数理解析研究所講究録 1219 巻 2001 年 51-61

$SL(2,\mathbb{R})$ の Selberg 跡公式と低ウェイト保型形式空間の次元などについて

Tsuneo ARAKAWA (Rikkyo University)
荒川 恒男 (立教大学 理学部)

0 始めに

Selberg 跡公式は産み出された当初から、保形形式空間の次元の計算に応用された. この稿では低ウェイトの保型形式空間に焦点を当て, Selberg 跡公式から空間の次元を導きだす機構を復習する. Selberg 跡公式を利用する場合, 方法は大別して, テスト関数として特別な都合の良い関数をとり基本領域上の積分を計算する方法と, スペクトルの情報と幾何的情報を結びつける一般的 Selberg 跡公式を利用する方法とがある. 前者は, 低ウェイトの保型形式空間の次元の情報を得るには, 収束の問題などの障壁があり, 応用しにくいという欠点がある. ここでは, 前者と後者の方法を混在させた非常に巧妙な方法であるリゾルベント跡公式を解説し, 次元の計算に応用する. 新しい結果も視野に入れたいので, 可能な限り一般的 ウェイト (multiplier system) つきの跡公式を扱う. この跡公式により, Selberg ゼータ関数 (Selberg 型ゼータ関数) のある critical point での零点の位数 (極の位数) と低ウェイト保型形式空間の次元との関係を導くことができる. この跡公式は半整数とか分数ウェイトの保型形式空間の次元についても適用できる. また, 特別な場合には数論的方法で低ウェイト保型形式空間の次元を計算できるので, Selberg ゼータ関数の零点の位数について一定の情報を得ることが出来る.

一般的ウェイトが扱える跡公式の文献は Hejhal による大部な総合報告 [He] と Fischer による [Fi] が主なものである。[Fi] は実解析的保型形式の Petersson, Maass, Roelcke, Elstrodt らのドイツ学派の蓄積の下で, 直接には Roelcke [Ro] の仕事を下敷きにして書かれている. self contained ではないが読みやすい. ここでは [Fi] を下敷きにして説明する. $SL_2(\mathbb{Z})$ のユニタリ指標つきの Selberg ゼータ関数と Γ が数論的離散群の場合の Selberg ゼータ関数の explicit な表示も最終節で解説した. 第 3 回整数論オータムワークショップ報告集に若干詳しい記事 [Ar2] を書いたのでそちらも参照されたい.

1 リゾルベント跡公式

$\mathfrak{H}$ を上半平面とし $z,\ w \in \mathfrak{H}$ に対して

$$\sigma(z,w)=\frac{|z-\overline{w}|^2}{4(\mathrm{Im}z)(\mathrm{Im}w)}$$

とおくと, $M \in SL_2(\mathbb{R})$ について $\sigma(Mz, Mw) = \sigma(z, w)$ である. この関数 $\sigma : \mathfrak{H} \times \mathfrak{H} \to \mathbb{R}_{>0}$ の重要な性質は

$$\sigma(z, w) \geq 1 \qquad \text{かつ} \quad \sigma(z, w) = 1 \text{ となるのは } z = w \text{ のときのみ}$$

が成立することである. 後の必要上, 領域 $\mathbb{C} - \{z = x \mid x \leq 0\}$ 上の正則関数 $w^s := e^{s \log w}$ の分枝を $-\pi < \arg w \leq \pi$ にとる. $M \in SL_2(\mathbb{R})$ と $z \in \mathfrak{H}$ に対し $J(M, z)$ を通常の保型因子とする. 群 $SL_2(\mathbb{R})$ のコサイクルを定義しておこう. $\lambda \in \mathbb{R}$ に対し

$$\sigma_\lambda(A, B) = \frac{J(A, Bz)^\lambda J(B, z)^\lambda}{J(AB, z)^\lambda} \qquad (A,\ B \in SL_2(\mathbb{R}))$$

とおく. Γ を $SL_2(\mathbb{R})$ の離散群で商空間 $\Gamma \backslash \mathfrak{H}$ の非ユークリッド的面積 $v(\Gamma)$ が有界なものとする. ただし $v(\Gamma) := \int_{\Gamma \backslash \mathfrak{H}} d\omega(z)$, $d\omega(z) = y^{-2} dx dy$ である. 記述の都合上 $-1_2 \in \Gamma$ とする ($-1_2 \notin \Gamma$ の場合も若干の変更で同様の議論が可能である).

V を $\mathbb{C}$ 上の d-次元ベクトル空間とし, 正定値エルミット内積 $\langle v, w \rangle$ $(v, w \in V)$ が備わっているとする. $\mathcal{U}(V)$ で V のユニタリ変換の成す群とする. $d = \dim V$ とし, $|v| = \langle v, v \rangle^{1/2}$ とおく. 例えば $V = \mathbb{C}^d$ で $\langle v, w \rangle = \sum_{j=1}^{d} v_j \overline{w_j}$ $(v = (v_j),\ w = (w_j) \in V)$.

