめに

90年ごろに発展した topological field theory から、WDVV (Witten-Dijkgraaf-Verlinde-Verlinde) 方程式と呼ばれる3階の非線型方程式が見出された。WDVV 方程式の準斉次解 (prepotential) が、Kähler (あるいは symplectic) 多様体の上の Gromov-Witten 不変量の母関数になる。特に、Gromov-Witten 不変量は、3次元 Calabi-Yau 多様体では基本的な役割を果たし、ミラー対称性を用いて、 $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  に含まれる任意次数の有理曲線の個数がわかったことから、数学的にも大きく注目された。

Topological Landau-Ginsburg model は superpotential が孤立特異点の unfolding になっており、かなり早くから解けた。この場合、齋藤恭司氏による flat structure の理論に完全に含まれており、WDVV 方程式にあたるものは本質的に得られていたが、Dubrovin によって「flat structure」の代わりに「Frobenius structure」と言われるようになった。しかしながら、flat structure よりもより根源的な primitive form にあたることは現在も得られておらず、齋藤恭司氏の本来の理論は、「Frobenius structure」と呼ばれているものより精密なものであることを注意しておく。

Frobenius structure を座標によらない形で書き下し、公理化したものを「Frobenius 多様体」と呼ぶ。Frobenius 多様体には flat connection が定まっているが、積構造を用いることで、この connection を変形させた flat connection の 1-parameter family が存在する。また、Frobenius 多様体の上には、prepotential の準斉次性をあらわす Euler operator が存在するが、この Euler operator を用いて、自然な intersection form が存在する。もともとの flat metric と intersection form とは flat pencil をなし、ここにも、flat connection の 1-parameter family が存在する。

この二つの flat connection の 1-parameter family を、それぞれパラメタの方向に制限することで二つのモノドロミ保存変形を得る。積構造から来るものは、原点で確定、無限遠で Poincaré rank 1 の不確定特異点を持つ線型微分方程式のモノドロミ保存変形を表し、intersection form から来るものは、多数の確定特異点を持つ線型微分方程式のモノドロミ保存変形を表す。この両者は Laplace 変換で結ばれている。ここでは両者の関係を簡単な例で考察する。

<sup>1</sup>Department of Mathematics, Graduate School of Science, Osaka University, Toyonaka, Osaka 560-0043, Japan. e-mail: ohyama@math.sci.osaka-u.ac.jp

## 2 モノドロミ保存変形とフロベニウス構造

Frobenius algebra とは  $\mathbb{C}$  上の可換な algebra  $A$  と、 $A$  の対称非退化双二次形式  $\langle , \rangle$  の組であって、 $\langle ab, c \rangle = \langle a, bc \rangle$  を満たすものをいう。

Frobenius algebra  $(A, \langle , \rangle)$  のうえの grading operator  $Q$  とは  $\mathbb{C}$  線型写像  $Q: A \rightarrow A$  であって、

$$Q(ab) = Q(a)b + aQ(b), \quad \langle Q(a), b \rangle + \langle a, Q(b) \rangle = d \langle a, b \rangle$$

をみたすものをいう。ここで、 $d$  は適当な有理数。 $d$  を Frobenius algebra の degree ともいう。以下では、 $Q$  は対角化可能とする。

Frobenius 構造とは、乱暴に言うとその接束のファイバーが Frobenius algebra の構造を持っていて、連続的につながっているものである。正確な定義は [1] 参照。Frobenius 構造を持つ多様体を Frobenius 多様体という。

Frobenius 構造を決める基本的な方程式が WDVV 方程式である。函数  $F(t_1, t_2, \dots, t_n)$  に対して、

$$c_{\alpha\beta\gamma} = \frac{\partial^3}{\partial t_\alpha \partial t_\beta \partial t_\gamma} F(t_1, t_2, \dots, t_n)$$

