

# 頂点作用素代数 $V_L^+$ の有理性について

大阪大学理学部 安部 利之 (Toshiyuki Abe)

Department of Mathematics, Graduate School of Science, Osaka University

## 1 序

階数 1 の偶格子  $L = \mathbb{Z}\alpha$  に付随して得られる頂点作用素代数  $V_L$  は,  $L$  の  $-1$ -isometry から誘導される位数 2 の自己準同型写像をもつ. この自己準同型写像による  $V_L^+$  の固定点全体  $V_L^+$  は  $V_L$  の部分頂点作用素代数の構造を持つ. 格子頂点作用素代数  $V_L$  は有理的であることが知られているが, その部分頂点作用素代数  $V_L^+$  についても  $\alpha$  の square length が “ $2 \times$  (素数)” の時には有理的となることを証明したので, そのことについて報告する.

## 2 定義

$(V, Y, \mathbf{1}, \omega)$  (以下単に  $V$  と書くこともある) を頂点作用素代数とする. ここで  $Y$  は  $V$  から  $\text{End } V[[z, z^{-1}]]$  への線形写像で, 任意の  $a \in V$  に対し, その  $Y$  による像を  $Y(a, z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n z^{-n-1}$ ,  $a_n \in \text{End } V$  とあらわすことにする. 特に  $L_n = \omega_{n+1}$  ( $n \in \mathbb{Z}$ ) とおけば,  $\{L_n\}$  は  $V$  上に Virasoro 代数の表現を与え,  $V$  は固有値が整数の  $L_0$  に関する固有空間の直和に分解している;

$$V = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} V_n, \quad V_n = \{a \in V \mid L_0 a = na\}.$$

この  $V_n$  に属する元  $a$  をウェイト  $n$  の斉次元といい,  $n = \text{wt}(a)$  と書くことにする. 次に加群の定義について述べる.

**定義 2.1.**  $(V, Y, \mathbf{1}, \omega)$  を頂点作用素代数とする. admissible  $V$ -加群とは, 非負整数全体の集合  $\mathbb{N}$  で次数付けされたベクトル空間  $M = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} M_n$  と線形写像

$$\begin{aligned} Y_M : V &\rightarrow (\text{End } M)[[z, z^{-1}]], \\ a &\mapsto Y_M(a, z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a(n) z^{-n-1}, \quad (a(n) \in \text{End } M) \end{aligned}$$

の組  $(M, Y_M)$  で任意の  $a, b \in V$  及び  $u \in M$  に対し次を満たすものである:

(1)

$$Y_M(a, z)v \in M((z)), \quad Y_M(\mathbf{1}, z) = \text{id}_M,$$

(2) (Jacobi 恒等式).

$$\begin{aligned} & z_0^{-1} \delta \left( \frac{z_1 - z_2}{z_0} \right) Y_M(a, z_1) Y_M(b, z_2) - z_0^{-1} \delta \left( \frac{z_2 - z_1}{-z_0} \right) Y_M(b, z_2) Y_M(a, z_1) \\ &= z_2^{-1} \delta \left( \frac{z_1 - z_0}{z_2} \right) Y_M(Y(a, z_0)b, z_2), \end{aligned} \tag{2.1}$$

(3) 任意の斉次元  $a \in V$  及び  $m, n \in \mathbb{Z}$  に対し,

$$a(n)M_m \subset M_{\text{wt}(a)+m-n-1}.$$

admissible  $V$ -加群  $M$  に対し, その部分加群  $N$  は  $V$  の作用で不変な部分空間で  $M$  の次数付けによって  $N$  の次数付けを持つものとして定義される. また admissible  $V$ -加群は, 非自明な部分加群をもたない時, 既約であるといい, 既約な部分加群の直和で表されるとき, 完全可約であるという.

**定義 2.2.** 頂点作用素代数  $V$  は, 任意の admissible  $V$ -加群が完全可約となる時, 有理的であるという.

頂点作用素代数  $V$  が有理的ならば, その既約な admissible  $V$ -加群は同型を除いて有限個しかないことが知られている.

