数理解析研究所講究録 1220 巻 2001 年 1-6

特異無限型の超越整関数の力学系について $abz+\exp(bz)+c$ の力学系

谷口 雅彦 京都大学大学院理学研究科
諸澤 俊介 高知大学理学部

1 関数族 $abz+\exp(bz)+c$

f を超越整関数とする。反復合成による族 $\{f^n\}$ が正規族となる最大の開集合を f のファトウ集合と呼び、$F(f)$ で表す。その補集合をジュリア集合と呼び、$J(f)$ で表す。$z\in\mathbb{C}$ のある近傍で f^{-1} のすべての分枝が 1 価にとれるとき、z を非特異値といい、そうでないとき、特異値という。f の特異値の集合を $\mathrm{sing}(f^{-1})$ で表す。特異値は複素力学系の研究において重要な役割を果たす。

$F(f)$ の成分 D で $f(D)\subset D$ となるものを不変成分と呼ぶ。不変成分は吸引成分、放物型成分、ジーゲル円板、ベーカー領域のいずれかである。ここでベーカー領域とは $\{f^n\}$ の極限関数が ∞ となるものである。

次の関数の族

$$f(z;\ a,\ b,\ c)=abz+e^{bz}+c$$

の研究は谷口 [8] によって始められた。$f(z)=f(z;\ a,\ b,\ c)$ の特異値の集合は

$$\mathrm{sing}(f^{-1})=\{(\mathrm{Log}\ a+(2k+1)\pi i)\,/b\mid k\in\mathbb{Z}\}$$

である。したがって f は特異無限型である。特に断らない限りは本稿では a、b、c は実数で $a>0$、$b>0$ とする。

命題 1 $ab\geq 1$、$a>0$、$c\leq -1$ とし、さらに

$$a\log a-a+c<0$$

を満たすとする。このとき f は完全不変となるベーカー領域 B を持つ。

さらに

$$F(f)=B$$

証明　$D_0 = \{z \mid \mathrm{Re}\, z < 0\}$ とする。$z \in D_0$ に対して

$$\mathrm{Re}\, f(z) = ab\mathrm{Re}\, z + \mathrm{Re}\, e^{bz} + c < ab\mathrm{Re}\, z + 1 + c < ab\mathrm{Re}\, z$$

となるので、$f(D_0) \subset D_0$ であり、D_0 を含む $F(f)$ の成分はベーカー領域である。
次に $k \in \mathbb{Z}$ に対して直線

$$L_k = \{z = x + iy \mid y = (2k+1)\pi/b\}$$

を考える。条件を用いると、$z \in L_k$ に対して

$$\mathrm{Re}\, f(z) = abx + e^{bx} + c < 0$$

となる。すなわち $f(L_k) \subset D_0$ である。D_0 の逆像は D_0 またはある L_k を含む。ところが L_k と D_0 は交わるので B は完全不変である。
B が $F(f)$ のただ一つの成分であることはヒンカネン、クラウスコフ、クリーテの補題 [2]（本質的にはベルグワイラー [1]）によって示すことができる。その方法に従って、この場合の証明をする。
ζ_0 を B 以外の $F(f)$ の点とし、$\zeta_n = f^n(\zeta)$ とおき

$$\delta_n = \mathrm{dist}(\zeta_n,\ \partial B)$$

とする。ここで dist はユークリッド距離を表すとする。B は L_k を含むので、ある正数 C で $\delta_n < C$ がすべての $n \in \mathbb{N}$ に対して成り立つものがとれる。すべての特異値は B に含まれ、B 内の点は有限回の反復合成で D_0 に入り、さらに反復合成のもとで無限大に近付いていく。したがって、ある正数 σ で、任意の $z \notin B$ に対して

$$\mathrm{dist}(z,\ \overline{\textstyle\bigcup_{w \in \mathrm{sing}(f^{-1})} \bigcup_{n=0}^{\infty} f^n(w)}) > \sigma$$

