数理解析研究所講究録 1216 巻 2001 年 110-114

非線型関数積分方程式の解の存在定理とその応用

柳谷　晃 (Akira Yanagiya)

2000 年 11 月 8 日

早稲田大学高等学院
177-0044 東京都練馬区上石神井 3-31-1
TEL03-5991-4151 FAX03-3928-4110
mail:yanagiya@mn.waseda.ac.jp
Waseda University Senior High School
3-31-1, Kamishakuzii, Nerima-ku, Tokyo, 177-0044, Japan

ここでは、死亡率、出生率などのパラメーターが人口の functional で表現されている人口モデルを、特性直線に沿って説く方法で解析することにより、得られる積分方程式について考える。歴史的には Gurtin と MacCamy によって、このタイプのモデルは、最初に研究された。この二人の論文は人口モデルの分野ではエポックメイキングとなった論文であり、より一般的な仮定で人口モデルを扱うきっかけを作った。しかし、Gurtin と MacCamy の得た結果を、積分方程式の立場から、拡張した論文は、残念ながら、著者の知るところとはならなかったので、この方向で、積分方程式の新たな解の存在定理を得ることができれば、と愚考している次第である。この方向で、Gurtin と MacCamy の結果を若干拡張することができたので、その結果を述べることにする。次の nonlinear age-dependent population model を考える。

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial n}{\partial a}+\frac{\partial n}{\partial t}+\mu(a,N(t))n(a,t)=0, \quad a>0, 0<t<T \\
&n(0,t)=\int_0^\infty m(a,N(t))n(a,t)da, \quad 0<t\leq T, \\
&n(a,0)=\varphi(a), \quad a\geq 0.
\end{aligned} \tag{1}
$$

ここで、n は人口分布 N は全人口を表す。即ち

$$N(t) = \int_0^\infty n(a,t)da, \tag{2}$$

である。また出生過程 B は、

$$B(t) = n(0,t)$$

という関係で表される。さらに人口モデルであるから $\varphi \in L^1(R_+), \mu(a,N), m(a,N)$ は非負の関数となる。特に μ, m は n が積分された形で変数として入るので、n の functional となっている。Gurtin,MacMamy の論文では、μ, m に対し N についての偏微分が仮定されているが、これはリプシッツ連続の仮定で十分であることがわかる。即ち次の二つの仮定により方程式 (1) はただひとつの正の解 $n(a,t)$ を持つ。

$(H1)$ φ は区分的に連続である。

$(H2)$ $\mu, m \in C(R^+ \times R^+)$ であり、一様に N についてリプシッツ連続である。

この定理の証明は特性直線に沿って得られる、次の積分方程式を扱うことにより得られる。N, B についての連立積分方程式は、

$$N(t) = \int_0^t K(t-a;t;N)B(a)da + \int_0^\infty L(a,t;N)\varphi(a)da,$$

$$B(t) = \int_0^t m(t-a,N(t))K(t-a,t;N)B(a)da + \int_0^\infty m(t+a,N(t))L(a,t;N)\varphi(a)da,$$

$$K(\alpha,t;N) = exp(-\int_{t-a}^t \mu(\alpha+\tau-t,N(\tau))d\tau),$$

$$L(\alpha,t;N) = exp(-\int_0^t \mu(\tau+\alpha,N(\tau))d\tau),$$

であり、この方程式に逐次近似法を適用することにより解の存在と一意性また 0 から ∞ までの存在を証明する。方程式の作り方かもわかるように、この形から解の定性的性質などを導き出すのは非常に難しいことである。最近になって方程式 (1) の周期解の存在がやっとわかった程度である。これから研究しなければならない問題が沢山ある分野である。

ここでは、さらに、この形の積分方程式を若干拡張した、関数積分方程式を考えて、それについての、解の存在定理を考えてみたい。次の連立積分方程式を考える。

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_0^t k(t-s,t;x)y(s)ds + \int_0^\infty L(t,s;x)\varphi(s)ds, \\ y(t) &= \int_0^t \beta(t-s,x(t))k(t-s,t;x)y(s)ds \end{aligned} \tag{3}$$

$$+\int_0^{\infty} \beta(t+s, x(t)) L(t, s; x) \varphi(s) ds \tag{4}$$

この積分方程式について、Gurtin と MacMamy の方法を基本にすることにより、次の定理を証明することができる。

以下の定理においては、つねに次の仮定をする。k, L は、正の函数としておく。必ずしも正の函数でなければならないことはないのであるが、ここでは、人口論のモデルへの応用も考えて、この仮定をしておく。正という仮定をはずしても、解の存在定理は証明される。さらに、

$$\beta \in C(R^+ \times R) \tag{5}$$

$$k(t, s; x) : cont.on[0, T] \times [0, T] \times \Sigma \tag{6}$$

$$L(t, s; x) : cont.on[0, T] \times R^+ \times \Sigma \tag{7}$$

$$|L(t, s; x) - 1| \longrightarrow 0 as T \longrightarrow 0, on 0 \leq t, s \leq T, x \in \Sigma \tag{8}$$

