

3-transposition groups

Masaaki Kitazume (Chiba University)

北詰 正顕 (千葉大・理)

1 はじめに

散在型単純群の中で、代表的なものとして語られるのは、Mathieu 群, Conway 群, Monster の系列であろう。「系列」と書いたけれども, Golay code, Leech lattice, Moonshine VOA と続く 24 という数字に彩られた数学的対象は, まさに奇跡的である。一方, 同じ 24 という数字を冠する Fischer 群 F_{24} は, この系列に入れるには, 手がかりが少なすぎる。歴史的には, Fischer が Monster に (baby Monster を経由して) たどり着く出発点であったにも関わらず。

本稿では, F_{24} を頂点とする, 3-transposition groups について, 概略をまとめたと思う。対称群の一般化とも言える単純な定義ながら, 深いものを含んでいる対象である。最近になって ([M]) 頂点作用素代数の宮本自己同型の (2 つある内の) type II と呼ばれるものが必ず 3-transposition group になる, という結果によって思わぬところに再登場したのは記憶に新しい。21 世紀に向けてとは大げさだが, まだまだ研究すべきことは多いと思われる。本稿がこれからの研究の助け・きっかけになれば幸いである。

なお, 12 月の集会では私の話の組立が悪く, いくつかの話を省略した。本稿では, その部分も加えたが, 特に, 3-transposition groups の構成については, 3 月の九大における「代数的組合せ論ミニ集会」で話したことが, この原稿作成の大きな助けになった。ここに記して, 感謝いたします。

2 定義, 分類定理と実例

2.1 定義と分類定理

定義 2.1. 群 G が 3-transposition group であるとは,

- (1) G は位数 2 の元の共役類の和集合 D で生成される。(i.e. $G = \langle D \rangle, D^G = D$)
- (2) D の相異なる 2 つの元の積の位数は 2 または 3。(i.e. $a(\neq)b \in D \implies |ab| = 2$)

が成り立つことである。

最も典型的な例は、 n 次対称群 S_n と、その互換全体の集合を D としたものである。定義の条件 (1) で「和集合」としたのは、 S_n の部分群 $S_k \times S_{n-k}$ なども仲間に入れるためである。定義から、 D の部分集合で生成される部分群 K は、 $K \cap D$ で生成される 3-transposition group になる。このような部分群を D -subgroup と呼ぶ。なお、ここでは、群 G に有限性を仮定しなかった。

ここで、後に用いる記号と用語を導入しておく。 $G = \langle D \rangle$ を 3-transposition group とするとき、 $d \in D$ に対して

$$D_d = \{a \in D \mid |ad| = 2\}, \quad A_d = \{a \in D \mid |ad| = 3\}$$

とおく。明らかに、 $D = \{d\} \cup D_d \cup A_d$ となる。次に、 S を任意の Sylow 2-subgroup とするとき、 $|S \cap E|$ を G の width と呼ぶ。この値は、 D に含まれる互いに可換な元の個数の最大値を意味する。

さて、Fischer は 3-transposition group をある条件の下に分類した。実例の紹介も兼ねて、その定理を述べておこう。

定理 2.2 (B. Fischer [F1]). G を有限群で、3-transpositions の共役類 D で生成されているとする。さらに、次を仮定する (その意味については後述)。

$$O_2(G) \subset Z(G) \supset O_3(G).$$

このとき、 (G, D) は、中心を除いて (つまり、 $(G/Z(G), DZ(G)/Z(G))$ をあらためて (G, D) とおけば) 次のいずれかに同型である。(ただし $\varepsilon = \pm 1$ とする。)

- (1) $G \cong S_n, D = \{\text{transpositions}\},$
- (2) $G \cong S_{2n}(2), D = \{\text{transvections}\},$
- (3) $G \cong O_{2n}^\varepsilon(2) : 2, D = \{\text{transvections which preserve a (fixed) quadratic form}\},$
- (4) $G \cong O_{2n}^\varepsilon(3) : 2, D = \{\text{reflections w.r.t the norm 1 vectors}\}$
- (5) $G \cong O_{2n+1}(3) : 2 \text{ or } O_{2n+1}(3), D = \{\text{reflections w.r.t the norm } \varepsilon \text{ vectors}\}$
- (6) $G \cong U_n(2), D = \{\text{transvections}\}$
- (7) $G \cong F_{22}, F_{23}, F_{24}, D: \text{a unique class}$
- (8) $G \cong O_8^+(2).S_3, O_8^+(3).S_3, D: \text{a unique class}$

ただし n は、(1) $n \geq 5$, (2) $n \geq 2$, (3),(4) $\varepsilon = +$ のとき $n \geq 3$, $\varepsilon = -$ のとき $n \geq 2$, (5) $n \geq 2$, (6) $n \geq 4$ をみたすものとする。

