数理解析研究所講究録 1218 巻 2001 年 8-14

頂点作用素代数の表現論入門

安部　利之

(大阪大学理学研究科数学専攻博士課程後期 2 年)

1　序

頂点作用素代数の表現論について知られている結果を紹介する. 前半は, [FZ] で導入された Frenkel-Zhu 両側加群と fusion rule の間の関係, 後半では [Z] で証明された (通常の) 表現に対して得られる跡関数全体のなす空間のモジュラー不変性について説明する.

最初に, Frenkel-Zhu 両側加群と fusion rule の間の関係について簡単に説明する. 頂点作用素代数 V とその admissible 加群 M に対し, Zhu 代数の定義を M 上に一般化して Zhu 代数の両側加群 $A(M)$ が構成できる. 今 M^i $(i=1,2,3)$ を既約 admissible V-加群とする. この時 [FZ] において $\begin{pmatrix} M^3 \\ M^1\ M^2 \end{pmatrix}$ 型の intertwining 作用素のなす空間からベクトル空間 $\mathrm{Hom}_{A(V)}(A(M^1)\otimes_{A(V)}\Omega(M^2),\Omega(M^3))$ への単射線形写像が存在することが証明された. 更に V が有理的ならば, この線形写像が同型となることが知られている ([Li]). この同型を用いていくつかの有理的頂点作用素代数の fusion rule が決定されている ([FHL], [W]).

次に [Z] で証明された跡関数のモジュラー不変性について説明する. 任意の通常の V-加群 M で L_0 の固有空間分解が $M=\oplus_{n=0}^{\infty}M(n+h)$ $(h\in\mathbf{C})$ で与えられているものを考える. 各固有空間は有限次元なので, 任意の $a\in V$ に対し, 形式的巾級数

$$F_M(a,q)=\mathrm{Tr}\,|_M o(a)q^{L(0)-c_V/24}=q^{h-c_V/24}\sum_{n=0}^{\infty}(\mathrm{Tr}\,|_{M(h+n)}o(a))q^n$$

が矛盾無く定義されることがわかる (これを q-trace と呼ぶ). 今 V が C_2 有限性条件, つまり $a_{-2}b$ $(a,b\in V)$ の形の元で張られる V の部分空間が V において有限余次元をもつという条件を満たし, 更に V は Virasoro 代数の加群として最高ウェイト加群の和で表されていると仮定する. この時, 任意の $a\in V$ に対し, その対応する q-trace $F_M(a,q)$ は領域 $\{q\in\mathbf{C}\,|\,|q|<1\}$ 上で収束し, その極限は $q^{h-c_V/24}$ と $\{q\in\mathbf{C}\,|\,|q|<1\}$ 上のある正則関数の積で表される. 従って, $F_M(a,e^{2\pi i\tau})$ は上半平面上のある正則関数 $S_M(a,\tau)$ に収束することがわかる. この線形写像 $S_M: V\to\mathcal{F}_1=\{$ 上半平面上の正則関数 $\}$ が M

の跡関数と呼ばれるものである．一方 V から $\mathcal{F}_1$ への線形写像全体のなすベクトル空間 $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(V, \mathcal{F}_1)$ には，モジュラー群 $SL_2(\mathbf{Z})$ の作用が定義できる．この時，V が有理的かつ C_2 有限で Virasoro 代数の最高ウェイト加群の和で表されるとすると，既約表現は有限個でそれらを M^i $(i = 1, 2, \cdots, d)$ とすれば，S_{M^i} $(i = 1, 2, \cdots, d)$ で張られる $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(V, \mathcal{F}_1)$ の部分空間はモジュラー群の作用で不変となる．更に V が正則，つまり V の既約加群が V 自身のみの場合には，ウェイトが $\mathrm{wt}(a)$ の特異ベクトル a に付随する跡関数 $S_V(a, \tau)$ は，ウェイト $\mathrm{wt}(a)$ のモジュラー形式となることが導かれる．