となるものがとれる。中心 z 半径 r の開円板を $B(z,\ r)$ と書くことにする。$B(\zeta_n,\ \sigma + \delta_n)$ 上で $(f^n)^{-1}$ の分枝 φ_n で $\varphi_n(\zeta_n) = \zeta_0$ を満たすものがとれる。さらに ξ_n で次を満たすものが存在する。

$$\xi_n \in J(f) \qquad \mathrm{dist}(\xi_n,\ \zeta_n) = \delta_n \qquad \varphi_n(\xi_n) \in J(f)$$

ここで $c_j = \varphi_n(\xi_n)$ とする。ケーベの歪曲定理により

$$|c_j - \zeta_0| \leq \left(1 + 2\frac{C}{\sigma}\right)^2 \mathrm{dist}(\zeta_0,\ \partial B)$$

を得る。すなわち $\{c_j\}$ は有界なので適当な部分列で $c_{j(i)} \to c \in \partial B$ $(i \to \infty)$ とする。さらにネヴァンリンナの歪曲定理により

$$|\varphi'_{j(i)}(\xi_{j(i)})| \geq \frac{\mathrm{dist}(\zeta_0,\ \partial B)}{C} \frac{\sigma}{\sigma + 2C}$$

を得る。ケーベの 1/4 定理を用いると

$$\begin{aligned}\varphi_{j(i)}(D(\zeta_{j(i)},\ \sigma+\delta_{j(i)})) &\supset \varphi_{j(i)}(D(xi_{j(i)},\ \sigma)) \\ &\supset D\left(c_{j(i)},\ \frac{1}{4}|\varphi'_{j(i)}(\xi_{j(i)})|\sigma\right) \\ &\supset D\left(c_{j(i)},\ \frac{1}{4}\frac{\sigma^2}{C(\sigma+2C)}\mathrm{dist}(\zeta_0,\ \partial B)\right)\end{aligned}$$

したがって、適当な $\delta >$ に対して

$$\varphi_{j(i)}(D(\zeta_{j(i)},\ \sigma+\delta_{j(i)})) \supset D(c,\ \delta)$$

が十分大なるすべての i に対して成立する。これは $D(c,\ \delta)$ 上で $f^{j(i)}$ が単葉であることを示している。一方 $D(c,\ \delta)\cap J(f)\ni c$ であるから、任意のコンパクト集合 $K\subset\mathbb{C}$ に対して、ある N で 任意の $n\geq N$ について

$$f^n(D(c,\ \delta))\supset K$$

が存在する（例えば [7] 参照)。これは矛盾である。 ■

B を f のベーカー領域とする。領域 $V\subset B$ が B の基本集合であるとは、V が単連結であり、$f(V)\subset V$ となり、任意のコンパクト集合 $K\subset B$ に対して、ある n で $f^n(K)\subset V$ となるときをいう。

証明の中の D_0 は基本集合である。

2 ハウスドルフ収束とカラテオドリ収束

ジュリア集合とファトウ集合の収束について考える。ジュリア集合の収束、すなわち閉集合の収束は次のように定義する。ρ を弦距離とする。$\widehat{\mathbb{C}}$ のふたつのコンパクト集合 A と B の間のハウスドルフ距離 $d(A,\ B)$ は次で定義される。

$$d(A,\ B)=\inf\{\epsilon>0\mid A\subset U_\epsilon(B),\ B\subset U_\epsilon(A)\}$$

ここで $U_\epsilon(\cdot)$ は弦距離に関する ϵ 近傍を表す。この距離に関する閉集合列の収束をハウスドルフ収束と呼ぶ。一般に関数列が広義一様に収束したとしても、それは必ずしもジュリア集合列のハウスドルフ収束を意味しないことに注意する。しかし、反発周期点の集合がジュリア集合の中に稠密に存在することから次が示される。

命題 2 関数列 $\{f_n\}$ が f に広義一様収束するならば、任意の $\epsilon >$ に対して、ある N ですべての $n\geq N$ について

$$J(f)\subset U_\epsilon(J(f_n))$$

となるものがとれる。

これはジュリア集合のハウスドルフ収束が下半連続であることを示している。

ファトウ集合列の収束、すなわち開集合列の開集合への収束も定義できる。$\widehat{\mathbb{C}}$ の開集合列 U_n が開集合 U にカラテオドリー収束するとは次のふたつを満たすときをいう。

