

# BPZ系列について(Survey)

庵原 謙治 (神戸大、理、数)

## 概要

ここでは、Virasoro代数の表現論に関して[FeFu1]で得られている結果の内、Belavin-Polyakov-Zamolodchikov (BPZ)系列と呼ばれる場合について、入門的な解説を試みる。

## 1 舞台設定

この節では、種々の記号を設定し、良く知られている基本的な事実について復習する。  
 まず、主役の代数であるVirasoro代数の定義を思い起こそう：

定義 1.1 Virasoro代数Virとは、 $\mathbb{C}$ -vector space

$$\text{Vir} := \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathbb{C}L_n \oplus \mathbb{C}c$$

であって、以下の交換関係を満たすLie代数である：

$$\begin{aligned} [L_m, L_n] &= (m - n)L_{m+n} + \frac{1}{12}(m^3 - m)\delta_{m+n,0}c, \\ [\text{Vir}, c] &= \{0\}. \end{aligned}$$

このLie代数は三角分解

$$\text{Vir} = \text{Vir}^+ \oplus \text{Vir}^0 \oplus \text{Vir}^-, \quad \text{Vir}^\pm := \bigoplus_{\pm n \in \mathbb{Z}_{>0}} \mathbb{C}L_n, \quad \text{Vir}^0 := \mathbb{C}L_0 \oplus \mathbb{C}c$$

を持つ。従って、Virasoro代数のHighest Weight Moduleと呼ばれる表現を考え得るが、まずその中で最も、`universalなもの`を定義しよう：

定義 1.2  $(z, h) \in \mathbb{C}^2 (\cong (\text{Vir}^0)^*)$ に対して、 $\text{Vir}^{\geq} := \text{Vir}^0 \oplus \text{Vir}^+$ -module  $\mathbb{C}_{z,h} := \mathbb{C}1_{z,h}$ を以下で定める。

$$c.1_{z,h} = z1_{z,h}, \quad L_0.1_{z,h} = h1_{z,h}, \quad \text{Vir}^+.1_{z,h} := 0.$$

このとき、highest weightが $(z, h)$ のVerma加群  $M(z, h)$ とは誘導加群

$$M(z, h) := \text{Ind}_{U(\text{Vir}^{\geq})}^{U(\text{Vir})} \mathbb{C}_{z,h} = U(\text{Vir}) \otimes_{U(\text{Vir}^{\geq})} \mathbb{C}_{z,h}$$

のことである。

このとき、以下は容易にわかる：

補題 1.1  $(z, h) \in \mathbb{C}^2 (\cong (\text{Vir}^0)^*)$  に対して、

1.  $M(z, h)$  は  $\text{Vir}^0$ -diagonalizable である, i.e.,

$$M(z, h) = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} M(z, h)_{h+n}, \quad M(z, h)_{h+n} := \{u \mid L_0 \cdot u = (h+n)u\}.$$

2. 正の整数  $n \in \mathbb{Z}_{>0}$  にたいして、

$$\dim M(z, h)_{h+n} = p(n) \quad (n \text{ の分割数}) < \infty.$$

3.  $M(z, h)$  は唯一つの極大部分加群  $J(z, h)$  を持つ, i.e.,

$$L(z, h) := M(z, h)/J(z, h)$$

は highestweight が  $(z, h)$  の既約 highest weight 加群。

本稿の目的は、[BPZ] で、質量 0 の臨界点に於ける格子模型を分類するのに現れた、いわゆる 'BPZ' 系列 (又は、Minimal 系列) と呼ばれる表現について、その構造の初等的な解説を行うことである。以下において BPZ 系列といえば、次の Data が固定されているものとする。

まず、正の整数  $p, q \in \mathbb{Z}_{>1}$  であって、互いに素なものを固定する。このとき、

$$z := 1 - 6 \frac{(p-q)^2}{pq}$$

とする。また、 $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$  に対して、

$$h_{\alpha, \beta} := \frac{(\alpha p - \beta q)^2 - (p-q)^2}{4pq}$$

とする。次に、正の整数  $r, s \in \mathbb{Z}_{>0}$  であって、 $r < q, s < p$  を満たすものを固定し、整数  $i \in \mathbb{Z}$  に対して、

$$h_i := \begin{cases} h_{(i-1)q+r, -s} & i \equiv 1 \pmod{2}, \\ h_{iq+r, s} & i \equiv 0 \pmod{2} \end{cases}$$

とおく。 □

## 2 種 (たね)

この節では、BPZ 系列に属する Verma 加群  $M(z, h_i)$  の構造を調べるために有用な表現論の道具 (Jantzen Filtration) について簡単に復習する。詳しくは、[Ja] を見られよ。

