数理解析研究所講究録 1213 巻 2001 年 34-38

理論の融合について

(On Amalgamation of Theories)

坪井 明人

2000 年 11 月 14 日

1 序章

本論文で，$\mathcal{K}$ の融合性とは $\mathcal{K}$ の二つの元の共通拡大が $\mathcal{K}$ の中にあるという性質である．あるクラス $\mathcal{K}$ が融合を許すという条件はモデル理論の中で形を変え重要な場面で出てくる．重要な役割を果たすいくつかの場面を見てみよう．

1. $\mathcal{K}$ が構造のクラスの時，$\mathcal{K}$ が融合を許すとは，次の事柄をさす：$A, B_1, B_2 \in K$ に対して，

   - A が B_1, B_2 に共通に含まれるならば，適当な A の拡大 $D \in \mathcal{K}$ で各 B_i の A 上のコピーを含むものが存在する．

   融合を許す $\mathcal{K}$ はそれらを張り合わせて “generic” な構造を作ることができるという重要な性質を持つ．

2. また単純理論において $\mathcal{K}$ がタイプの集合の時，$\mathcal{K}$ が融合を許すという性質は，Independence Theorem として知られる．これは次の事実である：$p, q \in \mathcal{K}$ に対して，

   - $p \in \mathrm{S}(Ma)$, $q \in S(Mb)$ が $\mathrm{S}(M)$ のタイプの共通の非分岐拡大で，なおかつ a と b が M 上独立ならば，$p(x) \cup q(x)$ の共通拡大で M 上の非分岐拡大になっているものが存在する．

   これは単純理論を特徴付けるひとつの性質になっている．

本論分では理論の融合について述べる．

2 基礎事項

理論とはモデルを持つ閉論理式の集合である．本論文においては，完全な理論を単に理論とよぶことにする．L-構造 M で成立する L-閉論理式全体 $T = \mathrm{Th}(M)$ はこの意味で理論になっている．

さて次の抽象的な問題を考える：

(*) 二つの理論 T_1 と T_2 がともにある性質を持つとき $T_1 \cup T_2$ の拡大となる理論でその性質を持つものはあるか?

$T_1 \cup T_2$ の拡大となる理論を融合と呼ぶことにする．T_1 と T_2 が同一の言語 L で書かれている場合は融合が存在するためには（すなわち $T_1 \cup T_2$ が矛盾しないためには）$T_1 = T_2$ でなければならない．

上の問題をもう少し正確な形で書くと次のようになる：

(**) L_1 と L_2 を二つの言語として，$L = L_1 \cap L_2$ とする．T_2 $(i = 1, 2)$ を L_i で書かれた理論とする．T_1 と T_2 がともにある理論のクラス $\mathcal{K}$ に属し，$T_1|L = T_2|L$ を満たすとき，$T_1 \cup T_2$ の融合となる理論でクラス $\mathcal{K}$ に属すものはあるか?

と書くことができる．もちろん，この問題の答えはどのようなクラス $\mathcal{K}$ を考えるかで答えが異なる．肯定的なときに $\mathcal{K}$ は融合を許すということにしよう．

1. ω-stable な理論のクラスは融合を許さない．次の T_1, T_2 が融合を許さない例となる．$T_1 = Th(\mathbb{Q}, 0, +)$ として T_2 を次の $\{U(*), V(*), R(*, *)\}$- 理論とする．

   (a) 1 項述語 U と V はユニバースを二つの無限集合に分割する；

   (b) 2 項述語 R は U と V の間の一対一対応を与える．

   それぞれが ω-stable なことは自明である．$T \supset T_1 \cup T_2$ が ω-stable とする．U と V は R によって一対一に対応しているから，Morley degree は 2 以上（有限）となる．したがって，stabilizer を使った議論により，$\mathbb{Q}$ の部分群 G で $\mathbb{Q}/G$ が有限アーベル群となるものが存在する．しかし，これは $\mathbb{Q}$ が divisible なことに矛盾する．

2. $\aleph_0$-categorical な理論のクラスは融合を許さない．$i = 1, 2$ に対して，$L_i = \{E_i(*, *)\}$ とする．

   - 理論 T_1 は次の主張：E_1 は無限個の同値類を持つ同値関係で，各同値類は丁度 2 個の元を持つ;

- 理論 T_2 は次の主張：E_2 は無限個の同値類を持つ同値関係で，丁度1個の元を持つ同値類が1つだけあり，他の同値類はすべて丁度2個の元を持つ．

このとき，T_1 と T_2 の融合 T のモデルにおいては，$\mathrm{acl}_T(\emptyset)$ が無限になってしまうので，$\aleph_0$-categorical にはならない．実際，1点だけからなる E_2-クラスを含む E_1-クラスがあり，それらの差を含む E_1-クラスもある．以下同様にして，代数閉包が無限に伸びて行く．

3. 融合において $L_1 \cap L_2 = \emptyset$ という条件を加え，さらに少なくとも一方，例えば T_1 における代数閉包 $\mathrm{acl}_{T_1}(*)$ が自明になるという仮定を付け加えれば，$\aleph_0$-categorical な理論は融合を許す（Schmerl）．

4. $L_1 \cap L_2$ が空でない場合でも，いくつの条件を加えれば，$\aleph_0$-categorical な理論は融合を許す（Pillay-Tsuboi）．

5. $L_1 \cap L_2 = \emptyset$ のとき，強極小集合（の理論）はDMPを満たせば融合を許す（Hrushovski）．この融合は Zilber 予想（強極小集合は (i) 全く構造を持たないか (ii) Module 的であるか (iii) 体のようなものであるかのいずれかという予想）の反例になっている．

6. $\exists^\infty$ を消去する単純理論のクラスは $L_1 \cap L_2 = \emptyset$ の条件と T_1 の構造が複雑でない（$SU_{T_1}(x = x) = 1, \mathrm{acl}_{T_1}(A) = A\ (\forall A)$）という条件の元に融合を許す（Tsuboi）．

3 Low theory について

以下では，T_1 と T_2 を disjoint な言語で表現された単純理論とする．前章で紹介したように単純理論は条件を付け加えると融合を許す．正確に述べると次のようになる．

Theorem 1 T_1 と T_2 がともに $\exists^\infty$ を消去して，さらに次の意味で T_2 の代数閉包 $\mathrm{acl}_{T_2}(*)$ が自明とする．

1. $SU(x = x) = 1$;

2. $\mathrm{acl}_{T_2}(A) = A$, *for any set* A.