記号は、ATLAS に従って、単純群が表に出るように記述した。:2 が付いているのは、単純群が index 2 で含まれていることを意味している。 S_n と F_{24} は単純群を意味しない。これらを $A_n : 2, F_{24}' : 2$ と表すことも、もちろん出来る。

ここに現れた直交群やユニタリ群については、他の本 [N], [A2] を参照されたい。(5) では "or" などと曖昧な書き方をしてしまったが、これは n と ε で決まるとい

うより、内積の取り方に依る。ベクトル空間の内積を、正規（長さ1）直交基底を取るように定めれば、 $\varepsilon = 1$ のとき $:2$ の付かない単純群が出てくる。 $\varepsilon = -1$ なら、 $:2$ の付く方になる。

なお、(7) は Fischer 群と呼ばれる系列で、 F_{22}, F_{23}, F'_{24} が散在型単純群である。最後の (8) の2つは、分類における例外的なもので、群としては前者が $\text{Aut}(O_8^+(2))$ で、後者は $\text{Aut}(O_8^+(3))$ のある部分群である。この2つは、 $G' = G''$ という仮定を付ければ除くことも出来る。

この分類定理を完成させた Fischer の原論文 [F1] は、一部分 [F2] を除いて出版されなかった。理由は推測しか出来ないが、後述の Uniqueness theorem と F_{24} の構成の不完全さによるのだろう。近年になり、これを補完する意味合いも込めて、Cuypers-Hall [CH2] は、有限性（さらには上記の仮定）を仮定しない分類定理を完成させた。少しさかのぼるならば、先鞭を付けた形の R. Weiss の仕事 [W1] がある。

2.2 3-transposition groups の実例

群の例示としては、あまりに沢山が出てきてしまったので、もう少し身近なものに絞った例を述べよう。対称群を含むワイル群と線形群の間に次のような同型が成り立つ。ただし、簡単のため $W^*(E_k) := W(E_k)/\{\pm 1\}$ ($k = 7, 8$) という記号を用いる。

例 2.3 (Weyl 群).

$$U_4(2) \cong O_5(3) < O_5(3) : 2 \cong O_6^-(2) : 2 \cong W(E_6)$$

$$S_6(2) \cong W^*(E_7), \quad O_8^+(2) \cong W^*(E_8)$$

$$O_6^+(2) : 2 \cong S_8, \quad O_4^-(3) : 2 \cong S_4(2) \cong S_6, \quad O_4^-(2) : 2 \cong S_5$$

この例は仲々に味わい深い。第1行の、基礎体 $\mathbb{F}_4, \mathbb{F}_3, \mathbb{F}_2$ の入り交じった関係は、それだけで異様である。後に、

$$O_{2n}^\pm(2) > S_{2(n-1)}(2) > O_{2(n-1)}^\mp(2)$$

という列について述べるが、上記の例によれば、 $\varepsilon = +$ の場合、 $n = 4$ のときが $W^*(E_8) > W^*(E_7) > W^*(E_6)$ という例外型 Weyl 群の系列に相当しており、 $n = 3$ のときは、何故か7が抜けた対称群の列 $S_8 > S_6 > S_5$ に相当することが読みとれる。 E 型の系列はただ添え字が1増えるという以上の変化をしているのである。

分類定理に現れない群にも重要なものがある。 $O_2(G) \neq 1$ をみたす群の典型例は S_4 で、より一般に Weyl 群 $W(D_n)$ が該当する。 $O_3(G) \neq 1$ をみたす群の典型例は S_3 で、一般に、3元体上の直交群（分類定理の(4),(5)）の長さ0のベクトルの固定部分群として得られる parabolic subgroup が該当する。 F_{24} の部分群に

$3^7 \cdot O_7(3)$ というのがあるが、直交群の場合と異なり "non-split" という著しい特徴がある。Monster には $3^8 \cdot O_8^-(3) : 2$ という non-split な部分群があるが、こちらは 3-transposition group ではない。しかし、同じ様な構造の $3^8 \cdot O_8^-(3) : 2$ という 3-transposition group は存在する ([CH2])。

S_3, S_4 に匹敵する小さな群の中にも、とても重要な群がある。3つの互いに非可換 (積の位数は3) である 3-transposition で生成される群は4通り (本質的には3通り) であることが知られている。おなじみの $S_3 ((1\ 2), (1\ 3), (2\ 3)), S_4 ((1\ 2), (1\ 3), (1\ 4))$, に加えて、次の生成元と関係式で定義される群

$$H := \langle a, b, c \mid a^2 = b^2 = c^2 = (ab)^3 = (bc)^3 = (ca)^3 = (abac)^3 = 1 \rangle$$