**命題 2.3.**  $V$  を頂点作用素代数とし,  $M = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} M_n$  を既約な admissible  $V$ -加群で,  $M_0 \neq 0$  とする. この時一意的に  $\lambda \in \mathbb{C}$  が存在して, 各  $M_n$  は  $L_0$  の固有値  $\lambda + n$  の固有空間となる. ここで,  $Y_M(\omega, z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} L_n z^{-n-2}$  とおいた.

この既約 admissible  $V$ -加群  $M$  に対して一意的に決まる複素定数  $\lambda$  を  $M$  の最低ウェイトと呼ぶことにする.

$$\mathcal{P}(V) = \{ \lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda \text{ はある既約 admissible } V\text{-加群の最低ウェイト} \}$$

とおく.  $V$  が有理的ならば,  $\mathcal{P}(V)$  は有限集合である.

### 3 頂点作用素代数 $V_L^+$ とその既約 admissible 加群

ここでは, 階数 1 の偶格子  $L$  に付随してえられる頂点作用素代数  $V_L^+$  とその既約 admissible 加群の構成および分類について簡単に述べる. 詳しくは, 構成については [FLM] を, 分類については [DN] を参照.

$L = \mathbb{Z}\alpha$  を階数 1 の正定値偶格子とし,  $\langle \alpha, \alpha \rangle = 2k$ , ( $k \in \mathbb{Z}_{>0}$ ) とする.  $\mathfrak{h} = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Z}} L$  とし,  $\hat{\mathfrak{h}} = \mathfrak{h} \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}] \oplus \mathbb{C}K$  を交換関係が,

$$[X \otimes t^m, X' \otimes t^n] = m \delta_{m+n,0} \langle X, X' \rangle K, [K, \hat{\mathfrak{h}}] = 0$$

( $X, X' \in \mathfrak{h}$ ,  $m, n \in \mathbb{Z}$ ) で定義される Lie 代数とする. この時,  $\hat{\mathfrak{h}}$  は可換な部分 Lie 代数  $\hat{\mathfrak{h}}^- = \mathfrak{h} \otimes t^{-1}\mathbb{C}[t^{-1}]$  を持つ. また  $L^\circ$  を  $L$  の双対格子とすると,  $L^\circ$  は  $L^\circ = \bigcup_{i=0}^{2k-1} (\lambda_r + L)$  と coset 分解される. ここで,  $\lambda_r = r\alpha/2k$  である. 今  $\mathbb{C}[L^\circ] = \bigoplus_{\beta \in L^\circ} \mathbb{C}e_\beta$  を  $L^\circ$  の群環とし, 任意の  $L^\circ$  の部分集合  $M$  に対し

$$V_M = \bigoplus_{\beta \in M} S(\hat{\mathfrak{h}}^-) \otimes_{\mathbb{C}} e_\beta$$

とおく. この時,  $V_L$  は頂点作用素代数の構造を持ち, 任意の  $0 \leq r \leq 2k-1$  に対し  $V_{\lambda_r+L}$  は互いに非同値な既約な admissible  $V_L$ -加群となる.

格子  $L$  の  $-1$ -isometry  $L \rightarrow L$ ,  $\beta \mapsto -\beta$  から自然に誘導される対称代数  $S(\hat{\mathfrak{h}}^-)$  の位数 2 の自己同型写像を  $\theta$  とかく. 更に  $V_L$  の線形自己同型写像を  $u \otimes e_\beta \mapsto \theta(u) \otimes e_{-\beta}$ , ( $u \in$

$S(\hat{\mathfrak{h}}^-)$ ,  $\beta \in L^\circ$ ) で定義し, それを再び  $\theta$  と書くことにする. 任意の  $V_L^\circ$  の  $\theta$ -不変な部分空間  $W$  に対し,  $\theta$  の  $\pm 1$ -固有空間をそれぞれ  $W^\pm$  とあらわす. この時,  $V_L^+$  は  $V_L$  の部分頂点作用素代数となり,  $V_L^\pm, V_{\alpha/2+L}^\pm$  及び  $V_{\lambda_r+L}$ , ( $1 \leq r \leq k-1$ ) は既約 admissible  $V_L^+$ -加群となる.