2 Intertwining 作用素, Fusion Rule

この節では，[FHL] に従って intertwining 作用素及び fusion rule の定義を述べる．

定義 2.1 (M^i, Y_{M^i}) $(i = 1, 2, 3)$ を admissible V-加群とする．この時 $\begin{pmatrix} & M^3 & \\ M^1 & & M^2 \end{pmatrix}$ 型の **intertwining 作用素** とは，線形写像 $\mathcal{Y} : M^1 \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(M^2, M^3)\{z\}$ で $a \in V, u \in M^1$ 及び $v \in M^2$ に対し次を満たすものである:
(1) 固定した $n \in \mathbf{C}$ に対し，整数 k を十分大きくとれば $u_{n+k}v = 0$,
(2) (Jacobi 恒等式)

$$
\begin{aligned}
&z_0^{-1}\delta\left(\frac{z_1 - z_2}{z_0}\right) Y_{M^3}(a, z_1)\mathcal{Y}(u, z_2) - z_0^{-1}\delta\left(\frac{z_2 - z_1}{-z_0}\right)\mathcal{Y}(u, z_2)Y_{M^2}(a, z_1)\\
&= z_2^{-1}\delta\left(\frac{z_1 - z_0}{z_2}\right)\mathcal{Y}(Y_{M^1}(a, z_0)u, z_2),
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

(3) ($L(-1)$-微分性)

$$
\frac{d}{dz}\mathcal{Y}(u, z) = \mathcal{Y}(L(-1)u, z). \tag{2.2}
$$

特に，Jacobi 恒等式 (2.1) より次の交換関係が成り立つことがわかる; $a \in V$ 及び $u \in M^1$ に対し，

$$
[a_n, u_m] = \sum_{i=0}^{\infty} \begin{pmatrix} n \\ i \end{pmatrix} (a_i u)_{n+m-i}. \tag{2.3}
$$

三つの admissible V-加群 M^i $(i = 1, 2, 3)$ に対し，$\begin{pmatrix} & M^3 & \\ M^1 & & M^2 \end{pmatrix}$ 型の intertwining 作用素全体のなすベクトル空間を $I_V\begin{pmatrix} & M^3 & \\ M^1 & & M^2 \end{pmatrix}$ とかく．その次元 $\dim_{\mathbf{C}} I_V\begin{pmatrix} & M^3 & \\ M^1 & & M^2 \end{pmatrix}$ を対応する型の **fusion rule** と呼ぶ．

今 (M^i, Y_{M^i}) $(i=1,2,3)$ は全て既約 admissible V-加群とする. この時, 各 M^i はある $h_i \in \mathbf{C}$ が存在して L_0 の作用によって $M^i = \oplus_{n\in\mathbf{N}} M^i(h_i+n)$ の形に固有空間分解することが知られている. $\mathcal{Y}$ を $\begin{pmatrix} M^3 \\ M^1\ M^2 \end{pmatrix}$ 型の intertwining 作用素とすると, $\mathcal{Y}$ は任意の $u \in M^1$ に対し,

$$\mathcal{Y}(u,z) \in z^{-h_1-h_2+h_3}\mathrm{Hom}(M^2,M^3)[[z,z^{-1}]]$$

とあらわすことができる. 今 $\mathcal{Y}(u,z) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} u(n) z^{-n-1-h_1-h_2+h_3}$ とおく. 線形写像 $o: M^1 \to \mathrm{Hom}(M^2,M^3)$ を斉次元 $u \in M^1(h_1+k)$ に対し, $o(u) = u(k-1)$ と定義し, u に関し M^1 上に線形に拡張することによって定義する. この時, 次の命題が成立する.

命題 2.2 任意の $u \in M^1$ に対し, $o(u)\Omega(M^2) \subset \Omega(M^3)$.

証明には, 交換公式 (2.3) 及び $\Omega(M^i)$ $(i=2,3)$ の定義を用いる.

3 Frenkel-Zhu $A(V)$-両側加群

この節では, 前節の最後で与えた線形写像 $o: M^1 \to \mathrm{Hom}(M^2,M^3)$ の性質と $\begin{pmatrix} M^3 \\ M^1\ M^2 \end{pmatrix}$ 型の intertwining 作用素のなす空間との関係について述べる. そのために, [FZ] で構成された admissible V-加群に付随してえられる Zhu 代数 $A(V)$ の両側加群について説明する.

