数理解析研究所講究録 1219 巻 2001 年 68-76

量指標を持つHecke L関数の Universality theorem

見正 秀彦 (Mishou Hidehiko)
名古屋大学多元数理科学研究科 (Nagoya University)

1 Introduction

$s=\sigma+it$ を複素数、$\zeta(s)$ を Riemann ゼータ関数とする。1975年、Voronin は次の結果を得た。

Theorem(Voronin [7]). $0<r<\frac{1}{4}$ とし, $f(s)$ は $|s|\leq r$ 上連続な零点を持たない関数で $|s|<r$ 内で正則なものとする。この時、$^{\forall}\varepsilon>0$ に対し、次の不等式が成り立つ。

$$\liminf_{T\to\infty}\frac{m\left(\left\{\tau\in[0,T]\mid \max_{|s|\leq r}|\zeta(s+\frac{3}{4}+i\tau)-f(s)|<\varepsilon\right\}\right)}{T}>0$$

ここで m は $\mathbb{R}$ 上の Lebesgue 測度である。

この定理を一般に Riemann zeta 関数の Universality theorem と呼ぶ。その主張を大雑把に述べると、殆んど全ての正則関数は Riemann ゼータ関数の vertical translation によりコンパクト一様近似でき、しかも近似を与えるような実数の集合は $\mathbb{R}$ に対し正の下極限密度をもつほど大きいということである。

この後, Dirichlet-L 関数, Dedekind ゼータ関数などについても同様な結果が得られてきた。一昨年前、この研究集会で代数体におけるイデヤル類指標をもつ L 関数の Universality theorem （[4] 参照）について発表したが、今回より一般的な代数体の Hecke L 関数について Universality が得られたので, 報告したいと思います。

まず記号を次のように定義する。

$K/\mathbb{Q}$ を有限次代数拡大, $\mathfrak{f}$ を K の整イデヤルとし、

$$I_{\mathfrak{f}}=\left\{\mathfrak{a}:\text{ideals of }K\mid(\mathfrak{a},\mathfrak{f})=1\right\},$$
$$P_{\tilde{\mathfrak{f}}}=\left\{(\alpha):\text{principal ideals}\mid\alpha\in K,\ \alpha\equiv1(\text{mod }\tilde{\mathfrak{f}})\right\}.$$

と置く。$K^{(1)},\cdots,K^{(r_1)}$ を K の実共役体, $K^{(r_1+1)},\cdots,K^{(r_1+r_2)},\overline{K^{(r_1+1)}},\cdots,\overline{K^{(r_1+r_2)}}$ を K の複素共役体とし、$\alpha\in K$ に対応する K^{i} の元を $\alpha^{(i)}$ と表すことにする。

K の量指標（Hecke 指標）を次のように定義する。

Definition 1. a_p, v_q は条件

$$\begin{cases} a_p = 0, 1 & 1 \le p \le r_1 \\ a_p \in \mathbb{Z} & r_1 + 1 \le p \le r_1 + r_2 \\ v_q \in \mathbb{R} & 1 \le q \le r_1 + r_2 \quad s.\ t.\ \sum_q v_q = 0\ . \end{cases}$$

を満たす数とする。χ がイデヤル群 $I_{\mathfrak{f}}$ 上の指標で、$\mathfrak{a} = (\alpha) \in P_{\tilde{\mathfrak{f}}}$, $\alpha \equiv 1(mod\ \tilde{\mathfrak{f}})$ に対し,

$$\chi(\mathfrak{a}) = \chi_\infty(\alpha) = \prod_{q=1}^{r_1+r_2} \left|\alpha^{(q)}\right|^{iv_q} \prod_{p=1}^{r_1+r_2} \left(\frac{\alpha^{(p)}}{|\alpha^{(p)}|}\right)^{a_p}. \tag{1}$$

と表されるとき、χ を $\tilde{\mathfrak{f}}$ を法とする量指標と呼ぶ。

量指標 χ に対し, $\Re s > 1$ 上 $L(s, \chi)$ を

$$L(s, \chi) = \sum_{\mathfrak{a}} \frac{\chi(\mathfrak{a})}{N\mathfrak{a}^s}$$

と定義する。ここで $\mathfrak{a}$ は K の 0 でない整イデヤルを動き、$N\mathfrak{a}$ は $\mathfrak{a}$ のノルムである。

