

# 3次曲面族の幾何とルート系

京大工 松澤淳一 (Jun-ichi MATSUZAWA)

Department of Electrical Engineering,

Kyoto University

ルート系やワイル群はリー環論から生じた代数的なものだが、時として多様体の周期積分というような量を通じて幾何と深く関わることもある。この報告は、3次曲面族のコンパクト化の幾何を  $E$  型ルート系の立場から記述するという、成木勇夫氏 (立命館大) との共同研究の紹介である。

## 1 複素射影平面のブローアップと Coxeter 群

$\mathbb{C}^2$  の原点でのブローアップは

$$\pi : \widetilde{\mathbb{C}^2} = \{((z_1, z_2), (s : t)) \in \mathbb{C}^2 \times \mathbb{P}^1 \mid sz_2 = tz_1\} \longrightarrow \mathbb{C}^2$$

で定義される。ここで  $\pi$  は第一成分への射影である。この写像は原点以外では一対一対応であるが、原点の逆像は射影直線  $\mathbb{P}^1$  であって、原点を通る直線をパラメトライズしている。ここに生じた射影直線  $E = \pi^{-1}(O)$  をブローアップの例外曲線という。例外曲線  $E$  は自交点数  $E \cdot E = -1$  を持つ。

射影平面  $\mathbb{P}^2$  の点  $P$  のブローアップも同様に定義される。  $C$  を曲線とする時  $\pi^{-1}(C - \{P\})$  の閉包  $C'$  を、  $C$  の狭義引き戻しという。

射影平面を何点かでブローアップして得られる曲面を  $S$  としよう。

**定義 1.1.**  $S$  上の曲線  $L$  が

$$L \simeq \mathbb{P}^1, \quad L \cdot L = -1$$

をみたすとき、  $L$  は第一種例外曲線であるという。  $L$  が  $S$  の第一種例外曲線であるならば、非特異曲面  $S'$  と写像  $\pi : S \rightarrow S'$  であって、  $\pi(L) =$  一点

であり,  $\pi$  は  $S'$  の点  $\pi(L)$  でのブローアップとなるようなものがある. つまり第一種例外曲線は一点に潰すことができる. これを曲線  $L$  のブローダウンという.

射影平面の相異なる3点  $P_1, P_2, P_3$  をブローアップする.  $P_i$  と  $P_j$  を通る直線  $L_{ij}$  の狭義引き戻しは自交点数  $-1$  を持つので第一種例外曲線である. さらにこの3本の狭義引き戻しは互いに交わらないのでそれぞれ3点  $Q_k$  ( $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$ ) にブローダウンすることができる. こうして射影平面から射影平面への有理写像ができる.  $P_1 = (1:0:0), P_2 = (0:1:0), P_3 = (0:0:1)$  のとき, この有理写像は

$$(x_1 : x_2 : x_3) \mapsto (x_2x_3 : x_1x_3 : x_1x_2)$$

で与えられるので3点  $P_1, P_2, P_3$  を中心とした2次変換という. この2次変換は,  $P_i$  には  $Q_j$  と  $Q_k$  を通る直線を, 直線  $L_{ij}$  には点  $Q_k$  を, それ以外の点には一点を対応させるものである.

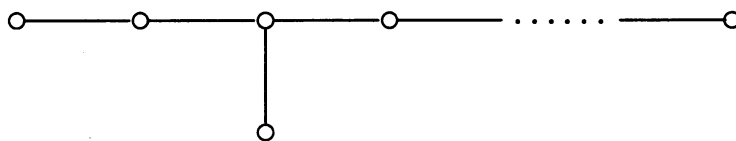
複素射影平面  $\mathbf{P}^2$  上で, 一般の位置にある順序付きの  $n$  点の配置空間

$$X_n = \{(P_1, \dots, P_n) \mid P_i \in \mathbf{P}^2, P_1, \dots, P_n \text{ は一般の位置}\} / PGL(3)$$

を考える.  $PGL(3)$  は対角的に作用しているとする. また  $\mathbf{P}^2$  の  $n$  点が一般の位置にあるとは次の (1), (2), (3) を満たすことである.