まず、Verma 加群  $M(z, h)$  が与えられた時、最初に考える問題は

問い  $M(z, h)$  は既約か？

であろう。この問いに対する答えを与えるため、 $M(z, h)$ 上の反変形式  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{z, h}$ を以下で定義する。まず、

$$\sigma : U(\text{Vir}) \longrightarrow U(\text{Vir}), \quad L_n \mapsto L_{-n} \quad (n \in \mathbb{Z}), \quad c \mapsto c$$

を anti-involution とする。次に、直和分解

$$U(\text{Vir}) = U(\text{Vir}^0) \oplus \{\text{Vir}^- U(\text{Vir}) + U(\text{Vir}) \text{Vir}^+\}$$

に関して第1成分への射影を

$$\pi : U(\text{Vir}) \longrightarrow U(\text{Vir}^0) \cong \mathbb{C}[(\text{Vir}^0)^*]$$

とする。

**定義 2.1**  $(z, h) \in (\text{Vir}^0)^* \cong \mathbb{C}^2$  に対して、 $M(z, h)$ 上の反変形式 (contravariant form)  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{z, h}$ とは、

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle_{z, h} : M(z, h) \times M(z, h) &\longrightarrow U(\text{Vir}^-) \times U(\text{Vir}^-) \longrightarrow U(\text{Vir}^0) \longrightarrow \mathbb{C}, \\ (x \cdot v_{z, h}, y \cdot v_{z, h}) &\longmapsto (x, y) \longmapsto \pi(\sigma(x)y) \longmapsto \pi(\sigma(x)y)(z, h). \end{aligned}$$

で定義されるものである。但し、 $x, y \in U(\text{Vir}^-), v_{z, h} := 1 \otimes \mathbf{1}_{z, h}$ とする。

このとき、以下の定理は良く知られており、その証明も簡単である。

**定理 2.1**  $(z, h) \in (\text{Vir}^0)^*$ とする。このとき、

1. (対称性)  $\langle u, w \rangle_{z, h} = \langle w, u \rangle_{z, h} \quad (u, w \in M(z, h)).$
2. (反変性)  $\langle x \cdot u, w \rangle_{z, h} = \langle u, \sigma(x) \cdot w \rangle_{z, h} \quad (x \in U(\text{Vir}), u, w \in M(z, h)).$
3.  $\text{Rad} \langle \cdot, \cdot \rangle_{z, h} = \{u \in M(z, h) \mid \langle u, w \rangle_{z, h} = 0 \ (\forall w \in M(z, h))\}$  は  $M(z, h)$ の極大部分加群。

上記の定理2.1の2で特に  $x = L_0$ とおくことにより、以下の系を得る：

**系 2.2**  $n, m \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対して、 $m \neq n$ ならば

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_{z, h} \big|_{M(z, h)_{h+m} \times M(z, h)_{h+n}} = 0.$$

そこで、 $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対して、

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_{z, h; n} := \langle \cdot, \cdot \rangle_{z, h} \big|_{M(z, h)_{h+n} \times M(z, h)_{h+n}}$$

とおき、これが非退化かどうかを調べれば良い。つまり、定理2.1及び系2.2より、

**系 2.3** 以下は同値：

$$M(z, h) : \text{既約} \iff \text{Rad} \langle \cdot, \cdot \rangle_{z, h; n} := \text{Rad} \langle \cdot, \cdot \rangle_{z, h} \cap M(z, h)_{h+n} = \{0\} \quad \forall n \in \mathbb{Z}_{>0}.$$

そこで、補題1.1の2より、 $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対して、 $\{u_i\}_{1 \leq i \leq p(n)}$ を  $M(z, h)_{h+n}$ の基底とすると、

$$\det \langle \cdot, \cdot \rangle_{z, h; n} := \det ((\langle u_i, u_j \rangle_{z, h})_{1 \leq i, j \leq p(n)})$$

がわかれば良い。これについては、以下の公式が知られている (証明は、e.g., [TK]を見られよ)：

定理 2.4 (Kac determinant)  $n \in \mathbb{Z}_{>0}$  とするとき、基底の選び方によるスカラー倍を除いて、以下が成立：

$$(\det \langle \cdot, \cdot \rangle_{z,h;n})^2 \propto \prod_{\substack{\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_{>0} \\ 1 \leq \alpha \beta \leq n}} \Phi_{\alpha, \beta}(z, h)^{p(n-\alpha\beta)},$$

但し、

$$\begin{aligned} \Phi_{\alpha, \beta}(z, h) := & \left\{ h + \frac{1}{24}(\alpha^2 - 1)(z - 13) + \frac{1}{2}(\alpha\beta - 1) \right\} \\ & \times \left\{ h + \frac{1}{24}(\beta^2 - 1)(z - 13) + \frac{1}{2}(\alpha\beta - 1) \right\} + \frac{1}{16}(\alpha^2 - \beta^2)^2 \end{aligned}$$