今回得た結果が次である。

Theorem 1. $K/\mathbb{Q}$ を有限次代数拡大, χ を K 上の量指標とする。
$[K:\mathbb{Q}] = n$ に対し、

$$\sigma_K = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{if } K = \mathbb{Q}, \\ 1 - \frac{1}{n} & \text{otherwise}. \end{cases}$$

とおく。C を *strip* $\sigma_K < \sigma < 1$ 内の *compact* 集合で連結な補集合を持つものとし、$f(s)$ は C 上連続な零点を持たない関数で C の内部で正則なものとする。 このとき、$^\forall\varepsilon > 0$ に対し, 次の不等式が成り立つ。

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{1}{T} m\Big(\big\{\tau \in [0, T] \mid \max_{s\in C} |L(s + i\tau, \chi) - f(s)| < \varepsilon\big\}\Big) > 0.$$

Universality theorem の証明には,Voronin の原証明に従った方法と Bagchi による確率論的な手法を用いる方法との 2 通りが知られている。今回は Bagchi の方法に従ったが, Voronin の方法でも証明は可能である。実際両者の方法は全く異なるが, 必要とする条件, 補題は共通なものが多い。

次の propsition はどちらの証明においても本質的に重要な役割を果たす。

Proposition 1. χ $(mod\,\tilde{\mathfrak{f}})$ を K 上の量指標とする。素数 p の K における分解を

$$p = \prod_{i=1}^{z_p} \mathfrak{p}_i^{x_i}, \quad N\mathfrak{p}_i = p^{y_i}$$

と表したとき, 指標和 α_p を

$$\alpha_p = \sum_{\substack{i=1 \\ y_i=1}}^{z_p} \chi(\mathfrak{p}_i)$$

と定める。このとき $^{\forall}\varepsilon > 0$ に対し、素数に関する条件 $(*)$ で次を満たすようなものが存在する。

1. $(*)$ を満たす素数 p に対し、

$$|\alpha_p| \geq n - \varepsilon \quad (n = [K : \mathbb{Q}])$$

2. $(*)$ を満たす x 以下の素数の個数は

$$C_{\chi,\varepsilon} \int_2^T \frac{dt}{\log t} + O\big(x \exp(-c\sqrt{\log x})\big).$$

ここで $C_{\chi,\varepsilon} > 0$ は χ, ε のみによる。

Remark 1. 昨年の講演時は,Theorem 1, Proposition 1 において,$K/\mathbb{Q}$ が *Galois* 拡大であるという制限がついていたが、その後岡崎龍太郎先生のアイデアにより簡単に外せることが示された。詳細についてはプレプリント *[5]* を参照されたい。

2 証明の Outline

まず幾つか記号を定義する。$D = \{s \in \mathbb{C} \mid \frac{1}{2} < \sigma < 1\}, H(D) = \{f(s) : D \to \mathbb{C} \mid \text{holomorphic on } D\}$ と置く。$H(D)$ に compacta 一様収束な位相を入れる。このとき $B(H(D))$ を $H(D)$ のボレル集合族とする。$T > 0$ に対し、

$$P_T(A) = \frac{1}{T} m\left(\{\tau \in [0,T] \mid L(s+i\tau,\chi) \in A\}\right) \quad A \in \mathcal{B}\big(H(D)\big).$$

と置く。すると $L(s+i\tau,\chi)$ は $\mathbb{R}$ 上の $H(D)$-値確率変数とみなせるので、P_T は $(H(D), B(H(D)))$ 上の確率測度を与えている。一方, $L(s,\chi)$ の Euler 積表示

$$L(s,\chi) = \prod_{\mathfrak{p}} \left(1 - \frac{\chi(\mathfrak{p})}{N(\mathfrak{p})}\right)^{-1} \quad (\sigma > 1).$$

について これに素数の K における分解 $p=\prod_i \mathfrak{p}_i^{x_i}$ を代入して書き換えたものを

$$L(s,\chi)=\prod_p\left(\prod_{i=1}^{z_p}\left(1-\frac{\chi(\mathfrak{p}_i)}{p^{y_i s}}\right)^{-1}\right)=\prod_p f_p\left(\frac{1}{p^s}\right)$$