M を admissible V-加群とする. 斉次元 $a \in V$ と $u \in M$ に対し,

$$a \circ u = \mathrm{Res}_z \frac{(1+z)^{\mathrm{wt}(a)}}{z^2} Y_M(a,z)u$$

と定義し, $O(M)$ を $a \circ u$ の形の元で張られる M の部分空間とする. $A(M) = M/O(M)$ とおく. 斉次元 $a \in V$ 及び $u \in M$ に対し,

$$a * u = \mathrm{Res}_z \frac{(1+z)^{\mathrm{wt}(a)}}{z} Y_M(a,z)u,$$
$$u * a = \mathrm{Res}_z \frac{(1+z)^{\mathrm{wt}(a)-1}}{z} Y_M(a,z)u$$

と定義し, それぞれ a に関し V 上に線形に拡張する.

命題 3.1 ([FZ, Theorem 1.5.1]) 二つの線形写像

$$\rho_L : V \to \mathrm{End}\, M, a \mapsto \rho_L(a) : u \to a * u$$

及び

$$\rho_R : V \to \mathrm{End}\, M, a \mapsto \rho_R(a) : u \to u * a$$

はそれぞれ $A(M)$ 上に Zhu 代数 $A(V)$ の右加群及び左加群の構造を誘導する. 更にこの右作用と左作用は互いに可換である. よって $A(M)$ は両側 $A(V)$-加群となる.

命題 2.2 より線形写像

$$\begin{aligned} I_V\begin{pmatrix} M^3 \\ M^1\ M^2 \end{pmatrix} &\to \mathrm{Hom}(M^1 \otimes_{\mathbf{C}} \Omega(M^2), \Omega(M^3)), \\ \mathcal{Y} &\mapsto o: u\otimes v \mapsto o(u)v \end{aligned} \tag{3.1}$$

が得られる.

命題 3.2 任意の $a \in V, u \in M^1$ 及び $v \in O(M^1)$ に対し, $\Omega(M^2)$ 上, 次が成立する;

$$o(a * u) = o(a)o(u) \text{ 及び } o(u * a) = o(u)o(a),$$
$$o(v) = 0.$$

従って, 線形写像 (3.1) は線形写像

$$\begin{aligned} I_V\begin{pmatrix} M^3 \\ M^1\ M^2 \end{pmatrix} &\to \mathrm{Hom}_{A(V)}(A(M^1) \otimes_{A(V)} \Omega(M^2), \Omega(M^3)), \\ \mathcal{Y} &\mapsto o: u\otimes v \mapsto o(u)v \end{aligned} \tag{3.2}$$

を誘導することがわかる. Jacobi 恒等式から得られる intertwining 作用素の結合性及び可換性を用いて, 次の定理が示される.

定理 3.3 ([FZ, Theorem 1.5.3]) 任意の既約な admissible V-加群 M^i $(i = 1.2.3)$ に対し, 線形写像 (3.2) は単射である.

更に, V が有理的の時, 次が成立する.

定理 3.4 ([Li, Corollary 2.13]) V が有理的ならば, 任意の既約な admissible V-加群 M^i $(i = 1.2.3)$ に対し, 線形写像 (3.2) は同型写像である.

4 跡関数のモジュラー不変性

頂点作用素代数 $(V, Y, \mathbf{1}, \omega)$ に対し, 新しい頂点作用素 $Y[\cdot, z]$ を次のように定義する. 任意の $a \in V$ に対し,

$$Y[a, z] = Y(e^{zL_0}a, e^z - 1).$$

この時, $\tilde{\omega} = \omega - \frac{c_V}{24}$ とおけば, 組 $(V, Y[\cdot, z], \mathbf{1}, \tilde{\omega})$ が再び頂点作用素代数の構造を持つことが知られている ([Z, Theorem 4.2.1]). 任意の $a \in V$ に対し, $Y[a, z] = \sum_{n\in\mathbf{Z}} a[n] z^{-n-1}$, 更に $L[n] = \tilde{\omega}[n+1]$ $(n \in \mathbf{Z})$ と書くことにする. この時, V は $L[0]$ に関しても固有空間分解されることがわかる. $a \in V$ が $L[0]$ に関する固有値 n の固有ベクトルであるとき, a は $L[0]$ に関し斉次であるといい, $n = \mathrm{wt}[a]$ と書く.