この仮定にある Σ は、

$$\Sigma = \{f | f \in C^+[0, T], ||f - \Phi|| < r, on[0, T]\}$$

であたえられる。ただし、

$$\Phi = \int_0^{\infty} \varphi(s) ds$$

である。上の仮定を基本仮定と呼ぶことにする。この仮定の元で、次の定理が得られる。

定理 1

方程式 (3)(4) について、基本仮定とともに、functional k, L にたいし、x についての、lipschitz 連続を仮定する。このとき、ある正の数 T が存在して、区間 $[0, T]$ において、ただ一つの解 x が存在する。

定理 2

方程式 (3)(4) について、基本仮定をほどこすと、ある正の数 T が存在して、区間 $[0, T]$ において、解 x が存在する。

人口論のモデルにおいて、φ が初期分布であったように、この積分方程式でも、正の φ が初期函数の働きをする。よって Φ のまわりで、解を捜せばよいことになる。定理 1 では、縮小写像定理を使い、定理 2 では、Schauder-Tychonoff の不動点定理を使う。証明方法は、連立の積分方程式を一

つの operator にまとめるところから始める。

積分方程式 (4) より

$$y(t) = B(x)(t) = \int_0^t \beta(t-s, x(t))k(t-s, t; x)y(s)ds + \int_0^\infty \beta(t+s, x(t))L(t, s; x)\varphi(s)ds$$

とおけば、ある正の数 M が存在して、

$$|B(x)(t)| \leq M \int_0^t |B(x)(s)|ds + M\Phi$$

と押さえられる。ここで、Gronwall の不等式を使えば、

$$|B(x)(t)| \leq Me^{Mt}$$

が成立する。ここで、もう一つの積分方程式 (4) を解を捜すための、operator と考えて、

$$X(x)(t) = \int_0^t k(t-s, t; x)y(s)ds + \int_0^\infty L(t, s; x)\varphi(s)ds$$

と定義すれば、この operator について、contraction または、Schauder-Tychonoff の定理を証明すれば良いことになる。

定理 (Schauder-Tychonoff)

E は locally convex Hausedorff space とする。E において

$$x \longrightarrow f(x) : cont.mapping$$

$$f(K) \subset A \subset K$$

ここで、A は compact である。このとき、少なくとも一つの不動点を K の中に f はもつ。

定理 1 を証明するには、

$$X(x)(\cdot) : \Sigma \longrightarrow \Sigma; contractive$$

を示せば良い。そのためには、operator$X(x)(\cdot)$ について、次の二つの不等式を示せば良い。

$$||X(x)(\cdot) - \Phi|| \leq r. ||X(x) - X(x')|| \leq \kappa||x - x'||, 0 < \kappa < 1$$

この二つの不等式は、つぎの三本の積分を仮定により、上から評価すれば示すことができる。正の数 r は、このとき同時に評価することが可能である。

$$\int_0^t |k(t-s,t;x)-k(t-s,t,;x')||B(x)(s)|ds,$$
$$\int_0^t k(t-s,t;x')|B(x)(s)-B(x')(s)|ds,$$
$$\int_0^\infty |L(t,s;x)-L(t,s;x')|\varphi(s)ds$$

定理2については、上に述べた不動点定理を証明するために、operator$X(x)(\cdot)$ が、同程度連続な函数の集合への、写像であることを示さなければならないが，これは次の不等式を評価することにより可能である。

$$\begin{aligned}|X(x)(t)-X(x)(t')| &\le \int_0^t k(t-s,s;x)-k(t'-s,t';x)||B(x)(s)|ds \\ &+ \int_t^{t'} |k(t'-s,t';x)B(x)(s)|ds+\int_0^\infty |L(t,s;x)-L(t',s;x)|\varphi(s)ds\end{aligned}$$

他の函数空間については、k, L の t についての周期性を仮定することにより，周期解の存在定理を得ることができる。このときは、Schauder-Tychonoff の不動点定理と、次の周期函数についての、compact を保証する定理を使えばよい。

定理 (周期函数の compact)

周期函数の集合について、

$$P_\omega \subset L^1_{loc}, \qquad A \subset P_\omega$$

である A が relatively compact であるためには、次の二つの条件を満たせばよい。

$$\int_0^\omega |x(s)|ds \le K, 0 \le K \le \infty$$

$$\int_0^\omega |x(t+h)-x(t)|dt \longrightarrow 0, h \longrightarrow 0,$$

uniformly with respect to $x \in A$.

参考文献

[1] M.E.Gurtin and R.C.MacCamy(1974),Non-linear age-dependent population dynamics,Archive for Rational Mechanics and Analysis 54:281-300