定義 (Γ の Multiplier system). 写像 $\chi : \Gamma \longrightarrow \mathcal{U}(V)$ は以下の条件 (i), (ii) をみたすとき Γ の重さ $2k$ $(k \in \mathbb{R})$ の (unitary) multipier system と呼ばれる:

(i) $\chi(-1_2) = e^{-2\pi i k} id_V$, ただし id_V は V の恒等写像

(ii) 任意の $A,\ B \in \Gamma$ に対して $\chi(AB) = \sigma_{2k}(A, B)\chi(A)\chi(B)$.

V-値関数 $f : \mathfrak{H} \longrightarrow V$ と $A \in SL_2(\mathbb{R})$ に対して A の重さ $2k$ の保型因子付きの作用を

$$f|[A, k](z) := j_A(z)^{-1} f(Az) \qquad \Big(\text{保型因子 } j_A(z) \text{ は } j_A(z) = \exp(2ik \arg J(A, z))\Big)$$

で定義する. さて $\mathfrak{H}$ 上の V 値関数 f で条件

$$(*) \qquad f|[M, k] = \chi(M) f \qquad \forall M \in \Gamma.$$

を満たすものを考えよう. そのような V 値連続関数 f_1, f_2 に対しスカラー積

$$(f_1, f_2) := \int_{\Gamma \backslash \mathfrak{H}} \langle f_1(z), f_2(z) \rangle d\omega(z),$$

を, 右辺の積分が絶対収束するときに限り定義する. そこで $\|f\| = (f, f)^{1/2}$ とおく. $\mathcal{H}_k$ を可測な $\mathfrak{H}$ 上の V-値関数で次の (i), (ii) を満たすものの成す $\mathbb{C}$-ベクトル空間とする:

(i) $f|[M, k] = \chi(M) f, \quad \forall M \in \Gamma,$ (ii) $\|f\| < +\infty$.

このとき $\mathcal{H}_k$ は内積 (f_1, f_2) に関して Hilbert 空間を成す. 次が基本的例を与える.

Ex. $k=0, d=1$, かつ χ は Γ の自明な指標とする. このとき $\mathcal{H}_0 = L^2(\Gamma\backslash\mathfrak{H})$.

定義 (微分作用素). $\mathfrak{H}$ 上の微分作用素を次で定義する:

$$\Delta_k := y^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) - 2iky\frac{\partial}{\partial x} \qquad (z = x+iy \in \mathfrak{H})$$

この微分作用素は, $SL_2(\mathbb{R})$ の作用 $f\|[A,k]$ と可換になる. すなわち, 任意の $\mathfrak{H}$ 上の C^2-級関数 f について

$$-\Delta_k f\|[A,k] = -\Delta_k(f\|[A,k])$$

が成り立つ ([Ro] I, pp.305-306 参照). $\mathcal{H}_k$ に属する関数は C^2-級とは限らないので, 部分空間

$$\mathcal{D}_k = \{f \in \mathcal{H}_k \mid C^2 \text{ 級関数で } \|\Delta_k f\| < \infty\}$$

を導入する. $\mathcal{D}_k$ は $\mathcal{H}_k$ で稠密である. f, $f' \in \mathcal{D}_k$ ならば

$$(-\Delta_k f, f') = (f, -\Delta_k f') \qquad ([\mathrm{Ro}], \mathrm{I}, \mathrm{pp}.308\text{-}309)$$

であることが示せるので, 線形作用素 $-\Delta_k$ は $\mathcal{D}_k$ 上対称作用素である. この状況で [Ro], I, Satz3.2 により $-\Delta_k$ を延長した自己共役作用素 $-\widetilde{\Delta}_k : \widetilde{\mathcal{D}}_k \longrightarrow \mathcal{H}_k$ (定義域は $\widetilde{\mathcal{D}}_k$ と記される) が存在し唯一であることが知られている:

$$(-\widetilde{\Delta}_k f, f') = (f, -\widetilde{\Delta}_k f') \qquad (\forall f,\ f' \in \widetilde{\mathcal{D}}_k).$$

基本的で重要な問題は作用素 $-\widetilde{\Delta}_k$ のスペクトル分解を求めることである.

定義 (リゾルベント集合). $\mathbb{C}$ の部分集合 $\rho(-\widetilde{\Delta}_k)$ を $(-\widetilde{\Delta}_k - \lambda)^{-1}$ が $\mathcal{H}_k$ 上定義され $\mathcal{H}_k \longrightarrow \widetilde{\mathcal{D}}_k$ の有界線形作用素に成る $\lambda \in \mathbb{C}$ の全体として定義する. $\rho(-\widetilde{\Delta}_k)$ を $-\widetilde{\Delta}_k$ のリゾルベント集合という.