と、その中心 $\langle (abc)^2 \rangle$ による剰余群 $H/Z(H)$ である。ただし、実例 (分類定理に出てくる群の D -subgroup) としては $H/Z(H)$ は存在しないようである。従って、以下では $H/Z(H)$ という群の存在の可能性はないものとして記述することにする。なお、記号 H は [F1] による。[CH2] では、 $SU_3(2)'$ と書かれている。また、上記の関係式の最後を $(abac) = 1$ にすれば S_3 , $(abac)^2 = 1$ にすれば S_4 の定義式になる。

この H の 3-transposition の共役類は9個からなり、全て互いに非可換である。群構造としては位数 3^3 の extra-spatial group を index 2 で含む形をしている。一般に、位数が 2×3^N という形の 3-transposition group は、 D の全ての元が互いに非可換になる。このような群を、[CH2] では "Moufang type" と呼んでおり、彼らの結果では、Moufang type を除く全ての (無限群も含めた) 3-transposition group が分類されている。また、分類定理は、この H (または $H/Z(H)$) を含まない場合 ((1)-(3)) と含む場合 ((4)-(8)) とに分けて進められるのである。

この Moufang type の群も H を筆頭に、興味深いものがあり、名前にあるように Moufang loop との関連から、研究の歴史は古い。筆者は [K2] で、先に述べた $3^7 \cdot O_7(3)$ (non-split) の具体的な構成を与えたが、そこでもある種の Moufang loop と、対応する Moufang type の群が活躍した。そういう意味で、次の問題も Moufang loop との関わりから面白いかもしれないと思う。

問題 1. 3-transposition group $3^8 \cdot O_8^-(3) : 2$ (non-split) のわかりやすい構成を与えよ。

2.3 頂点作用素代数の問題から

以下、頂点作用素代数に関わる問題をいくつか述べる。宮本雅彦氏 ([M]) による、頂点作用素代数の宮本自己同型 (その内の type II と呼ばれるもの) に関わる問題である。用語の説明を一切省いているので、興味のない方は読み飛ばしても差し支えない。

問題 2. type II の宮本自己同型で生成される群は H を含むか? (今のところ、存在は知られていない。)

問題 3. Code VOA の type II の宮本自己同型で生成される部分群 $G = \langle D \rangle$ が次のような構造

$$G/O_2(G) \cong H \text{ かつ } d \in D \text{ に対し } |d^{O_2(G)}| = 8$$

を持つものは存在するか？ (初めの条件を $G/O_2(G) \cong S_3$ に替えれば, Hamming code VOA が該当する。)

問題 4. [KM] で分類した Code VOA の自己同型群のうち, $O_2(G) \neq 1$ であるものの構造を, Cuypers-Hall の結果を用いて, 完全に決定せよ。

3 一般論

3.1 分類への諸定理

ここでは, 分類定理に至る一般論について概略を述べる。その一部は, 原論文の出版された部分 [F2] にあるほか, [A2] に詳しい記述がある。ここで述べる形は, Cuypers-Hall [CH1] による。

以下, $G = \langle D \rangle$ は, 3-transposition の共役類 D で生成されていると仮定する。

定理 3.1 (Normal subgroup theorem). $Z(G) = 1$ を仮定すると, 次のいずれかが成り立つ。

- (1) $V := \langle ab \mid A_a = A_b \rangle \neq 1 (< O_2(G))$,
- (2) $W := \langle ab \mid D_a = D_b \rangle \neq 1 (< O_3(G))$,
- (3) $\langle ab \mid |ab| = 2 \rangle$ は単純群である。

前節の分類定理における仮定は, ここで (1), (2) が起こらないということの意味している。これだけで, 群がおおむね単純群であることが導かれてしまうのである。3-transposition group を考えるときには, G の D に対する, 共役による置換表現を考えることをよくする。(1) または (2) が成立しているときには, この置換表現が

$$\{b \mid A_a = A_b\}, \{b \mid D_a = D_b\}$$

という集合が $a \in D$ を含む非原始域になる。分類定理の仮定は, さらに (8) を除外する仮定 ($G' = G''$) を付けると, 置換表現が原始的であることを意味している, というのが次の定理である。

定理 3.2 (Transitivity theorem). $Z(G) = V = W = 1$ と $G' = G''$ を仮定する。このとき, $d \in D$ の中心化群 $C_G(d)$ は, D_d と A_d のそれぞれに可移に作用する。特に D への置換表現は rank 3 である。

この辺りのことに Aschbacher が早くから注目していたことは、興味深い。[A1] がそれである。その後、odd transpositions に関する仕事も残しているが、ここでは触れない。