とする。

さて、BPZ系列の場合、 $M(z, h_i)$  ( $i \in \mathbb{Z}$ ) は既約であろうか？ 否、(幸か不幸か)  $M(z, h_i)$  は被約である。そこで、 $\text{Rad} \langle \cdot, \cdot \rangle_{z, h_i}$  の構造を調べてやる必要がある。

そこで、一般に Verma 加群  $M(z, h)$  ( $(z, h) \in (\text{Vir}^0)^*$ ) が被約なとき、 $\text{Rad} \langle \cdot, \cdot \rangle_{z, h}$  の構造を見るために、 $(z, h) \in (\text{Vir}^0)^*$  を 'generic な方向に' 少し '摂動' してやって、 $\langle \cdot, \cdot \rangle_{z, h}$  の '退化の度合い' を調べる方法が知られている。これは、Jantzen Filtration と呼ばれ、 $M(z, h)$  の部分加群の減少列からなるもので、以下に於いて簡単に説明する。なお、記述の簡明さのため、少しサボった導入をするので、納得のいかない人は [Ja] の第 5 章を見られよ。

まず、 $T$  を不定元とする 1 変数の多項式環を  $\mathbb{C}[T]$  とする。そして、 $(z, h) \in (\text{Vir}^0)^*$  に対して、 $(z', h') \in (\text{Vir}^0)^*$  を 'generic な方向'、つまり任意の  $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_{>0}$  に対して

$$\Phi_{\alpha, \beta}(z + Tz', h + Th') \in \mathbb{C}[T] \setminus T^2\mathbb{C}[T]$$

を満たすものから 1 つ選び、それを固定する。このとき、

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle_{z, h}^T : M(z, h) \times M(z, h) &\longrightarrow U(\text{Vir}^-) \times U(\text{Vir}^-) \longrightarrow \mathbb{C}[T], \\ (x.v_{z, h}, y.v_{z, h}) &\longmapsto (x, y) \longmapsto \pi(\sigma(x)y)\{(z, h) + T(z', h')\} \end{aligned}$$

とするとき、 $k \in \mathbb{Z}_{>0}$  に対して、

$$M(z, h)(k) := \{u \mid \text{ord}_T \langle u, w \rangle_{z, h}^T \geq k \quad (\forall w \in M(z, h))\}$$

とおく。但し、 $P(T) \in \mathbb{C}[T] \setminus \{0\}$  に対して、 $k := \text{ord}_T P(T)$  とは、

$$T^k \mid P(T), \quad T^{k+1} \nmid P(T)$$

を満たす整数  $k \in \mathbb{Z}$  のことである。(  $P(T) = 0$  の場合は  $\text{ord}_T P(T) = \infty$  と約束する。) また、 $n \in \mathbb{Z}_{>0}$  とするとき、 $M(z, h)_{h+n}$  の基底  $\{u_i\}_{1 \leq i \leq p(n)}$  を用いて、

$$\det \langle \cdot, \cdot \rangle_{z, h; n}^T := \det (\langle u_i, u_j \rangle_{z, h}^T)_{1 \leq i, j \leq p(n)}$$

と定義する。このとき、以下の定理が成立する：

定理 2.5 ([Ja]) 1.  $k \in \mathbb{Z}_{>0}$  に対して、 $M(z, h)(k)$  は  $M(z, h)$  の部分 Vir-加群である。特に、 $M(z, h)(1) = \text{Rad} \langle \cdot, \cdot \rangle_{z, h}$  は  $M(z, h)$  の極大部分加群である。

2.  $k \in \mathbb{Z}_{>0}$  に対して、商加群  $M(z, h)(k)/M(z, h)(k+1)$  上に非退化な反変形式が存在する。

( $T^{-k}\langle \cdot, \cdot \rangle_{z, h}^T|_{T=0}$  を考えよ。)

3.  $n \in \mathbb{Z}_{>0}$  に対して、以下の等式が成立する：

$$\text{ord}_T \det \langle \cdot, \cdot \rangle_{z, h; n}^T = \sum_{k=1}^{\infty} \dim \{M(z, h)(k)\}_{h+n}.$$

但し、

$$M(z, h)(k)_{h+n} := \{u \in M(z, h)(k) \mid L_0.u = (h+n)u\}$$

とする。

特に、BPZ系列の場合、上記の定理2.5の3を適用すると以下の系を得る：

系 2.6  $i \in \mathbb{Z}$  及び  $n \in \mathbb{Z}_{>0}$  とする。このとき、以下の等式が成立する。

$$\sum_{k=1}^{\infty} \dim M(z, h_i)(k)_{h_i+n} = \sum_{k=1}^{\infty} \{ \dim M(z, h_{|i|+2k-1})_{h_i+n} + \dim M(z, h_{-|i|-2k+1})_{h_i+n} \}$$