Roelcke ([Ro],II, §7) はこの有界線形作用素 $(-\widetilde{\Delta}_k - \lambda)^{-1}$ ($\lambda \in \rho(-\widetilde{\Delta}_k)$) をリゾルベント核を持つ積分作用素として以下の如く表した. まづ核関数 (グリーン関数) を定義する. $\mathbb{N}^{(k)} = \{\pm k - n \mid n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ とおき さらに各 $s \in \mathbb{C} - \mathbb{N}^{(k)}$ と $\sigma > 1$ について関数 $\mathfrak{K}_s(\sigma) : \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\} \to \mathbb{C}$ を

$$\mathfrak{K}_s(\sigma) = \sigma^{-s}\frac{\Gamma(s+k)\Gamma(s-k)}{4\pi\Gamma(2s)} \cdot F\left(s+k, s-k; 2s; \frac{1}{\sigma}\right)$$

で定義する. ただし $F(a,b;c;z)$ は超幾何級数とする. z, $w \in \mathfrak{H}$ に対し $z \not\equiv w \bmod \Gamma$ は, 任意の $M \in \Gamma$ に対し $z \neq Mw$ を表すこととする.
そこで $z \not\equiv w \bmod \Gamma$ である z, $w \in \mathfrak{H}$ について Green 核を

$$G_{k\lambda}(z,w) := \frac{1}{2}\sum_{M\in\Gamma} \chi(M) j_M(w) H(z, Mw)\mathfrak{K}_s(\sigma(z, Mw)) \tag{1}$$

で定義する. ただし $s \in \mathbb{C} - \mathbb{N}^{(k)}$, $\mathrm{Re}(s) > 1$, $\lambda = s(1-s)$ とし, さらに

$$H(z,w) = \left(\frac{w-\overline{z}}{z-\overline{w}}\right)^k$$

とおいた. (1) の右辺の無限級数は絶対収束し かつ z, w について条件 $z \not\equiv w \bmod \Gamma$ の下で局所的に一様収束する. 次がリゾルベント作用素を積分作用素として与える定理 (積分核が Green 核関数) で Roelcke による.

定理 1 (Roelcke [Ro], Elstrodt [El]) $\mathrm{Re}(s) > 1$ で $|k| - s \notin \mathbb{N}_0$ とし $\lambda = s(1-s)$ とおく. このとき $\lambda \in \rho(-\widetilde{\Delta}_k)$ であり, $f \in \mathcal{H}_k$ に対し次が成立する:

$$\left(-\widetilde{\Delta}_k - \lambda\right)^{-1} f(w) = \int_{\Gamma\backslash\mathfrak{H}} G_{k\lambda}(w,z) f(z)\, d\omega(z).$$

右辺の積分は絶対収束する. 両辺の w の関数は $\widetilde{\mathcal{D}}_k$ に含まれるのみならず w の連続関数として等しい.

自己共役作用素 $-\widetilde{\Delta}_k : \widetilde{\mathcal{D}}_k \longrightarrow \mathcal{H}_k$ の性質により, 固有値を並べかえて

$$\lambda_0,\ \lambda_1,\ \lambda_2, \ldots \qquad (\lambda_0 \le \lambda_1 \le \cdots)$$

を $-\widetilde{\Delta}_k$ の重複度込みで数えあげたすべての固有値としてよい. $-\widetilde{\Delta}_k$ は自己共役作用素なので λ_n はすべて実数となり

$$\lambda_n = \frac{1}{4} + r_n^2 \qquad \left(r_n \in i(0,\infty) \cup [0,\infty)\right)$$

と表現できる. s, $a \in \mathbb{C}$ に対し

$$S_{\Gamma,\chi}(s,a) := \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\left(s-\frac{1}{2}\right)^2 + r_n^2} - \frac{1}{\left(a-\frac{1}{2}\right)^2 + r_n^2}\right) \qquad \text{(spectral side)}$$

とおく. いま $\mathrm{Re}(a)$ を十分大に取れば s の $s \neq \frac{1}{2} \pm ir_n$ $(n \ge 0)$ をみたす範囲で右辺の無限級数は絶対収束することが知られている. 従って $S_{\Gamma,\chi}(s,a)$ は s の全平面での有理型関数になり, 極は $s = \frac{1}{2} \pm ir_n$ $(n \ge 0)$ に位置し, $r_n \neq 0$ ならば 1 位の極である ($r_n = 0$ のとき $s = 1/2$ は 2 位の極).

以下 Γ の共役類からの寄与を記述する量を順次定義する. Multiplier system (一般のウェイト) (Γ, χ) に付随する Selberg ゼータ関数は

$$Z_{\Gamma,\chi}(s) := \prod_{\{P_0\}_\Gamma,\, \mathrm{tr}P_0 > 2}\ \prod_{m=0}^{\infty} \det\left(id_V - \chi(P_0) N(P_0)^{-s-m}\right)$$

で与えられる. ここで $\{P_0\}_\Gamma$ は Γ の $\mathrm{tr}P_0 > 2$ をみたす原始的双曲元のすべての Γ-共役類をわたる. 右辺の無限積は $\mathrm{Re}(s) > 1$ で絶対収束することに注意する.

ガンマ関数 $\Gamma(z)$ の対数微分を $\psi(z)$ と記す: $\psi(z)=\Gamma'(z)/\Gamma(z)$.