- (1)  $P_i \neq P_j$  ( $i \neq j$ ),
- (2) どの3点も同一直線上にない,
- (3) 3点 ( $P_1, P_2, P_3$  としよう) を中心とした2次変換  $\varphi$  を施すと, 新たな  $n$  点すなわち  $Q_1, Q_2, Q_3$  と  $\varphi(P_4), \dots, \varphi(P_n)$  が得られる. どの3点を中心とした2次変換を繰り返しても新たに得られた  $n$  点に対して (2) が成り立つ.

さてこの空間  $X_n$  には, 以下で説明するように,  $n$  個の頂点からなる次の Coxeter 図形で決まる Coxeter 群が作用する.



射影平面  $\mathbf{P}^2$  上で一般の位置にある  $n$  個の点をブローアップして得られる

曲面を  $S$  とし,  $S$  上の第一種例外曲線の集合を  $\mathcal{E}_S$  とする.

$$\pi : S \longrightarrow \mathbf{P}^2$$

$$\mathcal{E}_S = \{L \mid L \text{ は } S \text{ 上の第一種例外曲線}\}$$

この曲線の集合  $\mathcal{E}_S$  の置換であって, 交叉関係を変えないもの全体のなす群を考える.

$$W_n = \{g : \mathcal{E}_S \text{ の置換} \mid L \cap L' \neq \emptyset \Rightarrow g(L) \cap g(L') \neq \emptyset (L, L' \in \mathcal{E}_S)\}$$

この群は上の Coxeter 図形に対応した Coxeter 群に同型になることが知られている.

$S$  を  $\mathbf{P}^2$  にブローダウンする仕方は一通りではない.  $\mathcal{E}_S$  の中から互いに交わらない  $n$  本の曲線を選べば, それらをブローダウンすることによって  $S$  を  $\mathbf{P}^2$  にブローダウンできる. このような  $n$  本の第一種例外曲線に順序をつけたものの集合を framing と呼ぼう.

$$\mathfrak{F}_S = \{(L_1, \dots, L_n) \mid L_i \in \mathcal{E}_S, L_i \cap L_j = \emptyset (i \neq j)\}.$$

曲面  $S$  とその framing  $\mathcal{L} = (L_1, \dots, L_n) \in \mathfrak{F}_S$  のペア  $(S, \mathcal{L})$  の集合を考える. 2つのペア  $(S_1, \mathcal{L}_1)$  と  $(S_2, \mathcal{L}_2)$  が同型であるとは,  $S_1$  から  $S_2$  への同型写像  $\varphi$  であって  $\varphi(\mathcal{L}_1) = \mathcal{L}_2$  を満たすものがある時をいう.

$\mathbf{P}^2$  を  $(P_1, \dots, P_n)$  でブローアップした曲面  $S$  および例外曲線の組が与える framing  $\mathcal{L} = (E_1, \dots, E_n) \in \mathfrak{F}_S$  ( $E_i$  は点  $P_i$  から生じる例外曲線) の組  $(S, \mathcal{L})$  に対して  $X_n$  の元の代表  $(P_1, \dots, P_n)$  を対応させることにより

$$X_n \xrightarrow{1:1} \mathfrak{M}_n = \left\{ (S, \mathcal{L}) \left| \begin{array}{l} S : \mathbf{P}^2 \text{ の一般の位置にある} \\ n \text{ 点ブローアップ.} \\ \mathcal{L} \in \mathfrak{F}_S \end{array} \right. \right\} / \simeq$$

という 1 対 1 対応が得られる. 群  $W_n$  は  $\mathcal{E}_S$  の置換群なので  $\mathfrak{F}_S$  に作用する. この作用によって  $W_n$  は  $\mathfrak{M}_n$  へ作用し, 上の対応を通じて  $X_n$  へ作用する.

