

ミニマル平面クエット乱流の秩序構造

愛媛大工 河原 源太 (Genta Kawahara)
核融合研 木田 重雄 (Shigeo Kida)

互いに反対方向に一定速度で運動する2つの平行平板間の流れは、十分に大きな振幅の攪乱を注入すると、ある臨界値以上のレイノルズ数において乱流に遷移する。この流れは平面クエット乱流とよばれるものである。この流れに見られる流体の運動はカオス的で、二度と同じ運動が繰り返されることはない。一方、乱流中には、縦渦やストリークといった秩序構造を維持する再生サイクルが存在することが知られている。だが、この再生サイクルの理論的記述は確立されていない。ここでは、ナビエ・ストークス方程式を反復的に解くことによって、平面クエット乱流中に埋め込まれた周期運動が存在することを示す。この周期運動は、秩序構造の生成・消滅といった非線形力学過程の繰り返しからなる全サイクルを再現する。今回得た周期解は不安定であるため、実際に周期運動が現れることはないが、乱流状態にある系はこの周期解の近くでほとんどの時間を費やす。その結果、平面クエット乱流の平均速度分布や乱流強度分布は、それらに対応する周期運動の時間平均と非常によく一致する。

1. はじめに

1883年のReynoldsによる記念すべき実験によって流れの乱流への遷移が明らかにされて以来、乱流の解明と制御に向けて多大な努力がなされてきた。しかし、大自由度強非線形系の時空間構造を簡潔に特徴づけることは困難であり、したがって乱流の構造や動力学についての十分な理解は依然として得られていない。発達した乱流は時空間におけるその複雑でカオス的な振舞いによって特徴づけられるが、他方で乱流中に存在する際立った秩序が実験および数値シミュレーションにより観測されている(Cantwell 1981; Robinson 1991)。少なくとも定性的には、秩序構造が物質、運動量、エネルギーの輸送(Kim *et al.* 1971)や乱流活動の維持(Panton 1997)、そして乱流の間欠性(She, Jackson & Orszag 1990)などに重要な役割を果たすことは広く知られている。秩序構造は乱流それ自身よりも単純な振舞いを示すので、乱流における秩序構造の存在が乱流を理解する上で大きな助けになるものと期待される。

有界領域における粘性流体の乱流運動では、粘性により小スケールの運動がならされて弱められるため、運動の活発なモード数は常に有限に保たれる(Kolmogorov 1941)。したがって、乱流を有限自由度の力学系とみなすことができ

よう。力学系理論の言葉でいえば、乱流中の秩序構造は低次元多様体と解釈され、力学系は秩序構造に対応する多様体の近くで長時間を費やすものと考えられる (Jiménez 1987)。一方、低自由度カオス力学系では、カオスアトラクターに埋め込まれた無数の周期軌道が存在することがよく知られている (Eckmann & Ruelle 1985) が、最近、この無数の周期軌道によってアトラクターの構造や動力学をうまく特徴づけられることが示されている (Auerbach *et al.* 1987; Christiansen, Cvitanović & Putkaradze 1997)。以上のことから、位相空間でのでき得る最も簡潔な秩序構造の記述は、乱流アトラクターに埋め込まれた周期サドル軌道によって与えられるものと考えられる。しかしながら、乱流に代表される大自由度力学系において不安定周期軌道を求めることは、低自由度カオス力学系に比べてきわめて困難であるといわざるを得ない。

Jiménez & Moin (1991) は、平面ポアズイユ乱流の直接数値シミュレーションにおいて、流れ方向とスパン方向の周期箱寸法を乱流が持続する限界にまで最小化し、乱流活動を保持しつつ流れの自由度を低減することに成功した。この種の流れは、現在「ミニマル乱流」とよばれている。Hamilton, Kim & Waleffe (1995) は、ミニマル平面クエット乱流のレイノルズ数を下げることによって、さらに乱流の自由度を低減し、定性的にはあるが、縦渦やストリークといった秩序構造の再起的な生成・消滅を観測した。