定義 4.1 V を頂点作用素代数とする．$C_2(V)$ を $a_{-2}b$ $(a,b \in V)$ の形の元全体で張られる V の部分空間とする．この時, V が C_2**-有限** であるとは, $C_2(V)$ の V での余次元が有限となることをいう．

今 M を通常の V-加群で L_0 の作用に関し $M = \oplus_{n=0}^{\infty} M(h+n)$ $(h \in \mathbf{C})$ と固有空間分解してしているとする．この時, 任意の $a \in V$ に対し M の q-trace を

$$\begin{aligned} F_M(a,q) &= \mathrm{Tr}\,|_M o(a) q^{L_0 - \frac{c_V}{24}} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (\mathrm{Tr}\,|_{M_n} o(a)) q^{h-\frac{c_V}{24}+n} \in q^{h-\frac{c_V}{24}} \mathbf{C}[[q]] \end{aligned} \tag{4.1}$$

で定義する．この q-trace は次の性質を持つことが知られている．任意の $a,b \in V$ に対し,

$$F_M(a[0]b,q) = 0, \tag{4.2}$$

$$\begin{aligned} F_M(a[-1]b,q) &= \mathrm{Tr}\,|_M o(a)o(b) q^{L_0-\frac{c_V}{24}} \\ &\quad + \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{E}_{2k}(q) F_M(a[2k-1]b,q), \end{aligned} \tag{4.3}$$

ここで,

$$\tilde{E}_{2k}(q) = -\frac{B_{2k}}{(2k)!} + \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{2k-1}(n) q^n, \ \sigma_{2k-1}(n) = \sum_{d|n} d^{2k-1}$$

である．公式 (4.3) において, a のかわりに $L[-1]a$ を代入し, $L[-1]$-微分性と公式 (4.2) を用いれば次の公式

$$F_M(a[-2]b + \sum_{k=1}^{\infty} (2k-1)\tilde{E}_{2k}(q) a[2k-2]b, q) = 0, \tag{4.4}$$

を得る．また $a \in V$ が特異ベクトル, すなわち a は斉次元で任意の $n \geq 1$ に対し $L_n a = 0$ を満たすならば, q-trace の定義と (4.3) より直接

$$F_M(L[-2]a,q) = \left(q\frac{d}{dq} - \frac{c_V}{24} + \mathrm{wt}(a)\tilde{E}_2(q) \right) F_M(a,q) \tag{4.5}$$

となることが証明できる．今 $a \in V$ は特異ベクトルであると仮定する．この時, 公式 (4.2)-(4.5) を用いて $b = L[-n_1] \cdots L[-n_k]a$ $(n_i \in \mathbf{Z}_{>0})$ の形の元に付随する q-trace $F_M(b,q)$ は, $\mathbf{C}[\tilde{E}_2(q), \tilde{E}_4(q), \tilde{E}_6(q)]$ に係数を持つ $(q\frac{d}{dq})^i F_M(a,q)$ $(i \geq 0)$ の線形結合で表されることが示される．また V が $\mathbf{C}_2$-有限ならば, ある係数 $g_i(q) \in \mathbf{C}[\tilde{E}_4(q), \tilde{E}_6(q)]$ $(i = 1,2,\ldots,s)$ が存在して,

$$F_M(L[-2]^s a + \sum_{i=1}^{s} g_i(q) L[-2]^{s-i} a, q) = 0$$

となることを示すことができる．これらのことから $F_M(a,q)$ がある微分方程式をみたすことがわかり, 実際にその微分方程式は解くことができて次の結果が導かれる．

定理 4.2 [Z, Theorem 4.4.1] V を C_2-有限な頂点作用素代数とし, Virasoro 代数の加群として最高ウェイト加群の和で表されているとする. この時, 任意の V-加群 M で L_0 の作用に関し $M=\oplus_{n=0}^{\infty}M(h+n)$ $(h\in\mathbf{C})$ と固有空間分解しているものに対し, その q-trace $F_M(a,q)$ は任意の $a\in V$ に対し領域 $\{|q|<1\}$ で収束し, その極限 $\tilde{F}_M(a,q)$ は, ある $\{|q|<1\}$ 上定義された正則関数 $f(q)$ を用いて,

$$\tilde{F}_M(a,q)=q^{h-c_V/24}f(q)$$

と表される.

