数理解析研究所講究録 1225 巻 2001 年 176-179

Proudman-Johnson 方程式の周辺の話題

岡本 久
京都大学数理解析研究所
〒 606-8502 京都市左京区北白川追分町

要旨

Navier-Stokes 方程式に適当な対称性 (自己相似性) を仮定すると次元が一つ下がった方程式が得られる. そのうち Proudman と Johnson が考察した方程式およびその周辺の話題について筆者らが最近得た結果を紹介する.

1 Introduction

非圧縮粘性流体の方程式である Navier-Stokes 方程式の特殊解について考える. 本稿で考える解はすべて非有界であるが, L^2 に属する解とは異なる様々な性質があり, いくつかの面白い問題を提供してくれる.

Proudman-Johnson 方程式 (以下 PJ 方程式と略記する) とは,

$$f_{txx} + ff_{xxx} - f_x f_{xx} = \nu f_{xxxx} \tag{1}$$

のことである. ここで, ν は粘性係数で, 非負定数であるとする. この方程式は 2 次元 Navier-Stokes 方程式から導かれるもので, たとえば Chen and Okamoto [1], Okamoto and Zhu [5], Zhu[6] などに導き方が書いてある. 空間変数 x は有界区間 $[-a, a]$ を動くものとする. 境界条件にはいろいろなものがある:

1. $f(t, \pm a)$ と $f_x(t, \pm a)$ を与える,
2. $f(t, \pm a)$ と $f_{xx}(t, \pm a)$ を与える,
3. 周期境界条件を与える,

などが考えられる.

さて, $\phi(t,x)=\frac{a}{\nu}f\left(\frac{a^2}{\nu}t,ax\right)$ で無次元化し, (1) の境界条件をとると,

$$\phi_{txx}+\phi\phi_{xxx}-\phi_x\phi_{xx}=\phi_{xxxx}\qquad(0<t,-1<x<1)\tag{2}$$

$$\phi(t,-1)=\alpha_1,\quad \phi_x(t,-1)=\alpha_2,\quad \phi(t,1)=\alpha_3,\quad \phi_x(t,1)=\alpha_4\tag{3}$$

という初期値境界値問題に到達する. ここで α_k $(1\le k\le 4)$ は定数であるものとする. これに対する定常解の数値計算は歴史もあり, 実に多くの論文が書かれている. 数学的な存在証明もある程度わかっている. 例えば [4] およびその中の文献を参照されたい. これに対し, 初期値境界値問題の適切性については未知の部分が多い.

解が時間について局所的に存在して一意であることを示すのは何も問題ではない. 問題は解が大域的に存在するか, 有限時間で爆発するか決定することである. 筆者は, 東海林まゆみ氏や J. Zhu (朱 景輝) 氏とともにいろいろと数値実験を繰り返し, α_j がすべてゼロのときには解は爆発しない, という確信をもつに至ったが, 証明はできないでいた. この辺の事情は [5] で詳しく述べた. ところが, 本研究集会でたまたま筆者の講演を聞いていた X. Chen (陳 新富) 氏 (当時数理解析研究所客員教授) が簡単な証明を見つけ, それを論文 [1] に発表することができた. 同論文では境界条件が周期境界条件の場合にも, あるいは, 境界条件 $\phi(t,\pm1)=\phi_{xx}(t,\pm1)=0$ の場合にも解が大域的に存在することが証明されている.

さて, 境界条件が一般の場合, すなわち, α_j が任意の定数である場合はどうであろうか? これについては St Andrews 大学の Robert Grundy 氏との議論に示唆されて数値実験をやってみたところ, どのように定数を選んでも解が大域的に存在することが間違いないように思われた. だが, [1] の証明はそのままでは適用できない. 現在のところ, 一般の α_j についての大域的存在は, 筆者には疑うことができないが証明は知らない, という状態である. α_j がすべてゼロの場合とそうでない場合とではアトラクターは異なってくる. すべてゼロの場合には, アトラクターは 1 点すなわち, 恒等的にゼロである関数だけからなる ([1]). しかし, α_j を適当に選ぶと周期解が存在することがわかる (図 1). もちろんこれは数値実験でしかないから, 周期解の存在証明もいまのところよくわからない.