頂点作用素代数  $V_L^+$  は  $V_L$  の  $\theta$  の固定点をとって構成されているので,  $\theta$ -twisted  $V_L$ -加群から新しい既約  $V_L^+$ -加群が現れる. 次にその構成について説明する.  $\hat{\mathfrak{h}}[-1] = \mathfrak{h} \otimes t^{1/2}\mathbb{C}[t, t^{-1}] \oplus \mathbb{C}K$  を交換関係が

$$[X \otimes t^m, X' \otimes t^n] = m \delta_{m+n,0} \langle X, X' \rangle K, \quad [K, \hat{\mathfrak{h}}[-1]] = 0$$

( $X, X' \in \mathfrak{h}$ ,  $m, n \in 1/2 + \mathbb{Z}$ ) で定義される Lie 代数とする. この時,  $\hat{\mathfrak{h}}[-1]^- = \mathfrak{h} \otimes t^{-1/2}\mathbb{C}[t^{-1}]$  は  $\hat{\mathfrak{h}}[-1]$  の可換な部分 Lie 代数となる. その対称代数  $S(\hat{\mathfrak{h}}[-1]^-)$  は  $L$  の  $-1$ -isometry から自然に誘導される自己同型写像  $\theta$  をもつ. この自己同型写像の  $\pm 1$ -固有空間を  $S(\hat{\mathfrak{h}}[-1]^-)^\pm$  とあらわすことにする. 一方, 群環  $\mathbb{C}[L]$  は, 生成元  $e_\alpha$  がそれぞれ  $1, -1$  と作用する 1 次元既約加群  $T_1, T_2$  をもつ. これらを用いて,  $V_L^{T_i, \pm} = S(\hat{\mathfrak{h}}[-1]^-)^\pm \otimes T_i$ , ( $i = 1, 2$ ) とおけば, この  $V_L^{T_i, \pm}$ , ( $i = 1, 2$ ) が既約な admissible  $V_L^+$ -加群の構造を持つ.

既約な admissible  $V_L^+$ -加群は上で構成されたものに限ることが Dong と永友氏によって証明された.

**定理 3.1.** ([DN]) 任意の既約な admissible  $V_L^+$ -加群は

$$\{V_L^\pm, V_{\alpha/2+L}^\pm, V_{r\alpha/2k+L} V_L^{T_i, \pm}, | i = 1, 2, 1 \leq r \leq k-1\}$$

のいずれかに同型である.

各既約 admissible  $V_L^+$ -加群の構成から, 最低ウェイトの集合  $\mathcal{P}(V_L^+)$  は

$$\mathcal{P}(V_L^+) = \{0, 1, r^2/4k, 1/16, 9/16 | 1 \leq r \leq k\} \quad (3.1)$$

で与えられることがわかる.

## 4 主結果

ここでは, 主結果とその証明の方法について説明する. 詳しくは [A] を参照.

**定理 4.1.** (主結果)  $L = \mathbb{Z}\alpha$  を階数 1 の正定値偶格子で,  $\langle \alpha, \alpha \rangle = 2k$ , ( $k \in \mathbb{Z}_{>0}$ ) とする. この時  $k$  が素数ならば, 頂点作用素代数  $V_L^+$  は有理的である.

証明について簡単に説明する. まず最初に次の命題について述べる.

**命題 4.2.** (1)  $M$  を admissible  $V_L^+$ -加群とする. 任意の  $\lambda \in \mathbb{C}$  に対し,  $M^{(\lambda)}$  を固有値が  $\lambda$  の  $L_0$  に関する広義固有空間とする. この時, ある最低ウェイト  $\lambda_1, \dots, \lambda_s \in \mathcal{P}(V_L^+)$  が存在して,  $M$  は

$$M = \bigoplus_{i=1}^s \left( \bigoplus_{n=0}^{\infty} M^{(\lambda_i+n)} \right)$$

の形に広義固有空間分解される. 更に, 各  $\bigoplus_{n=0}^{\infty} M^{(\lambda_i+n)}$  は  $M$  の admissible  $V_L^+$ -部分加群である.