次に続くのは、分類の根幹を作る定理である。この定理の証明が、原論文には全く書かれていないのが、出版に至らなかった理由の一つであろう。証明は後に、Weiss により [W2] として発表されている。

定理 3.3 (Uniqueness theorem). $Z(G) = V = W = 1$ と $G' = G''$ を仮定する。このとき、 $G = \langle D \rangle$ は、 $D_d, D_d \cap D_x$ ($d \in D, x \in A_d$) の構造から一意に定まる。

多くの場合 D_d は、中心化群 $C_G(d)$ を生成するので、この定理は中心化群からの特徴付けと近いものがある。先に挙げた例 2.3 で並べたのは、実はこの

$$G = \langle D \rangle > \langle D_d \rangle > \langle D_d \cap D_x \rangle$$

という系列なのであった。つまり、 $W^*(E_8)$ は $W^*(E_7)$ と $W(E_6)$ から特徴づけられる。一般に、 $O_{2n}^\pm(2)$ が $S_{2(n-1)}(2)$ と $O_{2(n-1)}^\mp(2)$ から特徴づけられる。ここで ε によらず D_d に対応する群 $S_{2(n-1)}(2)$ は同じものであることに注意されたい。

さて、この定理は実は「特徴付け」を超えて、「構成」へとつながるものなのである。すなわち、多くの場合

$$G = \langle D \rangle \text{ は、 } D_d \text{ と } D_d \cap D_x \text{ から構成される (べき)}$$

なのである。分類は（有限単純群分類がそうであったように）Uniqueness theorem を用いて、下から順に特徴付けて行く。最後の段階で、散在型単純群を得るところで「構成」が本質的に必要になるのである。先に、[F1] ではこの定理の証明が不完全だったと書いたが、ひとつひとつ個別に処理すれば良いとも言えるので、そのつもりだったのかもしれない。

例 3.4. 散在型の場合のデータを一覧表にしておこう。

$G = \langle D \rangle$	D_a	$D_a \cap D_b$	$D_a \cap D_b \cap D_c$
F_{24}	F_{23}	$O_8^+(3) : S_3$	$O_8^+(2) : S_3$
F_{23}	F_{22}	$O_7(3)$	$S_6(2)$
F_{22}	$U_6(2)$	$O_6^-(3) : 2$	$W(D_6)$

3.2 rank 3 のグラフ

例えば Higman-Sims の群がそうであるように、rank 3 の置換群はグラフの自己同型群として構成されることが多い。Transitivity theorem により、問題の 3-transposition group は rank 3 の置換群なので、まさにそのように構成される。

定義 3.5. 3-transposition group $G = \langle D \rangle$ に対応するグラフ Γ_G (または Γ_D) を次のように定義する。

頂点集合は D で、相異なる 2 点 $a, b \in D$ を可換 (i.e. $|ab| = 2$) であるときに結ぶ。

中心を無視して、 G の代わりに $G/Z(G)$ を考えることにしてもグラフは変わらない。しかし、グラフの同型類と群の同型類は (一般には) 一対一対応にならない。例えば、 $3^7.O_7(3)$ という群は、split する場合でもしない場合でもグラフは同じものになる。しかし、分類定理 2.2 の仮定をみたます場合には、一対一になってグラフから群を復元することが出来る。これは、次のようなステップ (概略だけを述べる) による。

(1) グラフ Γ の任意の 2 点 $a, b (b \notin \{a\} \cup \Gamma_a)$ に対し、

$$\Gamma_a \cap \Gamma_b = \Gamma_a \cap \Gamma_c = \Gamma_b \cap \Gamma_c$$

をみたます c がただ一つ存在することを示す。(これは、群における a^b に相当する。) ただし、 Γ_a はグラフにおける a の近傍 (結ばれる点全体) を表す。

(2) グラフの任意の点 a に対し、点の置換 σ_a を

$\{a\} \cup \Gamma_a$ 上では恒等写像、 $b \notin \{a\} \cup \Gamma_a$ に対しては (1) で示される c を対応させる

と定義する。

(3) 集合 $\Delta = \{ \sigma_a \mid a \in \Gamma \}$ がグラフの自己同型群に含まれ、 $\langle \Delta \rangle$ において Δ が 3-transposition の共役類になっていることを示す。

(4) $G/Z(G) \cong \langle \Delta \rangle$ である。

3.3 $C_G(a)$ の置換表現

次に進む前に、3-transposition の特質から説明することが出来る、もう一つの置換表現について述べる。

前述の「非可換な 3 元 a, b, c の生成する部分群」を考える。そのときに注意したように $H/Z(H)$ は事実上出てこないと思うことにすると、群構造は 3 種類ということになる。これらを共役で移すことを考える。まず D を共役類と仮定して、 a は固定されると考えて良い。次に、 $b \in A_a$ は Transitivity theorem によりひとつに固定して良い。このとき $b^a (= a^b)$ も固定されるので、実際には、ここでは $C_G(a)$ の $\{b, b^a\}$ というペア全体への置換表現を考えていると思うべきである。問題の a, b, c の生成する群は 3 通りなのだが、 S_3 を作る場合は $c = b^a$ なので、これはもう固定されている。だから、残りの c の取り方は (群構造でいうなら) 2 通りである。実は、ここで「同型なものは共役で移る」という事実が成り立つ場合が多いのである。