この式は、以下の2点を証明すれば得られる：

1.  $\{h_i + \alpha\beta \mid (\alpha, \beta) \in (\mathbb{Z}_{>0})^2 \text{ s.t. } \Phi_{\alpha, \beta}(z, h_i) = 0\} = \{h_{|i|+2k-1}, h_{-|i|-2k+1} \mid k \in \mathbb{Z}_{>0}\}.$
2.  $(z, h_i)$  に対して、 $(0, 1) \in (\text{Vir}^0)^*$  は generic であり、従って、 $\text{ord}_T \Phi_{\alpha, \beta}(z, h_i + T) \leq 1$  を満たす。

### 3 前振り

この節では、BPZ系列の場合のVerma加群  $M(z, h_i)$  ( $i \in \mathbb{Z}$ ) のJantzen Filtrationの構造を調べるためにVerma加群の埋め込みDiagramを構成する。

まず、一般の  $(z, h) \in (\text{Vir}^0)^*$  に対して、以下の命題が成立する。

命題 3.1 任意の  $n \in \mathbb{Z}_{>0}$  に対して、

$$\dim \{M(z, h)_{h+n}\}^{\text{Vir}^+} \leq 1.$$

但し、

$$\{M(z, h)_{h+n}\}^{\text{Vir}^+} := \{u \in M(z, h)_{h+n} \mid \text{Vir}^+.u = \{0\}\}$$

である。(  $\{M(z, h)_{h+n}\}^{\text{Vir}^+} \setminus \{0\}$  の元は、singular vectorと呼ばれる。)

証明の方針: 「第1ステップ」  $n \in \mathbb{Z}_{>0}$  に対してまず  $\mathcal{P}_n := \{(1^{r_1} 2^{r_2} \cdots n^{r_n}) \mid r_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \sum_{i=1}^n i r_i = n\}$  を  $n$  の分割とし、 $\mathbb{I} = (1^{r_1} 2^{r_2} \cdots n^{r_n}) \in \mathcal{P}_n$  に対し、 $e_{\mathbb{I}} := L_{-n}^{r_n} \cdots L_{-2}^{r_2} L_{-1}^{r_1}$  とおく。このとき、 $\{e_{\mathbb{I}}.v_{z, h} \mid \mathbb{I} \in \mathcal{P}_n\}$  ( $v_{z, h} = 1 \otimes \mathbf{1}_{z, h}$ ) は  $M(z, h)_{h+n}$  の基底をなす。

「第2ステップ」  $n \in \mathbb{Z}_{>0}$  に対して、 $\mathcal{P}_n$  上の全順序  $>$  を以下で定義する:  $\mathbb{I} = (1^{r_1} 2^{r_2} \dots n^{r_n})$ ,  $\mathbb{J} = (1^{s_1} 2^{s_2} \dots n^{s_n}) \in \mathcal{P}_n$ ,

$$\mathbb{I} > \mathbb{J} \iff \exists m \in \mathbb{Z}_{>0} \text{ s.t. } m \leq n, \begin{cases} r_k = s_k & k < m, \\ r_k > s_k & k = m. \end{cases}$$

「第3ステップ」  $n \in \mathbb{Z}_{>0}$  に対して、 $w \in \{M(z, h)_{h+n}\}^{\text{Vir}^+} \setminus \{0\}$  が存在するとせよ。このとき、

$$w = \sum_{\mathbb{I} \in \mathcal{P}_n} c_{\mathbb{I}}^w e_{\mathbb{I}} \cdot v_{z, h}$$

とおく。  $\mathbb{J} = (1^{s_1} j^{s_j} \dots n^{s_n}) \in \mathcal{P}_n$  ( $\exists j \in \mathbb{Z}_{>1}$  s.t.  $s_j > 0$ ) であって  $c_{\mathbb{J}}^w \neq 0$  を満たすものに対して、  $\mathbb{J}' := (1^{s_1+1} j^{s_j-1} \dots n^{s_n}) \in \mathcal{P}_{n-j+1}$  とおく。また、

$$w' := L_{j-1} \cdot w = \sum_{\mathbb{I}' \in \mathcal{P}_{n-j+1}} c_{\mathbb{I}'}^{w'} e_{\mathbb{I}'} \cdot v_{z, h}$$