最後に,

$$\phi(t,-1)=\beta_1,\quad \phi_{xx}(t,-1)=\beta_2,\quad \phi(t,1)=\beta_3,\quad \phi_{xx}(t,1)=\beta_4$$

という境界条件ではどうであろうか? 一見不思議に思えるが, この場合には解の爆発が起き得るのである. この事実に初めて気が付いたのは Grundy & McLaughlin [2] であろう. [5] も数値実験でこれを確認している. ただ, これも証明が見つかっているわけで

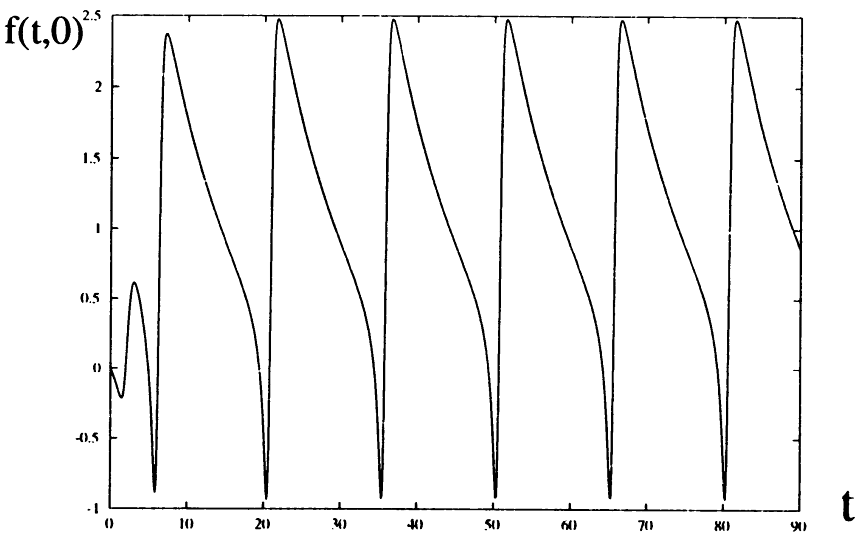

図 1: 方程式 (1) の解. $\nu = 0, a = 1, \alpha_1 = \alpha_3 = 0,\ \alpha_2 = -1, \alpha_4 = 1$

2 一般化

PJ 方程式は次の連立方程式の特別な場合になる.

$$f_{txx} = f_{xxxx} + (f_x + g_x)f_{xx} - (f - g)f_{xxx}, \tag{4}$$

$$g_{txx} = g_{xxxx} - (f_x + g_x)g_{xx} - (f - g)g_{xxx}. \tag{5}$$

この連立方程式は 3 次元 Navier-Stokes 方程式から導かれる ([3] 参照). この連立方程式を数値計算してみると, 斉次境界条件

$$f(t, \pm 1) = g(t, \pm 1) = f_x(t, \pm 1) = g_x(t, \pm 1) = 0$$

でも, 初期関数 $f(0, x)$ と $g(0, x)$ がともに大きければ解の爆発が起きることがわかった ([6, 3]). 但し証明は知らない.

上記連立方程式の特別な場合として $g(t, x) = f(t, -x)$ を考える. この関係は発展方程式で保存されるので, 連立方程式が単独方程式になるのである. この結果,

$$f_{txx} = \nu f_{xxxx} + 2H[f_x]f_{xx} - 2H[f]f_{xxx} \tag{6}$$

を得る. ここで作用素 H は

$$H[\phi] = \frac{\phi(t, x) - \phi(t, -x)}{2}$$

で定義される. 方程式 (6) は $f(t,-x)$ がなければ (1) と同じである. 文献 [3] では (6) の解を斉次境界条件のもとで計算し, 爆発解を見つけることができた. 方程式 (6) は Navier-Stokes 方程式の厳密解で, かつ, 斉次境界条件 $f(t,\pm1)=f_x(t,\pm1)=0$ のもとで爆発が起きるものの中で一番簡単なものであると思われる. くどいようだが, これも証明はできない.

爆発するときの漸近的な形状など考えねばならない問題は多いが, 文献 [3] に資料をそろえたので参照していただければ幸である.

参考文献

[1] X. Chen and H. Okamoto, Global Existence of Solutions to the Proudman–Johnson Equation, *Proc. Japan Acad.*, **76**, Ser. A (2000), pp. 149–152.

[2] R. E. Grundy and R. McLaughlin, Global blow-up of separable solutions of the vorticity equation, *IMA J. Appl. Math.*, **59** (1997), 287–307.

[3] M. Nagayama, H. Okamoto, and J. Zhu, On the blow-up of some similarity solutions of the Navier-Stokes equations, to appear in Quaderni di Matematica.

[4] M. Nagayama and H. Okamoto, On the interior layer appearing in the similarity solutions of the Navier-Stokes equations, submitted.

[5] H. Okamoto and J. Zhu, Some similarity solutions of Some similarity solutions of the Navier-Stokes equations and related topics, *Taiwanese J. Math.*, **4** (2000),. pp. 65–103.

[6] J. Zhu, Numerical study of stagnation-point flows of incompressible fluid, *Japan J. Indust. Appl. Math.*, **17** (2000), 209–228.