次に Γ の中心（center）$\{\pm 1_2\}$ と Γ の楕円元からの寄与を定義しよう．まづ

$$C(\Gamma,\chi,s):=-(2s-1)\frac{dv(\Gamma)}{4\pi}\big(\psi(s+k)+\psi(s-k)\big)$$

とおく．Γ の楕円元 R 中心化群 $Z_\Gamma(R)$ の位数は偶数なので $2\nu(R)$ と記す．楕円元 R は回転

$$\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\qquad(0<\theta<2\pi)$$

と $SL_2(\mathbb{R})$-共役で θ は R により一意的に決まる．楕円元からの寄与を

$$E(\Gamma,\chi,s):=\sum_{\substack{\{R\}_\Gamma\\ 0<\theta<\pi}}\frac{ie^{2ik\theta}\mathrm{tr}\chi(R)}{2\nu(R)^2\sin\theta}\sum_{\ell=0}^{\nu(R)-1}\Big(e^{i\theta(2\ell+1)}\psi\Big(\frac{s+k+\ell}{\nu(R)}\Big)-e^{-i\theta(2\ell+1)}\psi\Big(\frac{s-k+\ell}{\nu(R)}\Big)\Big).$$

とおく．$\{R\}_\Gamma$ は Γ の楕円元の Γ-共役類の意味である．

$\Gamma\backslash\mathfrak{H}$ がコンパクトでない場合には放物元からの寄与も考慮する．$\zeta_1,\ldots,\zeta_\tau$ を Γ の尖点（cusp）の Γ-同値類の完全代表系とする．尖点に対応して $A_1, A_2,\ldots, A_\tau\in SL_2(\mathbb{R})$ を $T_j=A_j^{-1}\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}A_j$ と -1_2 が尖点 ζ_j の固定部分群 Γ_{ζ_j} を生成するように選ぶことが出来る．さらに各尖点 ζ_j に対応して V の正規直交基底 $\{v_{j1},\ldots,v_{jd}\}$ を

$$\chi(T_j)v_{jp}=e(\beta_{jp})v_{jp}\qquad\text{with}\qquad\begin{cases}\beta_{jp}=0 & \ldots\quad 1\le p\le m_j\\ \beta_{jp}\in(0,1) & \ldots\quad m_j<p\le d\end{cases}$$

をみたすようにとることが出来る．ここで

$$\tau^*=m_1+m_2+\cdots+m_\tau$$

とおくと，τ^* は (Γ,χ) に付随する $\mathbb{C}$ 上線形独立な実解析的 Eisenstein 級数の個数を表す（[Fi], p.33）．Γ の 放物型元の Γ-共役類からの寄与を記述する量として

$$P(\Gamma,\chi,s):=-d\tau\log 2-\log\Big(\prod_{j=1}^{\tau}\prod_{p=m_j+1}^{d}\sin\pi\beta_{jp}\Big)+$$

$$\big(\psi(s+k)-\psi(s-k)\big)\Big(\frac{d\tau}{2}-\sum_{j=1}^{\tau}\beta_j\Big)+\tau^*\big(\psi(s-k)-\psi(s)-\psi(s+1/2)\big),$$

とおく．各 j $(j=1,\ldots,\tau)$ について $\beta_j=\sum_{p=m_j+1}^{d}\beta_{jp}$ とした．最後に

(2)

$$\xi_{par,\Phi}(s):=\frac{1}{2s-1}\mathrm{tr}\big(1_{\tau^*}-\Phi(\tfrac{1}{2})\big)+\frac{2s-1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Big(\frac{1}{(s-\frac{1}{2})^2+t^2}-\frac{1}{\frac{1}{4}+t^2}\Big)\frac{\varphi'}{\varphi}\big(\tfrac{1}{2}+it\big)\,dt$$

とおく. ただし $\Phi(s)$ は τ^* 次の行列で, multiplier system (Γ,χ) に付随して与えられる τ^* 個の $\mathbb{C}$ 上線形独立な Eisenstein 級数の Fourier 展開の定数項から定義される. 定義を省略するが詳しくは [Fi] をみられたい. さらに

$$\varphi(s) = \det\Phi(s)$$

とおいた. 行列関数 $\Phi(s)$ は $\mathrm{Re}(s) > 1$ で正則であり, 全 s 平面の有理型関数に解析接続され関数等式

$$\Phi(s)\Phi(1-s) = 1_{\tau^*}$$

をみたす. $\Phi(s)$ は $\mathrm{Re}(s) = 1/2$ 上で正則である. 上記 (2) の右辺の積分は $\mathrm{Re}(s) > \frac{1}{2}$ で絶対収束する. 関数 $\xi_{par,\Phi}(s)$ は s 平面の有理型関数に解析接続され, 関数等式

$$\xi_{par,\Phi}(s) + \xi_{par,\Phi}(1-s) = \frac{\varphi'}{\varphi}(s) \qquad ([\mathrm{He}], p.440)$$

をみたすことが知られている. 以上の準備の下でリゾルベント跡公式が定式化される.