と定義する。このとき、等式

$$c_{\mathbb{J}'}^{w'} = \alpha_{\mathbb{J}}^w c_{\mathbb{J}}^w + \sum_{\substack{\mathbb{I} \in \mathcal{P}_n \\ \mathbb{I} > \mathbb{J}}} Q_{\mathbb{J}}^{w, \mathbb{I}} c_{\mathbb{I}}^w$$

を満たす  $\alpha_{\mathbb{J}}^w \in \mathbb{C}^*$  及び  $Q_{\mathbb{J}}^{w, \mathbb{I}} \in \mathbb{C}$  が存在する。

「第4ステップ」 第3ステップで得られた  $\{c_{\mathbb{J}}^w\}$  に関する等式の triangularity から、一意性が従う。  $\square$

さて、Kac determinant と singular vector の存在との関係について、以下の補題が成立する。

**補題 3.2**  $(z, h) \in (\text{Vir}^0)^*$  に対して、 $\Phi_{\alpha, \beta}(z, h) = 0$  を満たす正の整数  $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_{>0}$  が存在するとする。このとき、

$$\dim\{M(z, h)_{h+\alpha\beta}\}^{\text{Vir}^+} = 1.$$

この補題は以下のように証明される。まず、

$$\begin{aligned} Z_{\alpha, \beta} &:= \{(z, h) \in (\text{Vir}^0)^* \mid \Phi_{\alpha, \beta}(z, h) = 0\} \\ &= \{(z(t), h_{\alpha, \beta}(t)) \mid t \in \mathbb{C}^*\} \end{aligned}$$

但し、

$$z(t) := 1 - 6 \frac{(t-1)^2}{t}, \quad h_{\alpha, \beta}(t) := \frac{(\alpha t - \beta)^2 - (t-1)^2}{4t}$$

とおく。ここで、 $t \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Q}$  のとき、 $\Phi_{\gamma, \delta}(z(t), h_{\alpha, \beta}(t)) = 0$  を満たす  $(\gamma, \delta) \in (\mathbb{Z}_{>0})^2$  は  $(\alpha, \beta) \in (\mathbb{Z}_{>0})^2$  に存在しないことが示され、このとき、

$$\det\langle \cdot, \cdot \rangle_{z(t), h_{\alpha, \beta}(t); n} \neq 0 \quad \forall n < \alpha\beta$$

を満たすことがわかる。このことから、定理2.1に注意すると、

$$\exists w(t) = \sum_{\mathbb{I} \in \mathcal{P}_{\alpha\beta}} c_{\mathbb{I}}^{w(t)}(t) e_{\mathbb{I}.v_{z,h}} \in \{M(z(t), h_{\alpha,\beta}(t))_{h_{\alpha,\beta}(t)+\alpha\beta}\}^{\text{Vir}^+} \setminus \{0\}$$

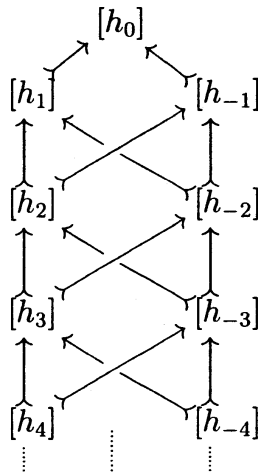
であることが従う。特に、係数たち  $\{c_{\mathbb{I}}^{w(t)}(t)\}_{\mathbb{I} \in \mathcal{P}_{\alpha\beta}}$  は互いに素な  $t$  の多項式になっているとしてよい。後は、 $(z(t), h_{\alpha,\beta}(t)) =$  補題の  $(z, h)$  となるような  $t$  を  $t = t_0 \in \mathbb{C}^*$  として、 $w(t_0)$  を考えれば命題3.1より、証明が完了する。

以上の準備の基で、BPZ系列に属するVerma加群の埋め込みDiagramを構成する。まず、記号の準備として、整数  $i \in \mathbb{Z}$  に対して、 $[h_i] := M(z, h_i)$  とし、Verma加群  $M(z, h_i)$  から Verma加群  $M(z, h_j)$  ( $i, j \in \mathbb{Z}$ ) への単射を

$$[h_i] \hookrightarrow [h_j].$$

で表すことにする。このとき、系2.6の証明の方針で述べた事実、命題3.1及び補題3.2を用いると次の可換図式の存在が容易に構成される。

図 1: 埋め込みDiagram



## 4 本ねた

この節では、前節で構成したBPZ系列に属するVerma加群の間の埋め込みDiagram(図1)を用いて、Verma加群  $M(z, h_i)$  のJantzen Filtrationの構造を決定する。また、その応用として  $L(z, h_i)$  の対するBernstein-Gel'fand-Gel'fand型のResolutionを構成し、特に既約表現  $L(z, h_0)$  の指標を  $\vartheta$  関数とDedekindの  $\eta$  関数を用いて書き表わす。なお、記号の煩雑さを避けるため、図1の埋め込みによるImageとPre-Imageを記号の上で、区別しないことにする。