と表す。さて、$\gamma=\{z\in\mathbb{C}\mid |z|=1\}, \Omega=\prod_p\gamma_p,\ \gamma_p=\gamma$ と置き、$\omega=(\omega_p)_p\in\Omega$ に対し、

$$L(s,\chi,\omega)=\prod_p f_p\left(\frac{\omega_p}{p^s}\right)$$

と定めると、これは殆んど全ての $\omega\in\Omega$ に対し D 上一様収束し、従って Ω 上の $H(D)$-値確率変数を定める。そこで $(H(D),B(H(D)))$ 上の確率測度

$$P_L(A)=m_H\left(\{\omega\in\Omega\mid L(s,\chi,\omega)\in A\}\right)\quad A\in\mathcal{B}(H(D))$$

が定義出来る。ここで m_H は $(\Omega,B(\Omega))$ 上の確率 Haar 測度である。universality の研究において、次の 2 つの lemma は基本的である。

Lemma 1 (limit theorem). $T\to\infty$ としたとき、$(H(D),B(H(D)))$ 上の確率測度 P_T は P_L に弱収束する。

Lemma 2 (denseness lemma). p : 素数, $a_p\in\gamma$ に対し

$$g_p(s,a_p)=-\log f_p\left(\frac{a_p}{p^s}\right)$$

と定義する。しからばこの時, 集合

$$\left\{\sum_p g_p(s,a_p)\mid a_p\in\gamma,\quad H(D)\text{ 内で収束}\right\}$$

は $H(D)$ で *dense* である。

この 2 つの lemma から universality は容易に証明出来る。実際, 定理の仮定を満たす $f(s)$ に対し, $G=\{g(s)\in H(D)\mid \max_{s\in C}|f(s)-g(s)|<\varepsilon\}$ と置いたとき、G は開集合だから Lemma 1 より、

$$\liminf_{T\to\infty}P_T(G)\ge P_L(G)$$

一方 Lemma 2 から G は確率測度 P_L の support に含まれるので,

$$P_L(G)>0$$

従ってこの2つの不等式から定理の主張が得られる。

それではこの2つの lemma がどのようにして得られるのか見てみよう。Lemma 1(limit theorem) はあるタイプの素数についてのオイラー表示を持つ L 関数 (Matsumoto zeta 関数) で、D 上適当な2乗平均評価を満たすようなものについて一般に成り立つ ([3] 参照)。その証明のポイントとなるのは, 集合 $\{\log p \mid p : \text{primes}\}$ の $\mathbb{Q}$ 上一次独立性, 即ち整数の素因数分解の一意性である。

余談だが α:超越数ならば,Hurwitz zeta 関数 $\zeta(s,\alpha)$ に対しても universality が成り立つ ([2] 参照)。その証明は Riemann zeta の場合とほぼ同様で, 証明のポイントとなるのが集合 $\{\log(n+\alpha) \mid n \geq 0\}$ の $\mathbb{Q}$ 上一次独立性である。

次に Lemma 2 (denseness lemma) について。$g_p(s,a_p) = -\log f_p\left(\frac{\alpha_p}{p^s}\right)$ を Taylar 展開してみると

$$g_p(s,a_p) = a_p\frac{\alpha_p}{p^s} + h_p(s,a_p), \quad \sum_p \max_{s\in C}\left|h(s,a_p)\right| < \infty$$

ここで α_p は Definition 1 で定義した指標和である。この不等式から $g_p(s,a_p)$ の代わりに $a_p\frac{\alpha_p}{p^s}$ に対し, Lemma 2 の主張が成り立てば十分であることが分かる。そこで Bagchi のより一般的な結果 ([1] 参照) を用いると次が成り立てば良いことが分かる。

Lemma 3. *μ を $(\mathbb{C}, B(\mathbb{C}))$ 上の複素 Borel 測度で D 内に commpact support を持ち,*

$$\sum_p\left|\int_{\mathbb{C}}\frac{\alpha_p}{p^s}d\mu\right| < \infty$$

が成り立つものとする。このとき

$$\int_{\mathbb{C}} s^r d\mu(s) = 0 \quad \textit{for all } r \geq 0$$

さて、Riemann zeta 関数の場合,$\frac{\alpha_p}{p^s}$ に相当するものは $\frac{1}{p^s}$ であり、$\alpha_p = 1$ であると見なせる。この場合は素数定理と $H(D)$ の Hilbert 空間としての性質とから Lemma 3 が示される。$\frac{\alpha_p}{p^s}$ に対し同様の証明を試みるには,$|\alpha_p|$ が一定値以上となるような p が素数全体に対し一定以上の密度で存在することが言えれば良い。以上のような議論から Proposition 1 から Lemma 3, 従って Lemma 2 が導かれる。