任意の $a\in V$ に対し,

$$S_M(a,\tau)=\tilde{F}_M(a,e^{2\pi i\tau})$$

と定義すると, 定理 4.2 より $S_M(a,\tau)$ は上半平面 $H=\{\mathrm{Im}z>0\}$ 上の正則関数となることがわかる. この正則関数を, $a\in V$ に付随する**跡関数**という. この時, 線形写像

$$S_M: V\to\mathcal{F}_1=\{H \text{ 上の正則関数 }\}, a\mapsto S_M(a,\tau)$$

を得る.

ベクトル空間 $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(V,\mathcal{F}_1)$ には次のようにモジュラー群 $SL_2(\mathbf{Z})$ の作用が定義できる: 任意の線形写像 $S\in\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(V,\mathcal{F}_1)$ 及び $L[0]$ に関する斉次元 $a\in V$ に対し, 行列 $A=\begin{pmatrix}\alpha&\beta\\ \gamma&\delta\end{pmatrix}\in SL_2(\mathbf{Z})$ の作用を,

$$S|_A(a,\tau)=(\gamma\tau+\delta)^{-\mathrm{wt}[a]}S\left(a,\frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta}\right)$$

で定義し, a に関し V 上に線形に拡張する. この時, 次の定理が成立する.

定理 4.3 ([Z, Theorem 5.3.2]) V を 有理的な頂点作用素代数とし, C_2-有限で, 更に Virasoro 代数の加群として最高ウェイト加群の和で表されているとする. また $M^1,\ldots,M^d$ を既約 V-加群の完全なリストとする. この時, 次が成立する:

(1) $S_{M^1},\ldots,S_{M^d}$ は $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(V,\mathcal{F}_1)$ で線形独立である.

(2) $S_{M^1},\ldots,S_{M^d}$ で張られる $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(V,\mathcal{F}_1)$ の部分空間は $SL_2(\mathbf{Z})$ の作用で不変である.

更に V は正則, つまり任意の既約 V-加群は V 自身のみであると仮定する. この場合に定理 4.3 を適用すると S_V は $\mathrm{Hom}(V,\mathcal{F}_1)$ の $SL_2(\mathbf{Z})$ の一次元部分加群を生成することがわかる. つまり, $a\in V$ が $L[0]$ に関する $\mathrm{wt}[a]$ の斉次元ならば, 跡関数 $S_V(a,\tau)$ へのモジュラー群の元 $A=\begin{pmatrix}\alpha&\beta\\ \gamma&\delta\end{pmatrix}$ の作用は, ある V のみに依存している定数 κ が存在して,

$$\begin{aligned}(S_V)|_A(a,\tau)&=(\gamma\tau+\delta)^{-\mathrm{wt}[a]}S_V\left(a,\frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta}\right)\\&=\kappa S_V(a,\tau)\end{aligned}$$

で与えられることがわかる. したがって, $\kappa = 1$ の時に $S_V(a, \tau)$ はウェイトが wt$[a]$ のモジュラー形式となることがわかる. 特に V の指標 $\mathrm{ch}_V(q) = S_V(\mathbf{1}, \tau)$, $q = e^{2\pi i \tau}$ はモジュラー関数となっている.

References

[FHL] I. Frenkel, Y.-Z. Huang and J. Lepowsky, On axiomatic approaches to vertex operator algebras and modules, Mem. Amer. Math. Soc. **104** (1993).

[FZ] I. Frenkel and Y.-C. Zhu, Vertex operator algebras associated to representations of affine and Virasoro algebras, *Duke Math. J.* **66** (1992), 123-168.

[Li] H.-S. Li, Determining fusion rules by $A(V)$-modules and bimodules, *J. Algebra* **212** (1999), 515-556.

[W] W.-Q. Wang, Rationality of Virasoro vertex operator algebras, *Duke Math. J.* **71**, IMRN No. 7 (1993), 197-211.

[Z] Y.-C. Zhu, Modular invariance of characters of vertex operator algebras, *J. Amer. Math. Soc.* **9** (1996), 237-302.