(1) U 内の任意のコンパクト集合 K に対して、ある N が存在し、任意の $n > N$ に対して $K \subset U_n$ となる。

(2) O が無限個の U_n に含まれる開集合ならば、$O \subset U$ である。

ハウスドルフ収束とカラテオドリ収束はそれぞれ互いの補集合の収束をいっている。したがって特に次がいえる。

命題 3 ジュリア集合がハウスドルフ収束する必要十分条件はファトウ集合がカラテオドリー収束することである。

また、命題 2 は次のように言い換えられる。

補題 4 $\{f_n\}$ が f に局所一様収束するとする。ある開集合 U が無限個の n に対して $U \subset F(f_n)$ となるならば $U \subset F(f)$ である。

関数族 $\{f(z;\ a,\ b,\ c)\}$ のジュリア集合における収束を考えていく。

定理 5 $b > 0$ と $c < -3$ を $1 - bc + \log b > 0$ を満たすものとして固定する。$ab < 1$ とする。このとき $f_a(z) = f(z;\ a,\ b,\ c)$ のジュリア集合は $f(z) = z + e^{bz} + c$ のジュリア集合に $ab \nearrow 1$ とした時にハウスドルフ収束する。

証明 仮定 $1 - bc + \log b > 0$ より $F(f)$ がただ一つのベーカー領域からなることが命題 1 の証明と同様にして判る。

$ab < 1$ の時、f_a は負の実軸上に吸引不動点を持つ。それを $-r_a$ $(r_a > 0)$ とする。$ab \nearrow 1$ としたときに $r_a \to \infty$ となる。

$$D_a = \{z \mid |z + r_a| < r_a\}$$

とおくと、$z \in D_a$ に対して

$$|f_a(z) + r_a| < abr_a + 2 < r_a + c + 3 < r_a$$

となる。すなわち $f_a(D_a) \subset D_a$ となる。D_a は単調に増加してカラテオドリーの意味で $D_0 = \{z \mid \mathrm{Re}\, z < 0\}$ に収束する。吸引不動点 $-r_a$ の鉢 B_a がカラテオドリーの意味で $F(f)$ に収束することを示すためには、$F(f)$ の任意のコンパクト集合 E に対して、ある $A > 0$ ですべての $a > A$ で $ab < 1$ となるものについて $E \subset B_a$ となるものが取れることを示せば良い。

D_0 はベーカー領域の基本集合であるから $f^n(E) \subset D_0$ となる n が存在する。$\{f_a\}$ は f に広義一様収束するので、適当な A に対してすべての $a > A$ について

$f^n(E) \subset D_a$ となる。したがって $\{B_a^c\}$ はハウスドルフ収束の意味で $F(f)^c = J(f)$ に収束する。$J(f)$ は内点を持たないので $\{J(f_a)\}$ はハウスドルフ収束の意味で $J(f)$ に収束する。 ■

$f(z) = z + e^z$ のファトウ集合は無限弧のベーカー領域を含んでいてそれらはそれぞれ

$$S_m = \{z \mid |\mathrm{Im}\ z - (2m-1)\pi| < \pi\} \qquad m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$$

に含まれている。ベーカー領域内の各点の軌道は、その実部が $-\infty$ に収束する。

定理 6 $f_c(z) = z + e^z + c$ で $c < 0$ とすると $F(f_c)$ はただひとつのベーカー領域からなる。さらに $\{J(f_c)\}$ は $c \nearrow 0$ とした時にハウスドルフ収束の意味で $J(z+e^z)$ に収束する。