定理 2 (RTF [Fi]) $\mathrm{Re}(s), \mathrm{Re}(a) > 1$, $|k|-s, |k|-a \notin \mathbb{N}\cup\{0\}$ とする. このとき,

$$S_{\Gamma,\chi}(s,a) = \frac{1}{2s-1}\Big\{\xi(s,\Gamma,\chi) + \xi_{par,\Phi}(s)\Big\} - \frac{1}{2a-1}\Big\{\xi(a,\Gamma,\chi) + \xi_{par,\Phi}(a)\Big\},$$

が成り立つ. ただし

$$\xi(s,\Gamma,\chi) := \frac{Z'_{\Gamma,\chi}}{Z_{\Gamma,\chi}}(s) + C(\Gamma,\chi,s) + E(\Gamma,\chi,s) + P(\Gamma,\chi,s)$$

とおいた. この跡公式を通して, 関数 $(Z'_{\Gamma,\chi}/Z_{\Gamma,\chi})(s)$ および $Z_{\Gamma,\chi}(s)$ は, 全 s 平面の有理型関数に解析接続され, さらに関数 $\xi(s,\Gamma.\chi)$ は次の関数等式をみたす.

$$\xi(s,\Gamma,\chi) + \xi(1-s,\Gamma,\chi) + \frac{\varphi'}{\varphi}(s) = 0.$$

2 次元公式

リゾルベント跡公式から保型形式空間の次元公式を導こう. 設定等は第 1 節と同じとする. 各 $s\in\mathbb{C}$ に対し,

$$\mathcal{H}_k(s) = \{f\in\mathcal{D}_k \mid -\Delta_k f = s(1-s)f\}$$

とおく. $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots$ $(\lambda_0 \le \lambda_1 \le \cdots)$ を自己共役作用素 $-\widetilde{\Delta}_k : \widetilde{\mathcal{D}}_k \longrightarrow \mathcal{H}_k$ の重複度込みで数えあげた固有値とする. $-\widetilde{\Delta}_k$ は自己共役作用素なので λ_n はすべて実数であり,

$$\lambda_n = \frac{1}{4} + r_n^2 \qquad \Big(r_n \in i(0,\infty)\cup[0,\infty)\Big)$$

と表現できる. d_n を $-\widetilde{\Delta}_k$ の固有値 λ_n の重複度とする. d_n は有限値である. このとき

$$d_n = \dim \mathcal{H}_k\bigl(1/2 + ir_n\bigr)$$

である. $r_n \neq 0$ ならば, 関数 $(2s-1)S_{\Gamma,\chi}(s,a)$ の一位の極 $s = \frac{1}{2} + ir_n$ での留数は丁度 d_n になり, このとき $\frac{1}{2} + ir_n$ は Selberg ゼータ関数 $Z_{\Gamma,\chi}(s)$ の d_n 位の零点になる. $r_n = 0$ ならば, $(2s-1)S_{\Gamma,\chi}(s,a)$ の 一位の極 $s = \frac{1}{2}$ での留数は $2d_n$ である.

いま $k \geq 0$ とする. 離散群 Γ と χ に関する重さ $2k$ の正則保型形式の成す $\mathbb{C}$ 上の線形空間を $M_{2k}(\Gamma,\chi)$ と記し, その cusp 形式の成す部分空間を $S_{2k}(\Gamma,\chi)$ と記す. Roelcke [Ro], I により

$$\mathcal{H}_k(k) = \{ f \in \mathcal{H}_k \mid y^{-k} f(z) \text{ は } \mathfrak{H} \text{ 上正則} \}$$

であることが知られている. このことと f が $\Gamma\backslash\mathfrak{H}$ 上 $d\omega(z)$ について 2 乗可積分であることより, 対応 $f \to y^{-k}f(z)$ により次の $\mathbb{C}$-線形空間としての同型が成り立つ:

$$\mathcal{H}_k(k) \simeq \begin{cases} S_{2k}(\Gamma,\chi) & \ldots \quad k \geq 1/2 \\ M_{2k}(\Gamma,\chi) & \ldots \quad 0 \leq k < 1/2 \end{cases}$$

そこで

$$\mu(\Gamma,\chi,k) = i\Biggl(\sum_{\{R\}_\Gamma,\, 0<\theta<\pi} \frac{\mathrm{tr}\chi(R) \cdot e^{i(2k-1)\theta}}{2\nu(R)\sin\theta} \Biggr) + \frac{d\tau}{2} - \sum_{j=1}^{\tau} \beta_j - \tau^*$$

とおく. リゾルベント跡公式 (定理 2) より次の次元公式が得られる (例えば [Ar1] 参照) .

命題 3 (i) $k > 1$ のとき $\dim S_{2k}(\Gamma,\chi) = \mu(\Gamma,\chi,k)$.

(ii) $1/2 < k \leq 1$ のとき

$$\dim S_{2k}(\Gamma,\chi) = \mathrm{Res}_{s=k}\left(\frac{Z'_{\Gamma,\chi}}{Z_{\Gamma,\chi}}(s) \right) + \frac{dv(\Gamma)}{4\pi}(2k-1) + \mu(\Gamma,\chi,k).$$

(iii) $k = 1/2$ のとき

$$\dim S_1(\Gamma,\chi) = \frac{1}{2}\mathrm{Res}_{s=1/2}\left(\frac{Z'_{\Gamma,\chi}}{Z_{\Gamma,\chi}}(s) \right) + \frac{1}{2}\mu(\Gamma,\chi,1/2) + \frac{1}{4}\Bigl(\tau^* - \mathrm{tr}\Phi\bigl(\frac{1}{2}\bigr)\Bigr).$$

(iv) $0 \leq k < 1/2$ のとき $\dim M_{2k}(\Gamma,\chi) = \mathrm{Res}_{s=1-k}\left(\frac{Z'_{\Gamma,\chi}}{Z_{\Gamma,\chi}}(s) \right)$.