## 2 3次曲面の族とルート系

前節において  $n = 6$  のとき曲面  $S$  は, 3次元射影空間で定義された3次曲面と同型になる. 3次曲面上には27本の射影直線がのっているのであるが, この27本の直線が,  $S$  上の第一種例外曲線の集合  $\mathcal{E}_S$  に一致する.

例 2.1. (Clebsch の diagonal surface)  $\mathbf{P}^4$  のなかで

$$\begin{cases} x_0^3 + \cdots + x_4^3 = 0 \\ x_0 + \cdots + x_4 = 0 \end{cases}$$

で定義される曲面  $S$  上には

$$x_i + x_j = 0, x_k + x_l = 0, x_m = 0 \quad 0 \leq i, j, k, l, m \leq 4 \text{ (distinct)}$$

で定義される 15 本の射影直線と

$$\begin{cases} x_i + x_j + \alpha x_k = 0 & i, j, k : \text{distinct} \\ x_l + x_m + (1 - \alpha)x_n = 0 & l, m, n : \text{distinct} \\ \#(\{i, j, k\} \cap \{l, m, n\}) = 1 \\ \alpha \text{は黄金比 } \alpha^2 - \alpha - 1 = 0 \end{cases}$$

で決まる 12 本の射影直線があり, 合計 27 本の射影直線となる.

$S$  上の一点を指定することは, 7 番目の点を指定することになるので

$$\pi : X_7 \longrightarrow X_6 \quad (7 \text{ 番目を忘れる})$$

$$\pi^{-1}(t) = S - \bigcup_{L \in \mathcal{E}_S} L, \quad S \text{ は } \mathbf{P}^2 \text{ の 6 点ブローアップ}$$

という写像が得られる.

問題は, この写像をルート系の言葉で記述し, ワイル群の対称性をもったコンパクト化を構成することにある. さらにその幾何学的な構造をルート系の構造から記述することが目的である.

$\mathfrak{M}_6$  に関しては成木氏による結果がある ([1]).

定理 2.2.  $T$  を  $D_4$  型の随伴リー群の極大トーラス部分群とし,  $R$  をそのルート系とする.

$$\varphi : \tilde{T} \longrightarrow T$$

を単位元でのブローアップとする.  $\alpha \in R$  に対して

$$H_\alpha = \{t \in T \mid \alpha(t) = 1\}$$

とし  $\tilde{H}_\alpha$  をその狭義引き戻しとする. この時

$$\mathfrak{M}_6 = \tilde{T} - \bigcup_{\alpha \in R} \tilde{H}_\alpha$$

この定理は framing 付きの非特異 3 次曲面の moduli が  $D_4$  型のトーラス部分群の構造を持っていることを示している。ではこの moduli の上にある 3 次曲面の family はルート系の言葉でどのように与えられるであろうか。これが我々の次の課題であった。上の定理に対応して、 $\mathfrak{M}_7$  は  $E_6$  型の随伴リー群の極大トーラス部分群から作られるという結論が得られる。

**定理 2.3.**  $T$  を  $E_6$  型の随伴リー群の極大トーラス部分群とし、 $R$  をそのルート系とする。ルート  $\alpha \in R$  に対して  $H_\alpha$  を上と同様に定義する。 $T$  の元  $t$  に対して  $t^{-1}$  を対応させる  $T$  の involution を  $\iota$  とする。このとき

$$\mathfrak{M}_7 = \left( T - \bigcup_{\alpha \in R} H_\alpha \right) / \langle \iota \rangle.$$