まず、天下りではあるが  $i \in \mathbb{Z}$  及び  $k \in \mathbb{Z}_{>0}$  にたいして、Verma加群  $M(z, h_i)$  の部分加群  $N(z, h_i)(k)$  を以下で定義する：

$$N(z, h_i)(k) := M(z, h_{|i|+k}) + M(z, h_{-|i|-k}) \subset M(z, h_i).$$

このとき、以下の定理が成立する。

定理 4.1 任意の  $i \in \mathbb{Z}$  及び  $k \in \mathbb{Z}_{>0}$  に対して、 $M(z, h_i)(k) = N(z, h_i)(k)$ .

証明 まず、 $M(z, h_i)(k) \supset N(z, h_i)(k)$  を示す。

これは、定理2.5及び埋め込みDiagram(図1)より、 $k$ についての数学的帰納法で証明できる。

次に、 $M(z, h_i)(k) = N(z, h_i)(k)$  を示す。

$n \in \mathbb{Z}_{>0}$  とし、任意の  $0 \leq m < n$  なる  $m \in \mathbb{Z}$  及び任意の  $i \in \mathbb{Z}$ ,  $k \in \mathbb{Z}_{>0}$  に対して、

$$M(z, h_i)(k)_{h_i+m} = N(z, h_i)_{h_i+m}$$

が成立していると仮定する。(帰納法の最初のステップはtrivial。) このとき、

$$M(z, h_i)(k)_{h_i+n} = N(z, h_i)_{h_i+n}$$

が成立することを以下で示す。まず、次のComplexは  $L_0$ -weight =  $h_i + n$  のところでacyclicである：

$$\begin{aligned} & \dots \xrightarrow{d_{j+1}} M(z, h_{|i|+k+j}) \oplus M(z, h_{-|i|-k-j}) \xrightarrow{d_j} \dots \\ & \dots \xrightarrow{d_2} M(z, h_{|i|+k+1}) \oplus M(z, h_{-|i|-k-1}) \xrightarrow{d_1} M(z, h_{|i|+k}) \oplus M(z, h_{-|i|-k}) \\ & \xrightarrow{d_0} N(z, h_i)(k) \longrightarrow 0, \end{aligned}$$

但し、

$$d_0(x, y) := x + y, \quad d_j(x, y) := (x + y, -x - y) \quad (j > 0)$$

とする。実際、これがComplexになっていること、i.e.,  $\text{Ker}d_j \supset \text{Im}d_{j+1}$  ( $j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ ) は定義より明らか。よって、 $\text{Ker}d_j \subset \text{Im}d_{j+1}$  を示せば良い。ところで、定義より  $d_0$  は全射である。また、 $j \in \mathbb{Z}_{>0}$  に対して定義より、

$$\begin{aligned} \text{Ker}d_j &= \{(x, -x) \mid x \in M(z, h_{|i|+k+j}) \cap M(z, h_{-|i|-k-j})\}, \\ \text{Im}d_{j+1} &= \{(x, -x) \mid x \in M(z, h_{|i|+k+j+1}) + M(z, h_{-|i|-k-j-1})\}. \end{aligned}$$

ここで、 $M(z, h_{|i|+k+j})(1)$  は  $M(z, h_{|i|+k+j})$  の極大部分加群 (cf. 定理2.5の1) だから、

$$M(z, h_{|i|+k+j}) \cap M(z, h_{-|i|-k-j}) \subset M(z, h_{|i|+k+j})(1)$$

となる。また、このとき、 $h_i + n = h_{|i|+k+j} + (h_i - h_{|i|+k+j} + n)$  であり、 $h_i - h_{|i|+k+j} + n \leq n$  ゆえ、帰納法の仮定から

$$(M(z, h_{|i|+k+j})(1))_{h_i+n} = (N(z, h_{|i|+k+j})(1))_{h_i+n}$$

となる。従って、 $N(z, h_{|i|+k+j})(1)$  の定義より、

$$\begin{aligned} (M(z, h_{|i|+k+j}) \cap M(z, h_{-|i|-k-j}))_{h_i+n} &\subset (M(z, h_{|i|+k+j})(1))_{h_i+n} = (N(z, h_{|i|+k+j})(1))_{h_i+n} \\ &= (M(z, h_{|i|+k+j+1}) + M(z, h_{-|i|-k-j-1}))_{h_i+n}, \end{aligned}$$

すなわち、 $\text{Ker}d_j \subset \text{Im}d_{j+1}$  が  $L_0$ -weight =  $h_i + n$  のところで成立する。