2. 計算方法と計算条件

もし乱流アトラクターに埋め込まれた不安定周期軌道が存在するものとするれば、上述した低自由度のミニマル乱流に対しては比較的容易に周期解が求められるものと期待される。そこで、Hamilton, Kim & Waleffe (1995) と同一のミニマル平面クエット乱流の直接数値シミュレーションを行った。シミュレーションでは、非圧縮ナビエ・ストークス方程式をスペクトル法により数値的に解いた。流れ (x) 方向とスパン (z) 方向にはフーリエ展開を用い、壁垂直 (y) 方向にはチェビシェフ多項式展開を用いた。数値計算は 8,448 点 (x, y, z 方向に $16 \times 33 \times 16$) の格子点上で行い、レイノルズ数 $Re = Uh/\nu$ を 400 に設定した。ここに、 U は 2 平板の速度差の半分であり、 h は 2 平板間の距離の半分を表す。 ν は流体の動粘性係数である。流れ方向とスパン方向の周期箱寸法は、それぞれ $L_x = 5.513h$, $L_z = 3.770h$ に設定した。格子分解能は、乱流運動の活発な最小スケールを捉えるに十分小さくとる。エネルギーは、運動する 2 平板壁面上の摩擦力を通じて系に注入され、全流れ場にわたって小規模運動によって粘性散逸により消費される。エネルギーの単位時間あたりの注入率 I と散逸率 D は、複雑に時間変動するが、乱流が統計的に定常であるため、それらの時間平均は一定に保たれる。この注入率と散逸率の時間平均は、対応する層流状態の値に比べてかなり大きい (図 1 参照)。

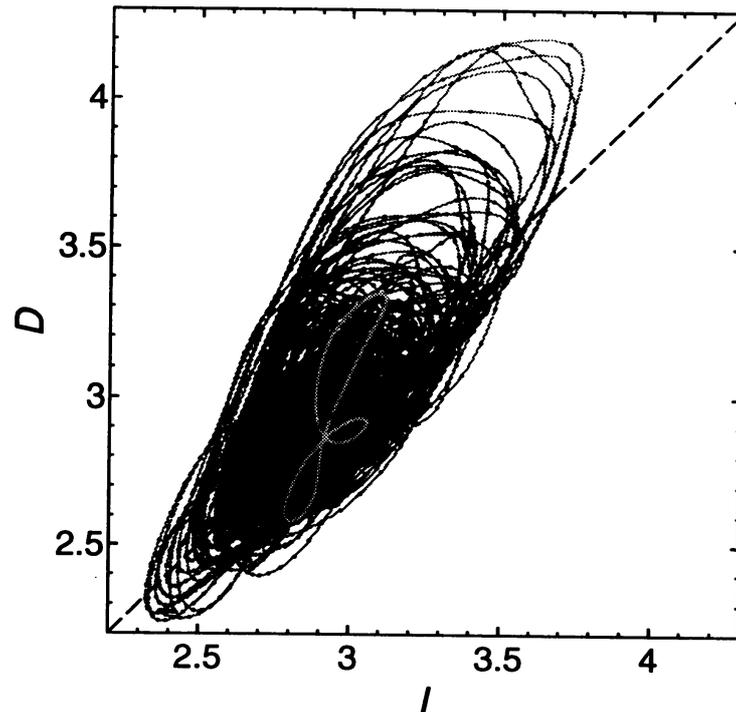


図1. 乱流軌道および周期軌道の2次元部分空間への射影. 横軸と縦軸は, 層流状態の対応する値で正規化された総エネルギー注入率 I と散逸率 D をそれぞれ表す. 細い灰色の線は乱流軌道を表し, 軌道上には $2h/U$ の時間間隔で黒丸が付してある. 閉じた太い灰色の線は周期軌道を表す. 破線上ではエネルギー注入率と散逸率が等しい.