次に  $\mathfrak{M}_7$  から  $\mathfrak{M}_6$  への射影をルート系を使って与えよう。ルート系のタイプを  $\Phi$  としたとき  $\Phi$  型ルート系を  $R(\Phi)$  と書くことにする。

$$CR(\Phi) = \left\{ \begin{array}{l} \prod_{i=1}^4 \frac{e^{\gamma_i} - 1}{e^{\gamma'_i} - 1} \left| \begin{array}{l} R \subset R(\Phi), \quad R \simeq R(D_4) \\ \gamma_i, \gamma'_i \in R \quad (1 \leq i \leq 4) \\ (1) \sum_{i=1}^4 \gamma_i = \sum_{i=1}^4 \gamma'_i \\ (2) (\gamma_i, \gamma_j) = (\gamma'_i, \gamma'_j) = 0 \quad i \neq j \\ (3) (\gamma_i, \gamma'_j) \neq 0 \quad \forall i, \forall j \end{array} \right. \end{array} \right\}$$

とする。ここで  $e^\gamma$  はルート  $\gamma$  を乗法的に表したもので  $(\cdot, \cdot)$  は内積。 $CR(\Phi)$  の元は  $\Phi$  型の随伴群の極大トーラス部分群上の有理関数である。特に条件 (1) により  $CR(E_7)$  の元は  $\mathfrak{M}_7 = (T - \bigcup_{\alpha \in R} H_\alpha) / \langle \iota \rangle$  上の正則関数を与える。

$CR(\Phi)$  の元  $r$  は、もともとは射影直線上の点の複比から得られた関数であり、

$$r^{\pm 1}, (1-r)^{\pm 1}, (1-1/r)^{\pm 1}$$

はいずれも  $CR(\Phi)$  の元となる。これらを  $D_4$  型の複比関数とよぶことにする。

複比関数を使って  $\mathfrak{M}_7, \mathfrak{M}_6$  が与えられる。

**定理 2.4.**  $E_l$  型の随伴群の極大トーラス部分群を  $T_l$  と書く。 $T_l$  の有理関

数体  $\mathbb{C}(T_l)$  のなかで  $CR(E_l)$  の元が生成する部分環を  $\mathbb{C}[CR(E_l)]$  と書くと

$$\mathfrak{M}_7 \simeq \text{Spec}(\mathbb{C}[CR(E_7)]),$$

$$\mathfrak{M}_6 \simeq \text{Spec}(\mathbb{C}[CR(E_6)]),$$

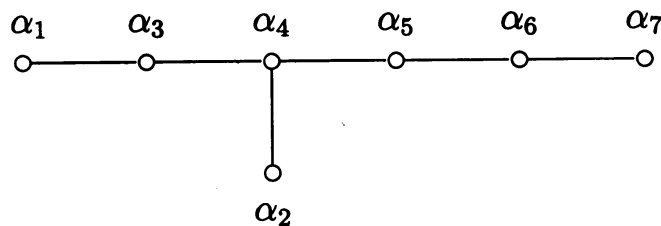
である。  $R(E_7)$  において  $\alpha_7 = 0$  とすることによって射影

$$\pi : \mathfrak{M}_7 \longrightarrow \mathfrak{M}_6$$

が得られる。このファイバーは3次曲面  $S$  から27本の射影直線をぬいた曲面に同型になる。

$$\pi^{-1}(t) = S - \bigcup_{L \in \mathcal{E}_S} L, \quad t \in \mathfrak{M}_6$$

さらに  $E_6$  型ワイル群  $W_6$  はルート系への作用を通じて  $\mathfrak{M}_7, \mathfrak{M}_6$  に作用し、この作用は射影  $\pi$  と可換である。



### 3 コンパクト化

$E_7$  型ワイル群  $W_7$  もルートへの作用を通じて  $\mathfrak{M}_7$  に作用している。この作用は次に述べる  $\mathfrak{M}_7$  のコンパクト化を考える上で重要である。

$\mathfrak{M}_l$  ( $l = 6, 7$ ) の点  $P$  に対して  $CR(E_l)$  の元  $r$  は  $\mathbb{C}^\times - \{1\}$  に値をとる。これを  $\mathbb{P}^1$  への写像と想って、  $P \mapsto (r_i(P))_{r_i \in CR(E_l)}$  という対応で写像

$$\Psi_l : \mathfrak{M}_l \longrightarrow (\mathbb{P}^1)^{N_l}$$

を考える。ここで  $N_l = \#CR(E_l)$ 。このとき次が成り立つ。

定理 3.1.  $\Psi_l$  は埋め込みとなる.