証明 B_m を S_m に含まれるベーカー領域とする。$0 \leq \alpha < \pi/2$ とし、$z = x + i\{(2m-1)\pi \pm (\alpha + \pi/2)\}$ とすると

$$\mathrm{Re}\ \ f(z) = x + e^x \sin\alpha > x$$

となる。$0 \leq \alpha < \pi/2$ に対して $z = x + i\{(2m-1)\pi \pm \alpha\}$ とし、$x < 0$ とすれば

$$\mathrm{Im}\ \ f(z) = (2m-1)\pi \pm \alpha \mp e^x \sin\alpha$$

を得るので

$$(2m-1)\pi - \alpha < \mathrm{Im}\ \ f(z) < (2m-1)\pi + \alpha$$

となる。したがって $z \in B_m$ に対して、ある N が存在して $n > N$ について

$$|\mathrm{Im}\ \ f^n(z) - (2m-1)\pi| < \frac{\pi}{2}$$

となる。

$$K_m = \left\{|\mathrm{Im}\ \ z - (2m-1)\pi| < \frac{\pi}{2},\ \mathrm{Re}\ \ z < 0\right\}$$

とおくと K_m が B_m の基本集合であることが判る。

$c > -1$ として考える。$D_0 = \{\mathrm{Re}\, z < \log(-c)\}$ とすると、これは f_c のベーカー領域の基本集合である。$f_c(z) = f(z) + c$ であるから

$$D_0 \bigcup \left(\bigcup_{m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} K_m \right)$$

も基本集合である。命題 1 の証明と同様にして $F(f_c)$ がただ一つのベーカー領域からなることが示される。さらに定理 5 の証明と同様にして $\{J(f_c)\}$ にハウスドルフ収束の意味で $J(f)$ に収束することが示される。 ■

次にパラメータとして複素数を考えてみる。

$$c_n = 1 + \cos\frac{n-1}{n}\pi + i\sin\frac{n-1}{n}\pi$$

とし、$f_n(z) = z + e^z + c_n$ とする。このとき $F(f_n) \neq \emptyset$ である。さらに $\{f_n\}$ は $z + e^z$ に広義一様収束するが、ハウスドルフ収束の意味で $J(f_n) \not\to J(z + e^z)$ となる。

証明 $c_n \to 0$ であるから $\{f_n\}$ が $z + e^z$ に広義一様収束することは明らか。
$\theta_n = \mathrm{Arg}\,(-c_n)$ とおくと

$$w_k = \mathrm{Log}\,|c_n| + i(\theta_n + 2\pi k)$$

は f_n の周期 $2n$ の放物型不動点である。したがって $F(f_n) \neq \emptyset$ である。さらに f_n の臨界点の集合は $\{(\pi + 2\pi k)\}$ であり、f_n は漸近値を持たない。したがって πi はある放物型周期成分に含まれ、πi と $f_n(\pi i)$ は異なる成分に含まれる。これより n を十分大とすると πi と $f(\pi i) = -1 + \pi i$ を結ぶ直線は $J(f_n)$ と交わる。したがって $J(f_n) \not\to J(z + e^z)$ となる。 ■

参考文献

[1] Bergweiler W., Invariant domains and singularities, Math. Proc. Camb. Phil. Soc., 117(1995), 525-532.

[2] A. Hinkkanen, B. Krauskopf & H. Kriete, Growing a Baker domain from attracting islands I: The dynamics of the limit function, preprint.

[3] Krauskopf B., Convergence of Julia sets in the approximation of λe^z by $\lambda(1 + z/d)^d$, Int. J. Bif. Chaos, 3(1993), 257-270.

[4] 諸澤 俊介, ベーカー領域あるいは遊走領域へのカラテオドリ収束について, 数理解析研究所講究録 1087, 11-20.

[5] 諸澤 俊介, Appearance of Baker domains and wandering domains、数理解析研究所講究録

[6] S. Morosawa, The Carathéodory convergence of Fatou components of Polynomials to Baker domains or wandering domains, to appear in Proceedings of the Second Congress ISAAC

[7] S. Morosawa, Y. Nishimura, M. Taniguchi, and T. Ueda, Holomorphic Dynamics, Cambridge Univ. Press, 1999.

[8] Morosawa S & Taniguchi M, Non-trivial deformation of an entire function $abz + e^{bz} + c$, preprint.