それでは最後に Proposition 1 の証明のアイデアを述べよう。

3 Proposition 1 の証明

$U(\tilde{\mathfrak{f}})$ を $\tilde{\mathfrak{f}}$ を法とする単数群, $\eta_1, \cdots, \eta_r$ $(r = r_1 + r_2 - 1)$ をその基本単数とする。量指標の定義 (1) において、これがイデヤル群の指標を与えるためには, $\chi_\infty(\eta_i)$ $(i = 1, \cdots, r)$ が成り立たねばならない。このとき v_q は次の形で表される。

$$v_q = \sum_{j=1}^{r} E_q^{(j)} \Big(2\pi m_j - \sum_{p=r_1+1}^{r_1+r_2} a_p \Theta_j^{(p)} \Big) \quad (q = 1, \cdots, r_1 + r_2).$$

ここで $E_q^{(j)}, \Theta_j^{(p)}$ は $\eta_1, \cdots, \eta_r$ から決まり、m_q は任意の整数である。 この $E_q^{(j)}, \Theta_j^{(p)}$ を用いて、$\alpha \in K$ に対し、

$$W_q(\alpha) = \sum_{p=1}^{r_1+r_2} E_p^{(q)} \log \left| \alpha^{(p)} \right| \qquad (q = 1, \cdots, r)$$

$$\Theta_p(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \Big\{ \arg \alpha^{(p)} - \sum_{j=1}^{r} \Theta_j^{(p)} W_j(\alpha) \Big\} \quad (p = r_1 + 1, \cdots, r_1 + r_2),$$

と定義する。さて, $\omega \in K$ について, 単項イデヤル (ω) が素イデヤルとなるとき ω を K の素イデヤル数と呼ぶことにする。以上のような記号の下で, 次のような素数定理型の結果が成り立つ。

Lemma 4 (三井 [6]). $x > 0$, $\mathfrak{f}$ を $N\mathfrak{f} \le (\log x)^A$ $(A > 0)$ を満たす K の整イデヤルとする。$\{\alpha_q\}, \{\alpha'_q\}, \{\beta_p\}, \{\beta'_p\}$ は

$$\begin{aligned} &0 < \alpha_q - \alpha'_q \le 1 \qquad (q = 1, \cdots, r), \\ &0 < \beta_p - \beta'_p \le 1 \qquad (p = r_1 + 1, \cdots, r_1 + r_2). \end{aligned}$$

を満たしているとする。今 $U(\tilde{\mathfrak{f}})$ の基本単数 $\eta_1, \cdots, \eta_r$ に対し, W_q ,Θ_p を定義する。このとき条件

$$\begin{cases} \omega \equiv 1 \ (mod\ \tilde{\mathfrak{f}}), \quad |N\omega| \le x, \\ \alpha'_q \le W_q(\omega) < \alpha_q \quad (q = 1, \cdots, r), \\ \beta'_p \le \Theta_p(\omega) < \beta_p \quad (p = r_1 + 1, \cdots, r_1 + r_2). \end{cases}$$

を満たす素イデヤル数 ω の個数を $\pi(x, \alpha_q, \alpha'_q, \beta_p, \beta'_p)$ と表すと,

$$\begin{aligned} &\pi(x, \alpha_q, \alpha'_q, \beta_p, \beta'_p) \\ &\quad = \prod_{q=1}^{r} (\alpha_q - \alpha'_q) \prod_{p=r_1+1}^{r_1+r_2} (\beta_p - \beta'_p) \frac{w(\tilde{\mathfrak{f}})}{h(\tilde{\mathfrak{f}})} \int_2^x \frac{dt}{\log t} + O\left(x e^{-c\sqrt{\log x}} \right) \end{aligned}$$