(2)  $\lambda$  を最低ウェイトとする. この時  $(\lambda + \mathbb{Z}_{>0}) \cap \mathcal{P}(V_L^+) = \emptyset$  ならば,  $M = \bigoplus_{n=0}^{\infty} M^{(\lambda+n)}$  の形の admissible  $V_L^+$ -加群は完全可約である.

この命題の証明には, [Z] で導入された Zhu 代数の概念を用いる. Zhu 代数  $A(V)$  は頂点作用素代数  $V$  に付随して構成され, たとえば,  $A(V)$  の既約加群と  $V$  の既約な admissible 加群の間には一対一対応が存在するなど, その表現論は頂点作用素代数の表現論と密接に関係している. この Zhu 代数の概念を用いて, Zhu 代数が半単純であるような頂点作用素代数  $V$  にたいし, 上の命題において  $V_L^+$  を  $V$  に置き換えたものが成立することが証明できる. 更に頂点作用素代数  $V_L^+$  に付随する Zhu 代数  $A(V_L^+)$  は半単純であることが [DN] で示されている. したがって命題が導かれる.

命題 4.2 は Zhu 代数  $A(V_L^+)$  が半単純であることのみを用いているので, 任意の正数  $k$  に対し成立する. しかし (3.1) より,  $0$  は常に命題 4.2 の (2) の仮定を満たしていないことがわかる. よって命題 4.2 からは  $V_L^+$  の完全可約性は従わない. 今  $k$  は素数と仮定する. この時, 次の補題が成立する.

**補題 4.3.**  $k$  は素数とする. この時, 最低ウェイト  $0, 1, 1/16, 9/16$  及び  $r^2/4k$ , ( $1 \leq r \leq k$ ) はすべて異なる. 更に, 任意の  $\lambda \in \mathcal{P}(V_L^+) \setminus \{0\}$  は  $(\lambda + \mathbb{Z}_{>0}) \cap \mathcal{P}(V_L^+) = \emptyset$  を満たす.

**証明** 任意の  $1 \leq r \leq k$  に対し,  $r^2/4k, r^2/4k - 1/16, r^2/4k - 9/16 \notin \mathbb{Z}$  であること及び, 任意の  $1 \leq r \neq s \leq k$  に対し,  $(r^2 - s^2)/4k \notin \mathbb{Z}$  であることを示せばよい. 例えば,  $r \neq s$  に対し  $(r^2 - s^2)/4k$  が整数でないことは次のように示される. 今  $(r^2 - s^2)/4k$  がある  $1 \leq r < s \leq k$  に対し整数になったと仮定する. この時  $k$  が素数で  $1 \leq s - r \leq k - 1$  であるので,  $k|(r+s)$  となることがわかる. さらに,  $3 \leq r+s \leq 2k-1$  より,  $r+s=k$  で  $k \geq 3$  となることがわかる. したがって,  $(r^2 - s^2)/4k = (2s - k)/4$  が成り立ち, これは  $k$  が奇素数であることに反する. その他の場合も同様に示すことができる.  $\square$

**注意 4.4.**  $k$  が素数でなければ, ある正数  $0 \leq r < s \leq k$  で  $r^2/4k - s^2/4k \in \mathbb{Z}$  となるものが存在する. 実際に,  $k$  が素数でなければ,  $k$  は正数  $p, q$  ( $q \leq p$ ) および  $n$  を用いて  $k = pqn$  とあらわすことができる. この時,  $0 \leq np - nq < np + nq \leq npq = k$  が成立し,  $(np + nq)^2/4k - (np - nq)^2/4k = n \in \mathbb{Z}$  となることがわかる.

補題 4.3 と命題 4.2 (2) より,  $k$  が素数の時, 次の命題を得る.

**命題 4.5.**  $k$  が素数ならば, 任意の  $\lambda \in \mathcal{P}(V_L^+) \setminus \{0\}$  に対し,  $M = \bigoplus_{n=0}^{\infty} M^{(\lambda+n)}$  の形の admissible  $V_L^+$ -加群は完全可約である.