注意) $k = 1/4$ の場合は, $\dim M_{1/2}(\Gamma,\chi) = \mathrm{Res}_{s=3/4}\left(\frac{Z'_{\Gamma,\chi}}{Z_{\Gamma,\chi}}(s) \right)$ となる. $\Gamma = \Gamma_0(N)$ のときは, 原理的には, 次元 $\dim M_{1/2}(\Gamma_0(N),\chi)$ は Serre-Stark の結果 [SS] を用いて計算できる.

合同部分群 $\Gamma_0(N)$ に関する N を法とするディリクレ指標つきのウェイト 1 $(k = 1/2)$ の保型尖点形式の空間 $S_1(\Gamma_0(N),\chi)$ が数論的観点からは興味深い対象である. 跡公式から次が比較的容易に得られる.

命題 4 ([Ar1]) χ を N を法とするディリクレ指標とする．このとき

$$\dim S_1(\Gamma_0(N),\chi)=\frac{1}{2}\mathrm{Res}_{s=1/2}\left(\frac{Z'_{\Gamma_0(N),\chi}}{Z_{\Gamma_0(N),\chi}}(s)\right)=\frac{1}{2}\mathrm{Ord}_{s=1/2}(Z_{\Gamma_0(N),\chi}(s))$$

ここで $\mathrm{Ord}_{s=1/2}(Z_{\Gamma_0(N),\chi}(s))$ は $Z_{\Gamma_0(N),\chi}(s)$ の $s=1/2$ での零点の位数を表す．

χ を $\mathrm{mod} N$ の 指標で $\chi(-1)=-1$ を満たすものとする．重さ 1 の保型形式の空間 $S_1(\Gamma_0(N),\chi)$ の new form については Deligne-Serre の有名な結果がある．new form, 付随する L-関数, Artin L-関数等については [Se] 参照.

定理 5 (Deligne-Serre) f を $S_1(\Gamma_0(N),\chi)$ の *normalized new form* とする．このときガロア拡大 $L/\mathbb{Q}$ とガロア群 $Gal(L/\mathbb{Q})$ の 2 次元既約表現 $\rho: Gal(L/\mathbb{Q})\longrightarrow GL_2(\mathbb{C})$ が存在し

$$L_f(s)=L(s,\rho)$$

が成り立つ．ここで $L_f(s)$ は f に付随する *Hecke* L-関数．$L(s,\rho)$ は ρ に付随する *Artin* L-関数であり, *level* N は表現 ρ の導手に一致し, しかも $\chi=\det\rho$ となる.

Serre [Se] にあるように この定理の一つの効用は現われ得るガロア拡大 $L/\mathbb{Q}$ を限定することにより, 重さ 1 の保型形式空間の次元をある程度評価できることにある．次の予想がある（[Se], [Iw]）.

予想 奇素数 p は $p\equiv 3 \bmod 4$ を満たすとする．p を導手とする指標を $\chi_p(a)=\left(\frac{a}{p}\right)$ とし, $h(p)$ を虚 2 次体 $\mathbb{Q}(\sqrt{-p})$ の類数とする．任意の正数 $\varepsilon>0$ に対して,

$$\dim S_1(\Gamma_0(p),\chi_p)=\frac{h(p)-1}{2}+O(p^{\varepsilon}).$$

$\eta(z):=e^{\pi iz/12}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-e(nz)\right)$ を Dedekind eta 関数とする．次に $\eta^2(z)$ から決まる $SL_2(\mathbb{Z})$ の multiplier system v を考えよう:

$$\eta(Mz)^2=v(M)J(M,z)\eta(z)^2,\qquad (M\in SL_2(\mathbb{Z})).$$

$\Gamma=SL_2(\mathbb{Z})$ と書く．このとき $\Gamma^{ab}:=\Gamma/[\Gamma,\Gamma]\simeq\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ であり v^j $(j\in\mathbb{Z}, 0\le j\le 11)$ は $SL_2(\mathbb{Z})$ のすべてのユニタリ指標を与えることが知られている．multiplier system (Γ,v^j) については, 容易にわかるように, $0\le j\le 11$ ならば $\tau^*=0$ であり, $j=0$ のときには $\tau^*=1$ となる．$\omega:=v^3$ の場合が興味深い（[AB1]）．このとき $\omega(-1_2)=-1$ であることに注意する．重さ 1 の $\Gamma_0(N)$ に関する保型形式空間 $S_1(\Gamma_0(N),\omega)$ と $S_1(\Gamma_0(N),\omega)$ に関しては次が成り立つ.

定理 6 (Böcherer-Ar [AB2]) 自然数 N は平方因子をもたないとする．このとき

$$S_1(\Gamma_0(N),\omega)=\{0\}\quad \text{かつ}\quad S_1(\Gamma_0(N),\overline{\omega})=\{0\}.$$

この定理の, $\mathbb{Q}$ 上の正定値四元数環に付随して定義されるテータ級数への応用については [AB2] を参照されたい. Hashimoto [Ha] により提出された予想が解決される.