とおく。ここで、

$$\eta_{\alpha\beta} := c_{1\alpha\beta}$$

が  $t_1, t_2, \dots, t_n$  によらず、対称な非退化 2 次形式を定め、さらに

$$c_{\alpha\beta}^\gamma = \sum_{\epsilon} c_{\alpha\beta\epsilon} \eta^{\epsilon\gamma} \quad (\eta^{\alpha\beta}) = (\eta_{\alpha\beta})^{-1}$$

が結合代数

$$e_\alpha \cdot e_\beta = \sum_{\gamma} c_{\alpha\beta}^\gamma e_\gamma$$

を定めるとき、 $F(t_1, t_2, \dots, t_n)$  は WDVV 方程式をみたすという。結合条件を具体的に書き下すと、複雑な非線型方程式になる。

この結合代数  $(e_\alpha)$  と対称な非退化 2 次形式  $\eta_{\alpha\beta}$  が Frobenius 構造を定める。grading operator に対応するものとして、Euler operator を用いる。

$$E = \sum_{\alpha} [(1 - q_\alpha)t_\alpha + r_\alpha] \frac{\partial}{\partial t_\alpha}.$$

ここで、 $q_\alpha, r_\alpha$  は有理数で、 $q_1 = 1, r_\alpha \neq 0$  となるのは、 $q_\alpha = 1$  のときに限る。この Euler operator  $E$  に対して

$$E(F(t_1, t_2, \dots, t_n)) = (3 - d)F(t_1, t_2, \dots, t_n) + (t \text{ の } 2 \text{ 次式})$$

となることを仮定する。

WDVV 方程式の解の例としては、Coxeter 群に対する flat coordinate が 1980 年ごろから齋藤恭司氏によって知られており、物理的には Landau-Ginzburg 模型と呼ばれるものである。もう一つの重要な例が、量子コホモロジー環に付随する Frobenius 構造である。

量子コホモロジー環の例として、 $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  を考えよう。

$N_k = \#\{\mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \text{ の次数 } k \text{ の有理曲線で、generic な } 3k - 1 \text{ 点を通るもの}\}$

と定めると、これは、Gromov-Witten 不変量のもっとも簡単な例になっている。そこで、 $t = (t_1, t_2, t_3)$  の函数

$$F(t) = \frac{1}{2}(t_1)^2 t_3 + \frac{1}{2} t_1 (t_2)^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{N_k}{(3k-1)!} (t_3)^{3k-1} e^{kt_2}$$

は、WDVV 方程式を満たす。

$\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  の 2 次のコホモロジー類に対応する、 $t_2$  の部分が一番重要なので、 $t_1 = 0, t_3 = 0$  に制限された Quantum cohomology を取ると

$$QH^*(\mathbb{P}^2(\mathbb{C})) \cong \mathbb{C}[e_2]/(e_2^3 = q)$$

となる。ここで、 $q = e^{t_2}$ 。  $q \rightarrow 0$  のとき、通常のコホモロジー環になる。

WDVV 方程式や Gromov-Witten 不変量について、正確な定義については、[1] [4]などを参照してほしい。

### 3 モノドロミ保存変形

WDVV 方程式は、実はモノドロミ保存変形と generic には等価になる。詳細は [1] にゆずる。

簡単のため、 $M = \mathbb{C}^n$  上に Frobenius 構造があるとする。 $(t_1, t_2, \dots, t_n) \in \mathbb{C}^n$  を affine 座標とする。 $End(TM)$  に値を取る微分形式  $\omega$  を

$$\omega(v) : TM \rightarrow TM$$

とって、 $\omega(v)(u) = u \cdot v$  で定める。右辺は  $TM$  の各ファイバーに入っている、Frobenius algebra の積である。この  $\omega$  を接続形式にもつ connection を取る：

**Proposition 1.** 任意の複素数  $z$  に対して、 $\nabla = d + z\omega : TM \rightarrow TM \otimes \Omega^1$

この接続  $\nabla$  を、 $T^*(M \times \mathbb{C})$  に、次のように拡張しよう：

$$\begin{aligned}\tilde{\nabla}_u\left(\frac{d}{dz}\right) &= 0, & \tilde{\nabla}_{\frac{d}{dz}}\left(\frac{d}{dz}\right) &= 0, \\ \tilde{\nabla}_{\frac{d}{dz}}(v) &= \partial_z(v) + E \cdot v - \frac{1}{z}Qv.\end{aligned}$$