そこで  $\Psi$  の像の  $(\mathbf{P}^1)^{N_l}$  のなかでの閉包  $\overline{\mathfrak{M}_l}$  をとると次が成り立つ.

定理 3.2. 次の図は可換となる.

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{M}_7 & \xrightarrow{\Psi_7} & (\mathbf{P}^1)^{N_7} \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi' \\ \mathfrak{M}_6 & \xrightarrow{\Psi_6} & (\mathbf{P}^1)^{N_6} \end{array}$$

ここで  $\pi'$  は  $CR(E_6) \subset CR(E_7)$  と思って射影をとったもの.

(1)  $\overline{\mathfrak{M}_l}$  ( $l = 6, 7$ ) は非特異な代数多様体となり, ワイル群  $W_6$  が  $\pi'$  と可換に作用する.

(2) ワイル群  $W_7$  はルート系  $R(E_7)$  への作用を通じて  $\overline{\mathfrak{M}_7}$  に作用する.

(3) (これは [1] の結果の焼き直し)  $\mathfrak{M}_6$  の補集合  $\overline{\mathfrak{M}_6} - \mathfrak{M}_6$  は正規交差する因子の和となる. これらの因子はワイル群  $W_6$  の作用で 2 つの軌道に分かれる.

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{\overline{\mathfrak{M}_6}} &= \overline{\mathfrak{M}_6} - \mathfrak{M}_6 \text{ の既約成分の集合} \\ &= \mathcal{D}(A_1 + A_5) \cup \mathcal{D}(3A_2) \quad (W_6 \text{ 軌道分解}) \end{aligned}$$

ただし

$$\begin{aligned} D \in \mathcal{D}(\Phi) &\Leftrightarrow R(\Phi) = \{ \alpha \in R(E_6) \mid S_\alpha(D) = D \} \\ S_\alpha &\text{ はルート } \alpha \text{ に関する鏡映} \end{aligned}$$

(4)  $\mathfrak{M}_7$  の補集合  $\overline{\mathfrak{M}_7} - \mathfrak{M}_7$  は正規交差する因子の和となる. これらの因子はワイル群  $W_7$  の作用によって 4 つの軌道に分かれる.

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{\overline{\mathfrak{M}_7}} &= \overline{\mathfrak{M}_7} - \mathfrak{M}_7 \text{ の既約成分の集合} \\ &= \mathcal{D}(A_1 + D_6) \cup \mathcal{D}(A_2 + A_5) \cup \mathcal{D}(A_1 + 2A_3) \cup \mathcal{D}(A_7) \\ &\quad (W_7 \text{ 軌道分解}) \end{aligned}$$

$$D \in \mathcal{D}(\Phi) \Leftrightarrow R(\Phi) = \{ \alpha \in R(E_7) \mid S_\alpha(D) = D \}$$

(5)  $\mathcal{D}_{\overline{\mathfrak{M}_l}}$  の元  $D_1, D_2$  の間の交叉関係は, 次のようにルートの言葉で簡単に記述できる.  $D_i \in \mathcal{D}(\Phi_i)$  ( $i = 1, 2$ ) としたとき,  $D_1$  と  $D_2$  が交点を持つことと,  $\Phi_1$  の既約成分  $R_1$  であって  $\Phi_1 = R_1 \oplus R_1^\perp$  かつ  $R_1 \subset \Phi_2$  を満たすものがあることは同値である.

こうしてワイル群の対称性を持ったコンパクト化がルート系を使って構成できた. 現在, 論文を用意しているところなので詳細はそちらを参照いただきたい.

## 参考文献

- [1] I. Naruki, Cross ratio variety as a moduli space of cubic surfaces, Proc London Math. Soc. (3), 45 (1982), no. 1, pp. 1–30.