すなわち、 $C_G(a)$ の $\{ \{b, b^a\} \mid b \in A_a \}$ への置換表現が (多くの場合) rank 3 になるのである。さらに、それ以上のことが成り立つこともある。分類定理の (1)-(3) は、部分群 H を含まないのであった。このことは、今の置換表現が 2 重可移になっていることを示している。

$C_G(a)$ 自体が分類定理の仮定をみたす場合が面白いわけである。 $G \cong S_{2n}(2), U_n(2)$ の場合は、その仮定をみたさない。

$G \cong S_n$ の場合は、単に $C_G(a) \cong S_{n-2}$ の $(n-2)$ 重可移表現が現れるだけである。 $G \cong O_{2n}^\pm(2) : 2$ のときは、 $C_G(a) \cong S_{2(n-1)}(2)$ の 2 重可移表現が現れる。これは、指定された symplectic form に対する 2 次形式全体への置換表現である。

G が 3 元体上の直交群の時は、 $C_G(a)$ も同様に直交群になる。この場合は H を含むので rank 3 になるが、それは、singular vector に対する置換表現である。さらに、 $G \cong F_{22}, F_{23}, F_{24}$ のときは、それぞれ $C_G(a) \cong U_6(2), F_{22}, F_{23}$ の rank 3 置換表現が現れる。残念ながら $C_G(a) \cong F_{24}$ となる G はないので、 F_{24} はこの種の置換表現を持たない。

例 3.6. 一つだけ例を挙げる。 $G \cong W^*(E_8)$ とすれば、ここに現れるのは、 $C_G(a) \cong W(E_7)$ の 28 次の 2 重可移表現である。 $W(E_7)$ が S_8 と同型な D -subgroup を含むことは容易にわかる。8 文字の互換全体を考えて、この S_8 を自然に働かせる。次に、8 文字を 4 つずつに分ける任意の分け方を考えるとき、例えば $\{1, 2, 3, 4\}$ と $\{5, 6, 7, 8\}$ に分けたなら、

$$(1\ 2) \leftrightarrow (3\ 4), (1\ 3) \leftrightarrow (2\ 4), (1\ 4) \leftrightarrow (2\ 3), (5\ 6) \leftrightarrow (7\ 8), (5\ 7) \leftrightarrow (6\ 8), (5\ 8) \leftrightarrow (6\ 7)$$

という置換を考える。これらが生成する置換群が、 $W^*(E_7)$ と同型になるのである。

4 3-transposition groups の構成

ここでは、2 種類の「構成」について述べる。一つは確実な定義として述べられる構成法であるが、もうひとつはそうではない。

4.1 Width extension

一つ目の構成法は、前節の置換表現と関係している。これは $C_G(a)$ 、正確には $\langle D_a \rangle$ を構成する方法なのである。Width という言葉は、2.1 節で導入したものである。

まず、 $a, b, c \in D$ を

$$|ab| = |bc| = 3, |ac| = 2$$

ととる。互換で言うなら S_4 を生成する $(1\ 2), (2\ 3), (3\ 4)$ を取ったと思えばよい。このとき、

$$K = \langle D_a \rangle, L = \langle D_a \cap D_b \rangle, M = \langle D_a \cap D_b \cap D_c \rangle$$

とおく。 K を L, M から構成する方法である。もちろん、 G や K のことを知らなくてもできる構成法なので、これらと独立に、 3-transposition group $L = \langle E \rangle$ と、その部分群 M が与えられたとして K を構成するのである。

この方法を定義するためには、まず、次のような形の「補題」が必要である。

「補題」 任意の $x, y \in L$ に対し、 $M^x \cap M^y$ は $X_0 (\cong L), X_1, \dots, X_r$ のいずれかと同型である。

定義 4.1 (Width extension). L, M から定まるグラフ $\Gamma_{L, M}$ を次のように定義する。まず、点集合は $E \cup \{M^x \mid x \in L\}$ を考える。辺で結ばれる条件は、