命題 4 と同様に N に平方因子がないならば

$$\dim S_1(\Gamma_0(N),\omega)=\frac{1}{2}\mathrm{Res}_{s=1/2}\left(\frac{Z'_{\Gamma_0(N),\omega}}{Z_{\Gamma_0(N),\omega}}(s)\right)=\frac{1}{2}\mathrm{Ord}_{s=1/2}\big(Z_{\Gamma_0(N),\omega}(s)\big).$$

となることが示せる. このことと定理 6 の系として, N に平方因子がないならば, 次が得られる.

$$Z_{\Gamma_0(N),\omega}(1/2)\neq 0 \quad \text{かつ} \quad Z_{\Gamma_0(N),\overline{\omega}}(1/2)\neq 0.$$

3 ある種の Selberg ゼータ関数の明示公式

ここでは数論的離散群の Selberg ゼータ関数を explicit に表示することを考えよう. $Z(s,v^j)$ ($j\in\mathbb{Z}$, $0\le j\le 11$) を $\Gamma=SL_2(\mathbb{Z})$ の multiplier system v^j 付きの Selberg ゼータ関数とする. すなわち $Z(s,v^j)=Z_{\Gamma,v^j}(s)$. 特に $j=0$ の場合を $Z(s):=Z(s,1)$ と記す. $Z(s)$ の明示公式は Hejhal ([He], p.518) により知られている.

自然数 D は, 平方数ではなく $D\equiv 0,\ 1 \bmod 4$ のときに, 正判別式と呼ばれる. 正判別式 D に対して $\mathcal{C}^{pr}(D)$ を 2×2 原始的半整数対称行列 $N=\begin{pmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c\end{pmatrix}$ で $b^2-4ac=D$ をみたす N の集合とする. N_1, $N_2\in\mathcal{C}^{pr}(D)$ が $SL_2(\mathbb{Z})$ 同値であるとは, ある $M\in SL_2(\mathbb{Z})$ に対して $N_2={}^tMN_1M$ となるときをいう. $\mathcal{C}^{pr}(D)$ の $SL_2(\mathbb{Z})$-同値類の個数は有限であり, その個数 ($\mathcal{C}^{pr}(D)$ の類数) を $h(D)$ と記す. $\mathcal{C}^{pr}(D)$ の各同値類 B から代表 $N\in\mathcal{C}^{pr}(D)$ を条件 a, $c>0$, $b>a+c$ をみたすように取れる (このとき N は簡約的という). そこで $\omega=\dfrac{b+\sqrt{D}}{2a}$ とおくと, ω は次の形の純周期的連分数展開

$$\omega=b_1-\cfrac{1}{b_2-\cfrac{1}{\ddots\, b_r-\cfrac{1}{b_1-\ddots}}}\qquad (b_j\in\mathbb{Z},\ b_1,\ldots,b_r\ge 2)$$

をもつ. これを単に $\omega=[[\,\overline{b_1,b_2,\ldots,b_r}\,]]$ と表す. 周期 r は同値類 B のみにより代表 N の取り方によらないので $r=r(B)$ と記す. 必要なら別の代表を取ることにより $b_1\ge 3$ と仮定してよい. $N^*\in\mathcal{C}^{pr}(D)$ を

$$N^*=-{}^tPNP,\qquad P=\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

により定義すると N^* も簡約的になる. B^* を N^* により代表される $\mathcal{C}^{pr}(D)$ の $SL_2(\mathbb{Z})$-同値類とする.

正判別式 D に対し $\varepsilon_D = \dfrac{\alpha+\beta\sqrt{D}}{2}$ を Pell 方程式の $\alpha,\ \beta \in \mathbb{Z}_{>0}$ をみたす最小解とする. ユニタリ指標つきの Selberg ゼータ関数 $Z(s, v^j)$ は次のように表現される. 次の表示が成立. 定理 7 の証明については [Ar2] 参照.

定理 7 $j \in \mathbb{Z},\ 0 \le j \le 11$ とし, $\zeta = e^{2\pi i/12}$ (1 の原始 12 乗根) とする. このとき

$$Z(s, v^j) = \prod_{D>0}\prod_{B}\prod_{n=0}^{\infty}\left(1-\zeta^{r(B)-r(B^*)}\varepsilon_D^{-2(s+n)}\right),$$

$$\frac{Z'}{Z}(s, v^j) = \sum_{D>0}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{B}\zeta^{n(r(B)-r(B^*))}\right)\log\varepsilon_D^2\cdot\frac{\varepsilon_D^{-2ns}}{1-\varepsilon_D^{-2n}}.$$

ただし D はすべての正判別式を, B は $\mathcal{C}^{pr}(D)$ の $SL_2(\mathbb{Z})$-同値類をわたるとする.

注意. $j=0$ のときが Hejhal [He]. p.518 にある $Z(s)$ の明示公式である:

$$Z(s) = \prod_{D>0}\prod_{n=0}^{\infty}\left(1-\varepsilon_D^{-2(s+n)}\right)^{h(D)},\quad \frac{Z'}{Z}(s) = \sum_{D>0}\sum_{n=1}^{\infty} h(D)\log\varepsilon_D^2\cdot\frac{\varepsilon_D^{-2ns}}{1-\varepsilon_D^{-2n}}.$$

最後に, 数論的離散群 Γ で $\Gamma\backslash\mathfrak{H}$ が compact なものについてその Selberg ゼータ関数の同様の明示公式を求めてみよう.