このとき，T_1,T_2 の融合で単純になるものが存在する．

上と同じ条件でもし T_1, T_2 が超単純ならば，融合も超単純でとれる．そこで，それぞれの理論が low ならば融合も low でとれるかという疑問が自然に出てくる．

それに答えるのが次の結果である：

Theorem 2 T_1 と T_2 を定理 *1* の条件を満たす *low* な理論とする．このとき，T_1, T_2 の融合で *low* になるものが存在する．

最初に復習をしておく．

Definition 3 1. $\varphi(xa)$ k-forks over A とは，A 上の適当な無限 indiscernible sequence $I \ni a$ に対して，$\{\varphi(x,b) : b \in I\}$ が k-inconsistent.

2. T が low とは次のことを意味する：各 $\varphi(xy)$ に対して「$\varphi(xa)$ forks over A 」と「$\varphi(xa)$ k_φ-forks over A」が同値になる $k_\varphi \in \omega$ が存在する．

$D(\varphi(x), \psi(x,y))$ を $\varphi(x)$ から始まる $\psi(x,y)$ による forking 分岐樹形図の高さの sup と定義する．T が low という条件は D が有限になるという条件と同等である．

定理の証明: 定理 1 によって保証される T_1, T_2 の融合 T は，random に T_1 のモデルと T_2 のモデルを融合させたモデルの理論として作られる．特に $\varphi_i(x)$ が L_1 の nonalgebraic な formula とすれば，$\varphi_1(x) \wedge \varphi_2(x)$ は解を持つように作られた model complete な単純理論である．したがって，$L(T) = L_1 \cup L_2$ の論理式 $\psi(x,y)$ は

$$\exists z \, [\varphi_1(x,y,z) \wedge \varphi_2(x,y,z)]$$

の形をしていると仮定できる．ただし，φ_i は L_i-論理式である．T の論理式 $\psi(x,y)$ が low を壊す原因になっているとする．$\psi(x,y)$ は上の形をしていると仮定できる．このとき，十分大きな $n \in \omega$ に対しも，高さが n 以上の $\psi(x,y)$ による分岐の樹形図が存在する．すなわち a_i $(i \le n)$ で

- $\psi(x, a_i)$ forks over $A_i = \{a_j : j < i\}$;
- $\Psi(x) = \{\psi(x, a_i) : i \le n\}$ は consistent

を満たすものがある．d を $\Psi(x)$ の解とする．b_i $(i \le n)$ を $\varphi_1(d, a_i, b_i) \wedge \varphi_2(d, a_i, b_i)$ が成り立つ元とする．T_1 と T_2 のそれぞれは low であるから，$k_m = k_{\varphi_m} \in \omega$ $(m = 1, 2)$ とすれば，$\varphi_m(x, a_i)$ forks over $A_i = \{a_j : j < i\}$ が成立する i は高々k_m 個しかない．n が十分大きいことから，$i^* \le n$ を選んで $m = 1, 2$ の両方に対して，$\varphi_m(x, a_{i^*}, b_{i^*})$ が $A = A_{i^*}$ 上 fork しないようにできる．$I = (a^j b^j)_{j \in \omega}$ $(a^0 b^0 = a_{i^*} b_{i^*})$ を A 上の Morley sequence とする．$m = 1, 2$ に対して，

$$\Phi_m(x) = \{\varphi_m(x, a_i^j, b_i^j) : j \in \omega\}$$

は consistent となる．さらにこのタイプ $\Phi_m(x)$ は A 上 non-algebraic になっている．したがって，T の作り方から，

$$\Phi_1(x) \cup \Phi_2(x)$$

が consistent になる．すなわち，$\{\varphi_1(x, a_i, b_i) \wedge \varphi_2(x, a^i, b^i) : i \in \omega\}$ が consistent になる．よって，$\{\psi(x, a^i) : i \in \omega\}$ が consistent になる．$J = (a^i)_{i \in \omega}$ は A 上の Morley sequence であるから，このことは $\psi(x, a_{i^*})$ が A 上 fork しないことを意味する．矛盾．
∎

参考文献

[1] S. Buechler, Lascar strong types in some simple theories, preprint.

[2] B. Kim, Forking in simple unstable theories, The Journal of the London Mathematical Society, vol. 57 (1998), pp.257-267.

[3] U. Hrushovski, Strongly minimal expansions of algebraically closed fields, Israel Journal of Mathematics, vol. 79 (1992), pp.129-151.

[4] A. Pillay and A. Tsuboi, The Journal of Symbolic Logic, vol. 62 no. 4 (1997), 1070-1074, joint work with Anand Pillay.

[5] J. H. Schmerl, Decidability and $\aleph_0$-categoricity of theories of partially ordered sets, Math. Log. Quart. 45 (1980), pp. 585-611.

[6] A. Tsuboi, Random Amalgamation of Simple Theories, Math. Log. Quart. 47 (2001) 1, 45-50