ここで、 $Q = \nabla_\alpha E^\alpha$  (grading operator)。この拡張した接続も、また flat になる。

今まで、 $z$  をパラメタのように考えてきたが、逆に  $M$  を変形パラメタとすると、flat connection  $\tilde{\nabla}$  は、モノドロミ保存変形を与える。定義から、 $\tilde{\nabla}$  は

$$\begin{aligned}\partial_z\phi &= \left(U + \frac{V}{z}\right)\phi \\ \partial_{t_i}\phi &= (zE_i + V_i)\phi\end{aligned}\tag{3.1}$$

という、原点で確定、無限遠で1位の不確定特異点を持つ常微分方程式のモノドロミ保存変形を与える。

## 4 $QH^*(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}))$

前節の対応を  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  の量子コホモロジーの場合に、計算しよう。 $t_1 = t_3 = 0$  とすると、(3.1) は

$$\begin{aligned}\partial_2\phi &= z^3q\phi \\ (z\partial_z)^3\phi &= 27z^3q\phi\end{aligned}\tag{4.1}$$

となることはすぐにわかる。

$$\Phi(zq^{1/3}) = \phi(z, q)$$

とおくと、(4.1) は、

$$(z\partial_z)^3\Phi = 27z^3\Phi\tag{4.2}$$

とまとめられる。(4.2) の接続問題は、Meijer 関数を使って解くこともできる ([2]) が、ここでは Laplace 変換を用いてとく。

(4.2) を Laplace 変換すると、

$$\left((\lambda^3 + 27)\frac{d^2}{d\lambda^2} + 3\lambda\frac{d}{d\lambda} + \lambda\right)\varphi = 0$$

となる。この解は

$$\varphi = {}_2F_1\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}; -\frac{\lambda^3}{27}\right)$$

であるが、実は、level 3 のモジュラー群  $\Gamma(3)$  の楕円モジュラー曲面

$$x^3 + y^3 + z^3 + \lambda^3 xyz = 0$$

の Picard-Fuchs 方程式に他ならず、 $\varphi$  は、重み 2・レベル 3 のモジュラー形式で表示される。この  $\varphi$  を用いると (4.2) の解は

$$\Phi(z) = \int e^{-z\lambda} \varphi(\lambda) d\lambda$$

と積分表示される。ここで、 $\varphi(\lambda)$  の有限での特異点は 3 点あるので、各々を起点にする Laplace 変換の path をとれば、それが (4.2) の基本解系になる。

超幾何函数の接続公式を用いて  $z = \infty$  での (4.2) の Stokes 係数を計算することができる。直接計算によって、次を得る：

**Theorem 2.**  $QH^*(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}))$  の Frobenius 構造に付随する線型方程式は、level 3 のモジュラー形式の Laplace 変換で表示できる。その  $z = \infty$  での接続係数は

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

である。

[3] によって、 $QH^*(\mathbb{P}^n(\mathbb{C}))$  の場合の接続問題も解かれているが、その計算は膨大である。量子コホモロジー環とモジュラー形式との関係が他にも存在するのだろうか、今後の問題にしたい。なお、(4.2) のモノドロミー群は、 $PSL(2, \mathbb{Z}) \times \{\pm\}$  であるが、これの意味付けは今のところなされていない。

## References

- [1] B. Dubrovin, Geometry of 2D Topological Field Theories, *Springer Lect. Notes Math.* **1620**, (1995) 120–348.
- [2] B. Dubrovin, Painlevé transcendents and two-dimensional topological field theory, Proceedings of “The Painlevé property: one century later”, (1999) 287–412.
- [3] D. Guzzetti, Stokes Matrices and Monodromy of the Quantum Cohomology of Projective Spaces, math.AG/9904099
- [4] D. McDuff, D. Salamon, J-holomorphic curves and quantum cohomology, Providence, RI., American Mathematical Society, 1994.