次に、Euler-Poincaré Principle により、

$$\dim N(z, h_i)(k)_{h_i+n} = \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j-1} \{ \dim M(z, h_{|i|+k+j-1})_{h_i+n} + \dim M(z, h_{-|i|-k-j+1})_{h_i+n} \}$$



$$\sum_{k=1}^{\infty} \dim N(z, h_i)(k)_{h_i+n} = \sum_{k=1}^{\infty} \{ \dim M(z, h_{|i|+2k-1})_{h_i+n} + \dim M(z, h_{-|i|-2k+1})_{h_i+n} \}$$

を得る。一方、系2.6より、

$$\sum_{k=1}^{\infty} \dim M(z, h_i)(k)_{h_i+n} = \sum_{k=1}^{\infty} \dim N(z, h_i)(k)_{h_i+n}$$

となり、既に示されている包含関係より、

$$M(z, h_i)(k)_{h_i+n} = N(z, h_i)(k)_{h_i+n}$$

が従う。 □

さて、上記の定理4.1の1つの系として、既約highest weight module  $L(z, h_i)$  のBernstein-Gel'fand-Gel'fand(BGG)型のResolutionが得られる：

系 4.2 (BGG分解) 任意の  $i \in \mathbb{Z}$  に対して、次の完全列が存在する：

$$\begin{aligned} \cdots &\longrightarrow M(z, h_{|i|+j}) \oplus M(z, h_{-|i|-j}) \longrightarrow \cdots \\ \cdots &\longrightarrow M(z, h_{|i|+1}) \oplus M(z, h_{-|i|-1}) \longrightarrow M(z, h_i) \longrightarrow L(z, h_i) \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

証明 まず、定理2.5の1及び定理4.1より、以下の短完全列を得る：

$$0 \longrightarrow N(z, h_i)(1) = M(z, h_i)(1) \longrightarrow M(z, h_i) \longrightarrow L(z, h_i) \longrightarrow 0.$$

また、 $N(z, h_i)(1)$ の定義より、次の列も完全：

$$0 \longrightarrow M(z, h_{|i|+1}) \cap M(z, h_{-|i|-1}) \longrightarrow M(z, h_{|i|+1}) \oplus M(z, h_{-|i|-1}) \longrightarrow N(z, h_i)(1) \longrightarrow 0$$

であるが、定理4.1より、 $M(z, h_{|i|+1}) \cap M(z, h_{-|i|-1}) \cong N(z, h_{|i|+1})(1)$ ゆえ、以下の短完全列を得る：

$$0 \longrightarrow N(z, h_{|i|+1})(1) \longrightarrow M(z, h_{|i|+1}) \oplus M(z, h_{-|i|-1}) \longrightarrow N(z, h_i)(1) \longrightarrow 0.$$

以下同様に  $k \in \mathbb{Z}_{>0}$  に対して、短完全列

$$0 \longrightarrow N(z, h_{|i|+k+1})(1) \longrightarrow M(z, h_{|i|+k+1}) \oplus M(z, h_{-|i|-k-1}) \longrightarrow N(z, h_{|i|+k})(1) \longrightarrow 0$$

を得る。後は、上で構成した短完全列のYoneda Product (cup 積)を取れば良い。 □

最後に、系4.2の応用として、 $L(z, h_0)$ の指標を計算する。

まず、 $q = e^{2\pi\sqrt{-1}\tau}$  ( $\text{Im}\tau > 0$ )とし、weight  $\frac{1}{2}$ のmodular form  $\Theta_{n,m}(\tau)$ 及び $\eta(\tau)$ を以下で定義する。

定義 4.1 1. Dedekindの $\eta$ 函数：  $\eta(\tau) = q^{\frac{1}{24}} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n)$ .

2. theta函数：  $m \in \mathbb{Z}_{>0}$  及び  $n \in \mathbb{Z}/2m\mathbb{Z}$  に対して、

$$\Theta_{n,m}(\tau) := \sum_{k \in \mathbb{Z}} q^{m(k + \frac{n}{2m})^2}.$$

ここで、Vir-加群  $V$  を highest weight が  $(z, h)$  の highest weight module とするとき、その weigh分解を

$$V = \bigoplus_{n=0}^{\infty} V_{h+n}, \quad V_{h+n} := \{u \in V \mid L_0 \cdot u = (h+n)u\} \quad (n \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$$

とする。このとき、

$$\mathrm{tr}_V q^{L_0 - \frac{1}{24}c} := \sum_{n=0}^{\infty} (\dim V_{h+n}) q^{h+n - \frac{1}{24}z}$$