ここで $h(\tilde{\mathfrak{f}})$ は $\tilde{\mathfrak{f}}$ を法とする K の類数, $w(\tilde{\mathfrak{f}})$ は $U(\tilde{\mathfrak{f}})$ に含まれる 1 の根の個数である。また *O-constant* は A のみによる。

さてそれでは, この Lemma 4 を用いて Proposition 1 を証明する。$K/\mathbb{Q}$ について3つの場合に分けて考える。

まず $K/\mathbb{Q}$: 総実な Galois 拡大の場合を考える。今, $N\mathfrak{f}=f$, $\mathfrak{f}'=(f)$, $G=Gal(K/\mathbb{Q})$ とおく。素数 p はその素因子の一つ $\mathfrak{p}_1$ が1次で、$\mathfrak{p}_1=(\omega)\in P_{\tilde{\mathfrak{f}}'}$, $\omega\equiv 1(\mathrm{mod}\ \tilde{\mathfrak{f}}')$ を満たすとする。このとき p の他の素因子は全て $\mathfrak{p}_1$ の共役イデヤルで、$\mathfrak{p}_i=(\omega^\sigma)$ $(\sigma\in G)$ となるが、$\mathfrak{f}'=(f)$ の定義から $\mathfrak{p}_i$ も又 $P_{\tilde{\mathfrak{f}}'}$ に属すことに注意する。従ってこのような p に対しては (1) より

$$
\begin{aligned}
|\alpha_p| &= \left|\sum_{i=1}^{n}\chi(\mathfrak{p}_i)\right| = \left|\sum_{\sigma\in G}\chi_\infty(\sigma(\omega))\right| \\
&= \left|1+\sum_{\sigma\neq 1}\exp\Bigl(i\sum_{q=1}^{n}\bigl(v_{\sigma(q)}-v_q\bigr)\log|\omega^{(q)}|\Bigr)\right|
\end{aligned}
$$

この右辺に注目すると, $|\alpha_p|$ が十分 n に近づくためには, 十分小さい $\delta>0$ に対し、

$$
\left|\sum_{q=1}^{n}\bigl(v_{\sigma(q)}-v_q\bigr)\log|\omega^{(q)}|\right|\le\delta \quad \text{for } \sigma\neq 1
$$

が成り立っていれば良い。 ところが $W_q(\omega)$ の定義と $\{E_p^{(q)}\}$ の性質、特に $\sum_p E_p^{(q)}=0$ と行列 $\{E_p^{(q)}\}_{1\le p,q\le r}$ の正則性から, 十分小さい $C_q>0$ を取れば,ω が

$$
0\le W_q(\omega)<C_q \quad (q=1,\cdots,n-1)
$$

を満たすなら上の不等式も又成り立つことが分かる。従って K で完全分解する素数 p で, その素因子の一つ $\mathfrak{p}_1$ が条件

$$
(*1)\ \begin{cases} \mathfrak{p}_1=(\omega),\ \omega\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ \tilde{\mathfrak{f}}') \\ 0\le W_q(\omega)<C_q \quad (q=1,\cdots,n-1)\end{cases}
$$

を満たしているものに対し、, $|\alpha_p|\ge n-\varepsilon$ が成り立つ。又 (*1) を満たすような素イデヤルの個数も Lemma 4 から求めることができ、従ってこのような素数は一定以上の密度で存在することが分かる。

それでは次に $K/\mathbb{Q}$: 総虚な Galois 拡大の場合を考える。前の場合と同じく、イデヤル $\tilde{\mathfrak{f}}'$ をとり、p は1次の素イデヤル $\mathfrak{p}_1$ で, $\mathfrak{p}_1=(\omega)$, $\omega\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ \tilde{\mathfrak{f}}')$ となるものを持つとする。このような p に対しては、

$$
\begin{aligned}
|\alpha_p| = \Bigl| & 2\cos\Bigl(\sum_{p=1}^{r_2}a_p\arg\omega^{(p)}\Bigr) \\
& +\sum_{\sigma\neq 1}2\cos\Bigl(\sum_{p=1}^{r_2}a_{\sigma(p)}\arg\omega^{(p)}\Bigr)\exp\Bigl(i\sum_{q=1}^{r_2}(v_{\sigma(q)}-v_q)\log|\omega_q|\Bigr)\Bigr|
\end{aligned}
$$