3. 計算結果

ここでの数値計算における従属変数は, 流れ方向とスパン方向の(平板に平行な面での)平均速度に対するそれぞれ31個のチェビシェフ係数, 壁垂直方向速度に対する7,424 ($=16 \times 29 \times 16$)個のフーリエ・チェビシェフ・フーリエ係数, そして壁垂直方向渦度に対する7,936 ($=16 \times 31 \times 16$)個のフーリエ・チェビシェフ・フーリエ係数である. したがって, ここで考える力学系の自由度の数 N は15,422となる. 流れ場の瞬時の状態および時間発展は, 従属変数によって張られる N 次元位相空間における点およびその軌跡としてそれぞれ表される. もちろん, 紙面上に全位相空間を示すことは不可能であるが, その2次元部分空間を表すことは可能である. 図1の細い灰色の曲線は, 時間 $10,000h/U$ にわたる乱流軌道の2次元部分空間への射影である. 部分空間は総エネルギー注入率 I と散逸率 D によって張られており, I および D は対応する層流状態の値によって正規化されている. 軌道はほとんどいつも時計回りに回転する. 破線上ではエネルギー注入と散逸とが等しい. もし系がこの線より上(あるいは下)に位置すると, 総運動エネルギーは減少(あるいは増加)する. 軌道の変動は有限領域に限

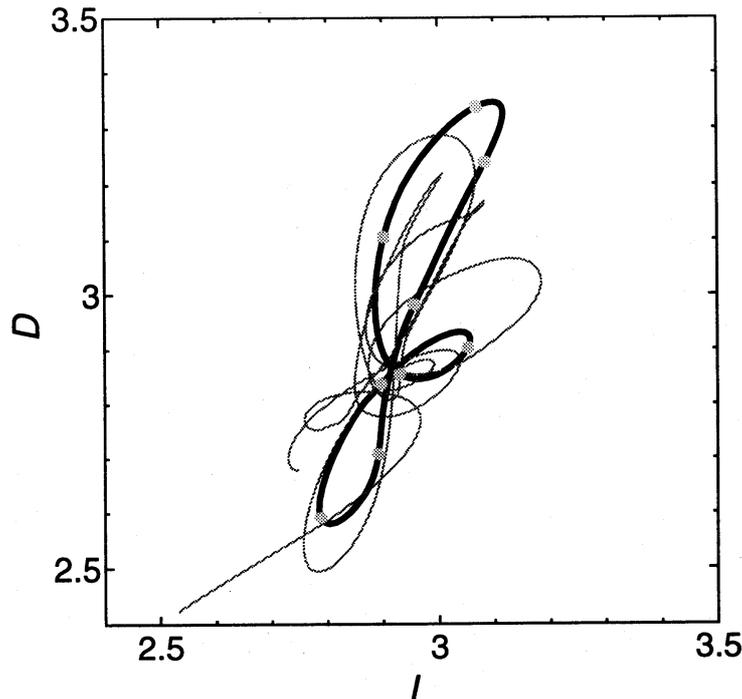


図 2. 2次元射影面における乱流軌道の周期軌道への接近例. 細い灰色の線は図 1 の乱流軌道の一部を切り出したもので, 閉じた太い黒色の線は周期軌道を表す. 周期軌道上の灰色の丸は図 3 の 9 つパネルの位相を示す.

定されているが, 周期的とはほど遠い. むしろ, 総運動エネルギーの周波数スペクトルは連続的であり (図省略), このことから系の振舞いはカオス的であるといえる.

単純な力学系 (Auerbach *et al.* 1987; Christiansen, Cvitanović & Putkaradze 1997) では奇妙なアトラクターに埋め込まれた周期軌道の存在が報告されていること, および, ここで考えている系では秩序構造の再起的な生成・消滅が観測されている (Hamilton, Kim & Waleffe 1995) ことを考慮し, われわれは, ミニマル平面ケット乱流に隠された周期軌道を探索することにした. 本研究では, N 次元位相空間における面 $\text{Im}(\tilde{\omega}_{y0,0,1}) = -0.1875U/h$ を連続して通過する 2 点間のユークリッド的距離を反復法により最小化することで周期軌道を求めた. ここに, $\text{Im}(\tilde{\omega}_{y0,0,1})$ は, 流れ方向波数がゼロ, チェビシエフ多項式の次数がゼロ, スパン方向波数が $2\pi/L_z$ に対応する壁垂直方向渦度のフーリエ・チェビシエフ・フーリエ係数の虚数部を表す. 反復計算の初期値としては, 位相空間で乱流軌道がおおよそ周期的に運動する状態を選んだ. 反復計算は, 位相空間において, 上述の連続した通過点間の距離が通過点と原点間の距離の 1% 以下になるまで行った. 図 1 に示す閉じた太い灰色の線は, 以上のようにして求めた周期軌道を表す. 周期軌道の時間周期は $64.7h/U$ である. 乱流軌道上に一定時間間隔で付した黒丸が周期軌