E の 2 元 a, b は (以前と同じく) 可換なときに結ぶ。

$a \in E$ と M^x は $a \in M^x$ のとき結ぶ。

M^x, M^y は、共通部分 $M^x \cap M^y$ があらかじめ指定された (例えば) X_1 と同型なときに結ぶ。

と定義する。ここから 3.2 節で述べた方法で K が復元されるのである。

多くの重要な例では、 X_1 は L と width が一致する (唯一の) ものが指定される。これが width extension という名前の由来である。

例 4.2. $G \cong W^*(E_8)$ の場合、 $K \cong W(E_7), L \cong W(E_6), M \cong W(D_5)$ となる。上記の「補題」は、

$$M^x \cap M^y \cong W(D_5), W(D_4) \text{ or } S_5$$

となる。 X_1 として指定するのは $W(D_4)$ である。

演習 4.3. 上記の例で実際にグラフを作り、 $W(E_7)$ が復元されることを確かめよ。

4.2 Central extension

記号は、引き続き前節のものを用いる。今度は、問題の $G = \langle D \rangle$ を $K = \langle D_a \rangle, L = \langle D_a \cap D_b \rangle$ から構成する (方法というより) 原理のようなものである。

まず、 3-transposition group $K = \langle F \rangle$ と部分群 L が与えられたとして、前節と同様の「補題」を用意する。 $x, y \in K$ に対する $L^x \cap L^y$ を分類するわけである。 K, L から定まるグラフ $\Gamma_{K, L}$ は、次のような定義になる。まず、点集合は $F \cup \{(L^x)_1, (L^x)_2 \mid x \in K\}$ とする。記号の意味は、 L^x に対応する点が 2 つあるという設定を考えるので、添え字で区別したのである。次に、辺で結ばれる条件は、

F の 2 元 a, b は可換なときに結び、 $a \in F$ と $(L^x)_i$ は $a \in L^x$ のとき結ぶ。

ここまでは、前と同様である。最後の $(L^x)_i, (L^y)_j$ は、 $L^x \cap L^y$ で場合分けされるのであるが、 $(L^x)_1, (L^x)_2$ の区別は一般論ではできない。ここは個別に処理せざるを得ず、非常に大変なのである。

例 4.4. $G \cong W^*(E_8)$ とする。 $K \cong W(E_7), L \cong W(E_6)$ である。この場合は、 K/L の 2 重可移表現がうまく記述できるので話は簡単である。例 3.6 によれば、この 2 8 次の置換表現の点集合は、8 文字の置換全体と同一視できた¹。だから、 L^x たちも同じ同一視ができる。(厳密には $N_K(L) = L$ という事実が必要。) そこで、 $\Gamma_{K,L}$ の点集合を

$$F \cup \{ (ij)_1, (ij)_2 \mid 1 \leq i < j \leq 8 \}$$

と書くことができ、問題の部分の辺の記述を

$(ij)_1$ は、共通の文字のない $(kl)_1$, および、1 文字共通の $(ik)_2$ と結ぶ。

と定義すればよい。

演習 4.5. 上記の例で実際にグラフを作り、 $W(E_8)$ が復元されることを確かめよ。

5 F_{22}, F_{23}, F_{24} の構成

最後の節として、散在型の場合の構成について述べる。例 3.4 をご覧いただきたい。この表の下から積み上げて行くわけである。概略だけ言うなら、まず F_{23} を Width extension で構成して、出来上がったものを Central extension として見直しておく。(このとき、 F_{22} を同様に作ったときの情報が必要になる。) F_{24} は central extension で作るしかないのだが、まずは F_{23} に相当する部分を(先に見ておいた) Central extension で作っておき、それを全体に延長するのである。

5.1 Width extension

$U_6(2), F_{22}, F_{23}$ は、Width extension で作ることができる。しかし、 F_{23} 辺りになると十分難しい。[F1] では、そのための準備の所に明確な誤り²がある。そのために、次の重要な補題が抜け落ちてしまっている。このような補題が独力で証明できれば、[F1] は十分読めると思う。

補題 5.1. $L = \langle F \rangle \cong O_8^+(3) : 2, L > M \cong O_8^+(2) : 2$ とするとき、任意の $x, y \in L$ に対し $M^x \cap M^y \cap F$ は、 $O_8^+(2) : 2, S_9, W(D_4) \times W(D_4), S_3 \times S_3 \times S_3 \times S_3$ のいずれかを生成するか、または空集合である。

¹このことが、例 4.2 の構成から読みとれば良いと思い試みてみたのだが、すぐにはうまく行かなかった。

²例えば、(15.3.10), (15.3.20), (16.1.21), (16.1.22) の主張は成立しない。

Width extension は数学的に紛れの余地もないし、問題点が残っているわけでもない。しかし、よりエレガントな記述があるなら、その後続く Central extension の扱いが容易になる可能性もある。