とおき、これを  $V$  の normalized character と呼ぶ。この函数  $\mathrm{tr}_{\{ \cdot \}} q^{L_0 - \frac{1}{24}c}$  の加法性から、系 4.2 を用いると、既約 highest weight module  $L(z, h_0)$  の normalized character は以下の様に計算される：

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}_{L(z, h_0)} q^{L_0 - \frac{1}{24}c} &= \sum_{i \in \mathbb{Z}} (-1)^i \mathrm{tr}_{M(z, h_i)} q^{L_0 - \frac{1}{24}c} \\ &= \eta(\tau)^{-1} \sum_{i \in \mathbb{Z}} (-1)^i q^{h_i - \frac{1}{24}(z-1)} \\ &= \eta(\tau)^{-1} (\Theta_{rp-sq, pq}(\tau) - \Theta_{rp+sq, pq}(\tau)). \end{aligned}$$

従って、 $\mathrm{tr}_{L(z, h_0)} q^{L_0 - \frac{1}{24}c}$  は weight 0 の modular form であることがわかる。

## 5 おち

以上、BPZ 系列をざーと見てきたが、実は [FeFu1] では全ての  $(z, h) \in (\mathrm{Vir}^0)^*$  に対して、 $M(z, h)$  の Jantzen Filtration の構造を、あのたった 2 ページの論文の中で、決定している。また、[FeFu2] では、Verma 加群のみならず、Fock module (正確には、semi-infinite form の上の表現) の構造を、(若干の不備があるとはいえ) 決定している。その主な道具は、§2 で軽くおさらいをした、Jantzen Filtration 及びその一般化である。要するに、Virasoro 代数 Vir はその Rank 2 的な特徴ゆえ [Ja], [Mal] の手法がほぼそのままの形で適用できるのである。以下、少し言い残したことを述べる。まず、前節で述べた様に、BPZ 系列に属する既約表現  $L(z, h_0)$  の normalized character は weight 0 の modular form になっている。そこで、BPZ 系列を指定するときの Data の内、 $(r, s)$  を協調して  $\chi_{r,s}(\tau) := \mathrm{tr}_{L(z, h_0)} q^{L_0 - \frac{1}{24}c}$  とおくと、vector space  $\sum_{r,s} \mathbb{C} \chi_{r,s}(\tau)$  は  $SL_2(\mathbb{Z})$  の作用で不変である。このような、表現のクラスは BPZ 系列に限られることが [FeFu1] の応用でわかる。このことは、[BPZ] で重要な役割を果たしているのだが、`指標の保型性' と `無限自由度の対称性を持つ可積分系' との間には一般にどういう関係があるのだろうか？何か、普遍的な原理が支配しているように思うのだが、残念ながら (少なくとも) 私にはそれが何なのか神秘的な現象に見えるだけで、全くわからない。

そこで、私なりにあがき、取り敢えず Virasoro 代数の表現について少しでも理解したい、と格闘した結果が、大阪大学の古閑 義之氏と共同で執筆中の [IK] にまとめられてある (予定である) そこには、物理的に重要と思える Virasoro 代数の表現論のうち、特にまとまった文献が無いか、あるいは証明が (少なくとも私の知る限り)、文献の上では存在しないと思える内容に触れてあるので、興味をもたれたら、是非一読の上、批判をしていただきたい。

最後に、ここ数年の共同研究者の 1 人である古閑氏、及びこの短気(!?) 共同研究で発表の機会を与えていただいた永友 清和氏に感謝します。

## 参考文献

- [BPZ] Belavin A. A., Polyakov A. M. and Zamolodchikov A. B., *Infinite conformal symmetry in two-dimensional quantum field theory*, Nucl. Phys. **B 241**, (1984), 333–380.
- [FeFu1] Feigin B.L. and Fuchs D.B., *Verma Modules over the Virasoro Algebra*, Funkts. Anal. Prilozhen., **17**, (1983), 91–92.
- [FeFu2] Feigin B.L. and Fuchs D.B., *Representations of the Virasoro algebra*, Adv. Stud. Contemp. Math. **7**, 465–554, Gordon and Breach Science Publ. New York, 1990.
- [IK] Iohara, K. and Koga, Y., 図書、執筆中.
- [Ja] Jantzen J.C., *Moduln mit einem höchsten Gewicht*, Lect. Notes in Math. **750** Springer-Verlag, 1979.
- [Mal] Malikov F.G., *Verma modules over Kac-Moody algebras of rank 2*, Leningrad Math. J., **2**, No. 2, (1991), 269–286.
- [TK] Tsuchiya A. and Kanie Y., *Fock Space Representations of the Virasoro Algebra – Intertwining Operators –*, Publ. RIMS Kyoto Univ. **22**, (1986), 259–327.