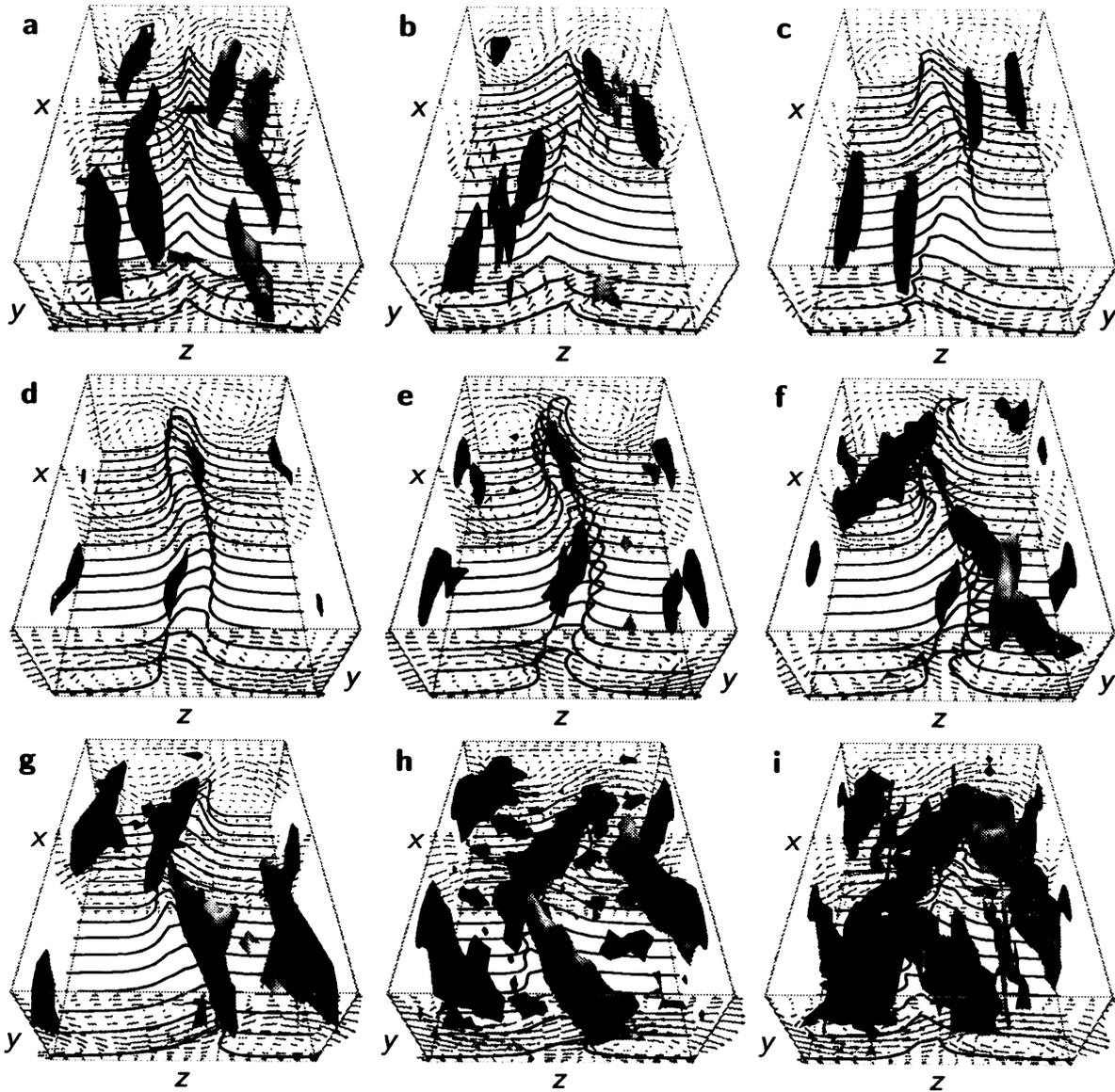


図3. 時間周期流の時間発展. 基本周期箱 ($L_x \times 2h \times L_z$) における流れの構造の一時間周期にわたる可視化. 9つのパネル a から i の時間間隔は $1/9$ 周期 ($7.2h/U$) であり, それらの位相を図2の灰色の丸で示す. ここに, パネル a は図2の一番下の丸に対応する. 上側 (あるいは下側) の壁面は速度 U (あるいは $-U$) で紙面奥向き (あるいは手前向き) に運動する. 渦構造を圧力ラプラシアン の等値面 $\nabla^2 p = 0.15\rho U^2/h^2$ によって表す. ここに, ρ は流体の密度である. $\nabla^2 p$ の等値面上での流れ (x) 方向渦度を白黒濃淡で示す. 白が正 (時計回り), 黒が負 (反時計回り) を表す. 横断方向の流速ベクトルと流れ方向速度の等値線を $x = \text{一定}$ の面

道の付近に密集していることから、乱流状態にある系はかなり長時間にわたって周期軌道付近に滞在することがわかる。

図2に、乱流軌道の周期軌道への接近の例として、図1の乱流軌道の一部分を切り出して周期軌道とともに示す。細い灰色の線は乱流軌道を表し、閉じた太い黒色の線は周期軌道を表す。この図から、乱流軌道は過渡的に周期軌道に接近し、周期軌道をたどるように振舞うことがわかる。この乱流軌道の周期軌道への接近を (I, D) 面とは異なる射影面においても確認した。しかしながら、周期軌道への接近は不完全であり、乱流軌道は時折大きく周期軌道付近から離脱する。したがって、今回求めた周期軌道はサドル的性質をもつものと考えられる。