問題 5. F_{22} や F_{23} の Width extension の良い記述を考えよ。

正面から取り組む問題とは思わない。Fischer の議論を追随するだけなら、「問題」でなく「演習」であろう。何かの別の方向からこれらの群の情報を得ることがあつたら、そこで得た知識が Width extension の記述に使えないか、と考えていただければ良いと思う。

5.2 Central extension

この section の最初に書いたように、 F_{24} 以外は Central extension で構成されるのでは無い。(例えば) F_{23} は Central extension としての構造を持っていて、 $(L^x)_i, (L^y)_j$ の辺が定まっているという事を前提として、次の F_{24} に進むのである。

問題 6. Fischer 群 (特に F_{24}) の Central extension の良い記述を考えよ。

F_{24} の場合なら、Fischer の議論を完全に正当化するだけでも、十分価値があると思う (論文として出版に値するかどうかはわからないが)。 F_{22}, F_{23} でも ($U_6(2)$ でも) 良い記述 (例えば $W(E_8)$ の例のような簡単な記述) があれば、非常に価値は高いと思う。

なお、Central extension の考え方 (そこで必要な情報) は、より大きな群の部分群としての構成において有用である。例えば、 ${}^2E_6(2)$ の部分群として F_{22} を構成する話が [C] の最後の数ページで実行されている。

最後に [F1] に書かれなかった補題をもう一つ掲げておく。 F_{24} の構成で使うはずのものである。

補題 5.2. $K = \langle E \rangle \cong F_{23}$, $K > L \cong O_8^+(3) : S_3$, $L > M \cong O_8^+(2) : S_3$ とする。 $x, y, z \in K$ が

$$\langle L^x \cap L^y \rangle \cong \langle L^x \cap L^z \rangle \cong \langle L^y \cap L^z \rangle \cong \langle L^z \cap L \rangle \cong M$$

をみたすとき、

$$L^x \cap L^y \cap L^z \cap L \cap E \neq \emptyset$$

である。

この補題は、 $K = F_{23}$ の性質を述べているようだが、この主張を $L^x \cap L^y \cap L^z$ と $L^y \cap L^z \cap L$ との共通部分を調べるものと考えれば、 $L^y \cap L^z$ の中で考えることができる。つまりは $M \cong O_8^+(2) : S_3$ の話である。では、この3つの共通部分 ($L^x \cap L^y \cap L^z$ など) をどう処理するかと言えば、 L^z の中で $L^x \cap L^z$ と $L^y \cap L^z$ の共通部分として調べるのである。これは、補題 5.1 の応用として処理できるのである。

6 3. F_{24}

本稿の締めくくりとして（講演でもそうだったように）3-transposition group ではない $3.F_{24}$ （位数 3 の巡回群との拡大）について触れる。

6.1 Conway-Norton 代数

この群は、 783×2 次元の可換代数 (Conway-Norton 代数) の全自己同型群であることがわかっているが、このことを示した [K1] の議論は F_{24} の存在を仮定しているので、構成問題に答えたことにはならない。かつて $F_{24} > 2^{12}.M_{24}$ という包含関係からの構成を試みたが、ある理由で頓挫している。

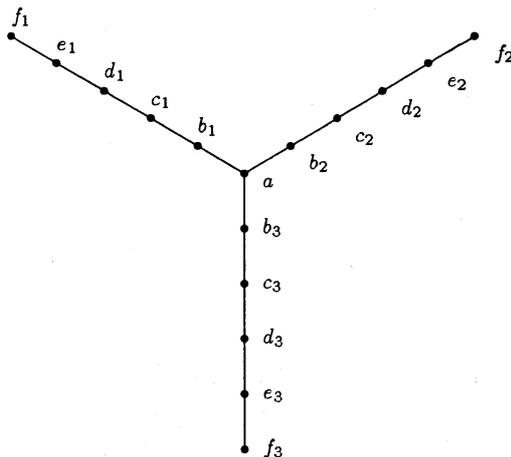
問題 7. 783×2 次元の Conway-Norton 代数を F_{24} の存在と独立に構成し、その自己同型群を計算せよ。

可換代数は、頂点作用素代数と深く関連する可能性がある。モンスターに対するムーンシャイン頂点作用素代数と関連するのが、Griess 代数であるから、その部分代数として考察することが可能なのかもしれない。

6.2 Y-presentation

もう一つの手がかりは、生成元と関係式による記述 Y-presentation である。

次の図形を Y_{555} と呼ぶ。添え字は、中心の点を除いた 3 本の枝にある点の個数を表している。（ただし、中心の点も入れて数えた方が良いこと³があるため、最近では M_{666} という呼び方もされる。）



これを Coxeter diagram と見て、点は $x^2 = 1$ をみたす生成元を表し、2点 x, y の間に edge があれば $(xy)^3 = 1$ 、なければ $(xy)^2 = 1$ という関係式を表すものと