B を $\mathbb{Q}$ 上の不定符号四元数環とし $d(B)$ を $B/\mathbb{Q}$ で分岐する素数の積とする. $a \in B$ に対し $a \longmapsto \overline{a}$ を B の canonical involution とし $N(a) = a\overline{a}$ とおく. B の極大整環 $\mathcal{O}$ を一つ取り固定する. B^1 と $\mathcal{O}^1$ をノルム 1 の元から成る B および $\mathcal{O}$ の単数群とする. $\mathbb{R}$-代数 $B\bigotimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{R}$ は行列環 $M_2(\mathbb{R})$ と同型になるので, B^1 は $SL_2(\mathbb{R})$ に自然に埋め込まれ, 単数群 $\mathcal{O}^1$ は $SL_2(\mathbb{R})$ の cocompact な離散群とみなされる. 以下 $Z_B(s)$ を離散群 $\Gamma = \mathcal{O}^1$ に対する Selberg ゼータ関数 $Z_{\mathcal{O}^1}(s)$ とする. B は $\mathbb{Q}$ 上不定符号なので極大整環 $\mathcal{O}$ は $B^\times$-共役を除いて唯一に定まる. よって, $Z_B(s)$ は B のみに依存し $\mathcal{O}$ の取り方および $\mathbb{R}$-同型 $B\bigotimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{R} \simeq M_2(\mathbb{R})$ に依らない.

正判別式 D について次の条件を考える. ただし $K = \mathbb{Q}(\sqrt{D})$ とし, D_K は K の判別式とする.

(Pr-i) 任意の素数 $p \mid d(B)$ について $\left(\dfrac{K}{p}\right) \ne 1$. ここで $\left(\dfrac{K}{p}\right)$ は Artin 記号.

(Pr-ii) $(f(D), d(B)) = 1$. ただし $f(D)$ は $D = f(D)^2 D_K$ で定まる正整数を表す.

定理 8 B を $\mathbb{Q}$ 上の不定符号四元数環とする. このとき

$$\begin{aligned} Z_B(s) &= {\prod_{D>0}}^{*}\prod_{n=0}^{\infty}\left(1-\varepsilon_D^{-2(s+n)}\right)^{h(D)\lambda(D)}, \\ \frac{Z_B'}{Z_B}(s) &= {\sum_{D>0}}^{*}\sum_{m=1}^{\infty} h(D)\lambda(D)\log\varepsilon_D^2\cdot\frac{\varepsilon_D^{-2ms}}{1-\varepsilon_D^{-2m}} \end{aligned}$$

である. 上記で * は D が条件 (Pr-i), (Pr-ii) をみたす正判別式をわたることを意味する. ただし $\lambda(D) = \prod_{p|d(B)} \left(1 - \left(\frac{K}{p}\right)\right)$. である.

References

[Ar1] Arakawa, T.: Selberg zeta functions and the dimensions of the space of elliptic cusp forms of lower weights. Comment. math. Univ. St. Pauli. **39**(1990), 87-108.

[Ar2] Arakawa, T.: Selberg trace formulas for $SL_2(\mathbb{R})$ and dimension formulas with some related topics. 第 3 回整数論オータムワークショップ報告集, 2000.

[AB1] Arakawa, T and Böcherer, S.: A note on the restriction map for Jacobi forms. Abh.Math.Sem.Univ.Hamburg 69, 309-317 (1999)

[AB2] Arakawa, T and Böcherer, S.: Vanishing of certain spaces of elliptic modular forms and some application, preprint 2001.

[El] Elstrodt, J.: Die Resolvente zum Eigenwertproblem der automorphen Formen in der hyperbolischen Ebene, Teil I, Math. Ann. **203**(1973), 195-230. Teil II, Math. Z. **132**(1973),99-134. Teil III, Math. Ann. **208**(1974), 99-132.

[Fi] Fischer, J.: An approach to the Selberg trace formula via the Selberg zeta-function. Lecture Notes in Math. **1253**, Springer, 1987.

[Ha] Hashimoto, K.: Linear relations of theta series attached to Eichler orders of quaternion algebras. Contemporary Math.249, 261-302(1999)

[He] Hejhal, D.: The Selberg trace formula for $PSL(2,\mathbb{R})$. Vol. 1, 2, Lecture Notes in Math. **548**(1976) and **1001**(1983), Springer.

[Iw] Iwaniec, H.: Topics in Classical Automorphic Forms. Graduate Studies in Math. AMS 1997.

[Ro] Roelcke, W.: Das Eigenwertproblem der automorphen Formen in der hyperbolischen Ebene I, II. Math. Ann. **167**(1966), 292-337 and ibid. **168**(1967), 261-324.

[Se] Serre, J. P.: Modular forms of weight one and Galois representations, in Algebraic Number Fields (A. Fröhrich, ed.), Academic Press, 1977, pp.193-268.

[SS] Serre, J. P. and Stark, H.: Modular forms of weight 1/2. Lecture Notes in Math. Modular forms of one variable, pp.29-67.