ただし、$G' = G/ < -1 >$。この右辺に注目すると $|\alpha_p|$ が十分 n に近づく為には, 十分小さい $\delta, \delta' > 0$ に対し,

$$\left|\sum_{q=1}^{r_2} \left(v_{\sigma(q)} - v_q\right) \log|\omega^{(q)}|\right| \le \delta \quad (\sigma \in G',\ \sigma \neq 1)$$
$$\left|\arg \omega^{(p)}\right| < \delta' \quad (p = 1, \cdots, r_2)$$

が成り立っていれば良いことが分かる。ところが K が総実な場合と同様に, $W_q(\omega), \Theta_p(\omega)$ の定義から, 十分小さい $C_q, B_p > 0$ を選べば, ω が条件

$$(*2) \begin{cases} 0 \le W_q(\omega) < C_q^{(2)} & (q = 1, \cdots, r_2 - 1), \\ 0 \le \Theta_p(\omega) < b_p & (p = 1, \cdots, r_2) \end{cases}$$

を満たしているなら, これらの不等式も成り立つ。従って, K が総実な Galois 拡大である場合と同様の議論により、K が総虚な Galois 拡大である場合についても Proposition 1 が示せる。

それでは最後に一般の場合を考えよう。L を K の Galois 閉体, $[L : \mathbb{Q}] = N$, R_1, R_2 をそれぞれ L の実共役, 複素共役の数とし、$\mathfrak{f}'_L$ は f により生成される L の単項イデヤルとする。$\varepsilon > 0$ を十分小さい数とし、素数 p は条件

$$(*3) \begin{cases} p = \mathfrak{P}_1 \cdots \mathfrak{P}_N : L \text{ で完全分解} \\ \mathfrak{P}_1 = (\Omega)_L,\ \Omega \equiv 1 (\mathrm{mod}\ \tilde{\mathfrak{f}}_L) \\ 1 - \varepsilon < \frac{|\Omega^{(q)}|}{\sqrt[N]{p}} < 1 + \varepsilon & (q = 1, \cdots, R_1 + R_2) \\ -\varepsilon < \arg \Omega^{(p)} < \varepsilon & (p = R_1 + 1, \cdots, R_1 + R_2) \end{cases}$$

を満たしていると仮定する。このとき p の K における分解は

$$\begin{cases} p = \mathfrak{p}_1 \cdots \mathfrak{p}_n : K \text{ で完全分解} \\ \mathfrak{p}_i = (\omega_i),\ \omega_i \equiv 1 (\mathrm{mod}\ \tilde{\mathfrak{f}}') \\ 1 - \varepsilon < \frac{|\omega_i^{(q)}|}{\sqrt[n]{p}} < 1 + \varepsilon & (i = 1, \cdots, n,\ q = 1, \cdots, r_1 + r_2) \\ -\varepsilon < \arg \omega_i^{(p)} < \varepsilon & (i = 1, \cdots, n,\ p = r_1 + 1, \cdots, r_1 + r_2) \end{cases}$$

となる。このとき $|\alpha_p|$ が十分 n に近づくことは計算により明らかである。条件 $(*3)$ は結局 $(*1)$, 又は $(*2)$ に帰着することができ、従って一般の場合でも Proposition 1 が証明できる。

References

[1] B.Bagchi, *The statistical behavior and universality properties of the Rieman zeta-function and other allied Dirichlet series*, Ph. D. Thesis, Calcutta, Indian Stastical Institute, (1981).

[2] S.M.Gonek, *Analytic properties of zeta and L-functions*, Ph. D. Thesis. University of Michigan, (1979).

[3] A.Laurinčikas, *On limit distribution of the Matsumoto zeta-function*, Lithuanian Math. J. 36(1996), 371-387.

[4] H.Mishou, *The universality theorem for L-functions associated with ideal class characters*, Acta Arith., to appear.

[5] H.Mishou, *The universality theorem for Hecke L-functions*, preprint

[6] T.Mitsui, *Generalized prime number theorem*, Japanese J. Math., 26(1956), 1-42.

[7] S.M.Voronin, *Theorem on the "universality " of the Riemann zeta-function*, Math. USSR-Izv. 9(1975), 475-486.