したがって  $M = \bigoplus_{n=0}^{\infty} M^{(n)}$  の形の admissible  $V_L^+$ -加群が完全可約であることを示せば, 定理 4.1 の証明が完了する. 以下, 次の命題の証明について説明する.

**命題 4.6.**  $k$  が素数ならば,  $M = \bigoplus_{n=0}^{\infty} M^{(n)}$  の形の admissible  $V_L^+$ -加群は完全可約である.

まず任意に零でない  $u \in M$  に対し,  $u$  で生成される  $M$  の admissible  $V_L^+$ -部分加群を  $\langle u \rangle$  とかくことにする. この時  $u \in M^0$  ならば,  $\langle u \rangle^{(1)} = \mathbb{C}L_{-1}u$  となる. 今  $L_{-1}u \neq 0$  と仮定する. この時,  $\langle L_{-1}u \rangle \cong V_L^-$  及び  $\langle u \rangle / \langle L_{-1}u \rangle \cong V_L^+$  となることがわかる. よって, admissible  $V_L^+$ -加群の完全系列

$$0 \rightarrow V_L^- \rightarrow N \rightarrow V_L^+ \rightarrow 0$$

が分裂することを示すことによって, admissible 加群としての同型  $\langle u \rangle \cong V_L^+ \oplus V_L^-$  が得られる. 特に  $L_{-1}u = 0$  である. これは,  $L_{-1}u \neq 0$  に矛盾し, したがって  $\langle u \rangle \cong V_L^+$

であることがわかる. よって  $M^{(0)}$  で生成される  $M$  の admissible  $V_L^+$ -部分加群  $U$  は  $V_L^+$  の直和に同型である.

次に  $v \in M^{(1)}$  をとり,  $L_1v \neq 0$  と仮定する. この時,  $\langle L_1v \rangle \cong V_L^+$  及び  $\langle v \rangle / \langle L_1v \rangle \cong V_L^-$  となることがわかる. よって, admissible  $V_L^+$ -加群の完全系列

$$0 \rightarrow V_L^+ \rightarrow N \rightarrow V_L^- \rightarrow 0$$

が分裂することを示すことによって, admissible 加群としての同型  $\langle v \rangle \cong V_L^+ \oplus V_L^-$  が得られる. 特に  $V_L^+(1) = 0$  であることに注意すると,  $L_1u = 0$  であることがわかる. これは,  $L_1v \neq 0$  に矛盾し, したがって  $\langle u \rangle \cong V_L^+$  であることが導かれる. よって  $M^{(1)}$  で生成される  $M$  の admissible  $V_L^+$ -部分加群  $W$  は  $V_L^-$  の直和に同型である.

$M$  の admissible  $V_L^+$ -部分加群  $U + W$  は  $M^{(0)} \oplus M^{(1)}$  を含んでいるので, 商加群  $M/(U + W)$  は  $M/(U + W) = \bigoplus_{n=2}^{\infty} (M/(U + W))^{(n)}$  と分解している. よって命題 4.2 と補題 4.3 より,  $M/(U + W) = 0$ , すなわち  $M = U + W$  となることがわかる. 従って各  $U, W$  は完全可約であったので,  $M$  の完全可約性が得られる.

## 参考文献

- [A] T. Abe, The charge conjugation orbifold  $V_{Z\alpha}^+$  is rational when  $\langle \alpha, \alpha \rangle / 2$  is prime, preprint.
- [DN] C. Dong and K. Nagatomo, Representations of Vertex operator algebra  $V_L^+$  for rank one lattice  $L$ , *Commun. Math. Phys.* **202** (1999), 169-195.
- [FLM] I. Frenkel, J. Lepowsky and A. Meurman, "Vertex Operator Algebras and the Monster", Pure and Appl. Math., Vol. 134, Academic Press, Boston, 1988.
- [Z] Y.-C. Zhu, Modular invariance of characters of vertex operator algebras, *J. Amer. Math. Soc.* **9** (1996), 237-302.