³例えば、拡大 E_8 -diagram は $Y_{521} = M_{632}$ であるが、後者の添え字の方が意味 $(\frac{1}{6} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = 1)$

する。 Y_{555} からいくつかの点を除いた場合も考える。 Y_{553} (resp. Y_{533}, Y_{552}) とは, $\{e_3, f_3\}$ (resp. $\{e_2, f_2, e_3, f_3\}, \{d_3, e_3, f_3\}$) を除いたものである。この図形で表される関係式に, もう一つ

$$(\#) \quad (ab_1c_1ab_2c_2ab_3c_3)^{10} = 1$$

を付け加えることで, モンスターを含む有限群が定義されるというのが, 有名な Y -presentation である。

$$\mathbb{M} \wr 2 \cong \langle Y_{555}, (\#) \rangle, \quad 2 \times \mathbb{M} \cong \langle Y_{553}, (\#) \rangle$$

$$2^2.B \cong \langle Y_{533}, (\#) \rangle, \quad 3.F_{24} \cong \langle Y_{552}, (\#) \rangle$$

Fischer 群については, [CP] で詳しく調べられており, 証明が与えられている。この生成元, あるいは関係式の数学的な意味を知りたいと思う。21 世紀において, 次の問題の解決を期待したい。

問題 8. Y_{552} の生成元が自然に現れるような $3.F_{24}$ の構成を与えよ。そして, 関係式 $(\#)$ の意味を調べよ。

他の Fischer 群 F_{23}, F_{22} も Y_{432}, Y_{332} から

$$2 \times F_{23} \cong \langle Y_{432}, (\#) \rangle, \quad 2^2.F_{22} \cong \langle Y_{332}, (\#) \rangle$$

として, それぞれ得られる。また, 5 節で何度も出てきた $O_8^+(3) : 2$ も Y_{422} から得られる。この 3 つは, 全て 3-transposition group そのものが出てくる。これらの群の中で, 生成元と関係式の意味を探るのも面白いかもしれない。いずれにせよ, 3-transposition groups の視点で重要な群は, ことごとく Y_{555} の subdiagram から出てくるのである。そして, その延長線に Monster も Baby Monster もある。何か良い説明はないのだろうか。

参考文献

- [A1] M. ASCHBACHER, A homomorphism theorem for finite graphs, *Proc. Amer. Math. Soc.* **54** (1976), 468–470.
- [A2] M. ASCHBACHER, “3-transposition groups”, Cambridge University Press, 1997.
- [C] B. COOPERSTEIN, The Geometry of Root Subgroups in Exceptional Groups, II, *Geometriae Dedicata*, **15** (1983), 1–45.
- [CH1] H. CUYPERS AND J.I. HALL, The Classification of 3-Transposition Groups with Trivial Center, in “Groups, Combinatorics and Geometry”. (M. Liebeck and J. Saxl, Eds), pp. 121–138, London Math. Soc. Lecture Notes 165, Cambridge University Press, 1992.

- [CH2] H. CUYPERS AND J.I. HALL, The 3-Transposition Groups with Trivial Center, *J. Algebra*, **178** (1995), 149–193.
- [CP] J.H.CONWAY AND A.D.PRITCHARD, Hyperbolic reflections for the Bimonster and $3Fi_{24}$, in “Groups, Combinatorics and Geometry” (1992).
- [F1] B. FISCHER, Finite group generated by 3-transpositions, University of Warwick, Lecture notes, 1969.
- [F2] B. FISCHER, Finite group generated by 3-transpositions I, *Invent. Math.* **13** (1971), 232–246.
- [K1] M.KITAZUME, The Conway-Norton algebras for $\Omega^-(6, 3)$, $\Omega(7, 3)$, F'_{24} , and their full automorphism groups, *Invent. Math.* **88** (1987), 277–318.
- [K2] M. KITAZUME, Some Non-split Extensions of the Orthogonal Group $\Omega(7, 3)$, *Journal of Algebra*, **224** (2000), 59–76.
- [KM] M. KITAZUME AND M. MIYAMOTO, 3-transposition automorphism groups of VOA, to appear in “Finite Groups Theory and Combinatorics in honor of Michio Suzuki”, *Advanced Studies in Pure Mathematics*.
- [M] M. MIYAMOTO, Griess algebras and conformal vectors in vertex operator algebras, *J. Algebra* **179** (1996), 523–548.
- [N] 永尾汎, 群とデザイン, 岩波書店
- [W1] R. WEISS, 3-transpositions in infinite groups, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* **96** (1984), 371–377.
- [W2] R. WEISS, A uniqueness lemma for groups generated by 3-transpositions, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* **97** (1985), 421–431.