この間欠的な離脱はよく知られたバースト (Kim, Kline, & Reynolds 1971; Itano & Toh 2001) に対応するものと考えられ、小スケールの運動を励起して顕著なエネルギー散逸をもたらす。今回の周期解の発見は、(著者らの知る限りにおいて) 乱流に埋め込まれた周期運動が実際に存在することを初めて直接的に明示したものである。

図3の a から i は、図2に灰色の丸で示した9つの位相において時間周期流の空間構造を示したものである。図3 a の位相は、最小の注入と散逸に位置する灰色の丸に対応している。代表的な壁付近の秩序構造 (Stretch 1990; Joeng *et al.* 1997) は、圧ラプラシアン白色 (あるいは黒色) の等値面で可視化された時計回り (あるいは反時計回り) の流れ (x 方向渦 (横断方向の流速ベクトルも参照), および (y, z) 面での流れ方向速度の盛り上がった等値線により表された低速ストリークである。時間周期流の動力学は、次の3つの事象の再起的循環によって特徴づけられる。

- (i) 図3 a から d. 減衰する縦渦が誘導する横断流によって流れ方向運動量が輸送されることで、低速ストリークが生成され、成長する。
- (ii) 図3 e から g. ストリークが流れ方向に沿って湾曲し、スパン (z) 方向に傾き、その結果縦渦が再生される。
- (iii) 図3 h, i. ストリークが消滅し、縦渦が激しく成長する。

このサイクルは、これまでに報告されている平面クエット乱流中の秩序構造の再生サイクル (Hamilton, Kim & Waleffe 1995; Waleffe 1997) と完全に一致する。以上のことから、乱流状態にある系が周期サドル軌道に接近すると、広く観測されている秩序構造が乱流中に現れ、今回求めた周期解により全サイクルにわたって表現される再起的な振舞いを示すことがわかる。

図4 a, b は、時間周期流 (記号) と乱流 (線) に対する速度の平均と RMS (root-mean-square) の壁垂直方向分布を比較したものである。ここに、平均および RMS 速度は U により規格化されている。図から、時間周期流に対する流れ方向の平均速度分布が乱流のそれときわめてよく一致していることがわかる。さら

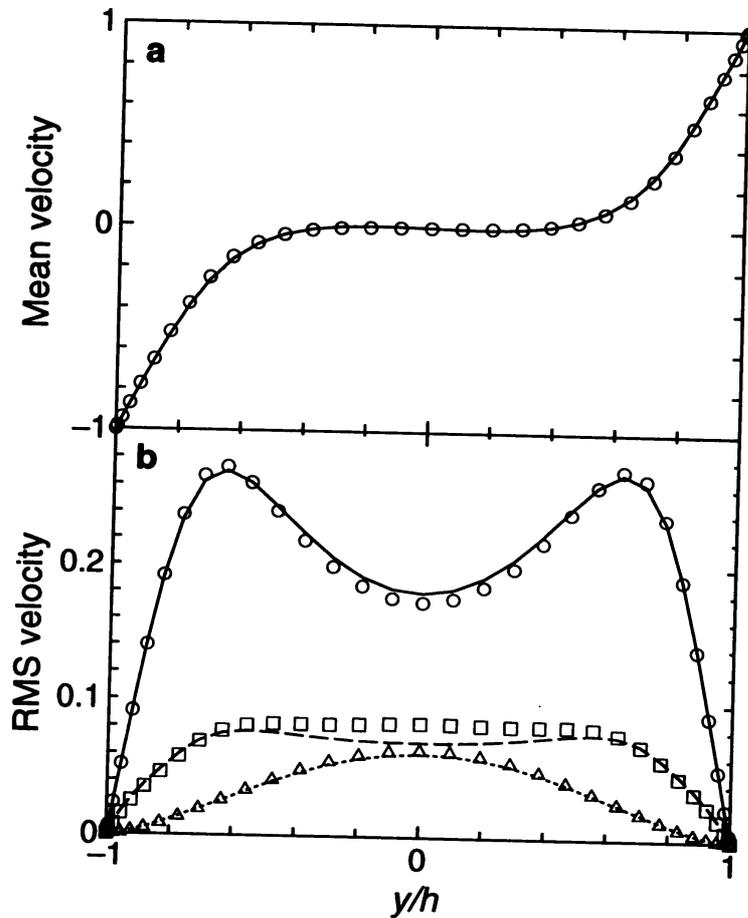


図 4. 時間周期流と乱流に対する平均速度および速度の RMS 値の比較.
 a. 流れ方向平均速度分布. b. RMS 速度分布. 速度は U で規格化している.
 y/h は壁垂直方向座標である. 記号と線は, それぞれ時間周期流と乱流を表す.
 \circ と実線は流れ方向成分, \triangle と点線は壁垂直方向成分, \square と破線はスパン方向成分をそれぞれ表す. 平均は, 壁に平行な面 $y = \text{一定}$ において, 周期流に対しては一周期 $64.7h/U$, 乱流に対しては $60,000h/U$ の時間にわたってとられている.

に、周期流に対する、流れ方向、壁垂直方向、スパン方向の全 RMS 速度分布さえも、対応する乱流の RMS 速度に一致していることは非常に興味深い。過度の全成分の RMS 値やレイノルズ剪断応力といった他の 2 次統計量に関しても、上と同様の非常によい一致を確認した (図省略)。これらの結果は、乱流状態にある系がほとんどの時間を実際に周期軌道付近で費やすことを強く示唆している。

4. おわりに

乱流中には空間的な秩序ばかりではなく時間的な秩序が存在する。ここで求めたナビエ・ストークス方程式の時間周期解は、乱流における時空間的な秩序構造の具体例を与えている。この時間周期解は次の 2 つの空間対称性 (Nagata 1990; Clever & Busse 1997) をもっている。

- (i) 面 $z = 0$ に関する反転および x 方向への半周期 $L_x/2$ の並進。
- (ii) 線 $x = y = 0$ まわりの 180° の回転および z 方向への半周期 $L_z/2$ の並進。

これらの対称性は、ミニマル流という流れの拘束、つまり低レイノルズ数でかつ最小周期箱であるがために実現されたものと考えられる。これらのうちの 1 つあるいは両方は、高レイノルズ数あるいは大きな周期箱においては崩れてしまうであろう。だが、ここで求めた周期解は、少なくとも拘束された平面クエット乱流に対しては、乱流を理解する上できわめて重要となる乱れの簡潔な時空間での記述を与えるものである。

本研究における直接数値シミュレーションは、京都大学藤定義助教授から頂いた計算コードを用いて行われた。ここに記して謝意を表します。

文献

- Auerbach, D., Cvitanović, P., Eckmann, J.-P. & Gunaratne, G. H. 1987 Exploring chaotic motion through periodic orbits. *Phys. Rev. Lett.* **58**, 2387–2389.
- Cantwell, B. J. 1981 Organized motion in turbulent flow. *Annu. Rev. Fluid Mech.* **13**, 457–515.
- Christiansen, F., Cvitanović, P. & Putkaradze, V. 1997 Spatiotemporal chaos in terms of unstable recurrent patterns. *Nonlinearity* **10**, 55–70.
- Clever, R. M. & Busse, F. H. 1997 Tertiary and quaternary solutions for plane Couette flow. *J. Fluid Mech.* **344**, 137–153.
- Eckmann, J.-P. & Ruelle, D. 1985 Ergodic theory of chaos and strange attractors. *Rev.*

- Mod. Phys.* **57**, 617–656.
- Hamilton, J. M., Kim, J. & Waleffe, F. 1995 Regeneration mechanisms of near-wall turbulence structures. *J. Fluid Mech.* **287**, 317–348.
- Itano, T. & Toh, S. 2001 The dynamics of bursting process in wall turbulence. *J. Phys. Soc. Jpn.* (submitted).
- Joeng, J., Hussain, F., Schoppa, W. & Kim, J. 1997 Coherent structures near the wall in a turbulent channel flow. *J. Fluid Mech.* **332**, 185–214.
- Jiménez, J. 1987 Coherent structures and dynamical systems. in *Proc. 1987 Summer Program of Center for Turbulence Research CTR-S87*, Stanford Univ., 323–324.
- Jiménez, J. & Moin, P. 1991 The minimal flow unit in near-wall turbulence. *J. Fluid Mech.* **225**, 213–240.
- Kim, H. T., Kline, S. J. & Reynolds, W. C. 1971 The production of turbulence near a smooth wall in a turbulent boundary layer. *J. Fluid Mech.* **50**, 133–160.
- Kolmogorov, A. N. 1941 The local structure of turbulence in incompressible viscous fluid for very large Reynolds number. *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **30**, 301–305.
- Nagata, M. 1990 Three-dimensional finite-amplitude solutions in plane Couette flow: bifurcation from infinity. *J. Fluid Mech.* **217**, 519–527.
- Panton, R. (ed.) 1997 *Self-Sustaining Mechanisms of Wall Turbulence* (Computational Mechanics Publications, Southampton).
- Robinson, S. K. 1991 Coherent motions in the turbulent boundary layer. *Annu. Rev. Fluid Mech.* **23**, 601–639.
- She, Z.-S., Jackson E. & Orszag, S. A. 1990 Intermittent vortex structures in homogeneous isotropic turbulence. *Nature* **344**, 226–228.
- Stretch, D. 1990 Automated pattern eduction from turbulent flow diagnostics. in *Center for Turbulence Research Annu. Res. Briefs*, Stanford Univ., 145–157.
- Waleffe, F. 1997 On a self-sustaining process in shear flows. *Phys. Fluids* **9**, 883–900.