

作用素環的量子群の作用について  
— コンパクト Kac 環の極小作用によって定まるある自己同型群に関して —

北海道大学大学院理学研究科  
山ノ内 毅彦

## 1 はじめに

このノートでは、コンパクト Kac 環の極小作用によって定まるある自己同型群に関して最近得られた結果を紹介する。

$\mathbb{K} = (M, \delta, R, h)$  を Kac 環とする.  $M$  の unital von Neumann 部分環  $N$  は、

$$\delta(N) \subseteq N \otimes M$$

をみたすとき、左余イデアル とよばれる。

Izumi-Longo-Popa は、[6] においてコンパクト Kac 環の極小作用に関して、次のような完全ガロア対応が成り立つことを示した (cf. [3]).

**定理 1.1.** ([6])  $\mathbb{K}$  をコンパクト Kac 環、 $\alpha$  を因子環  $A$  への  $\mathbb{K}$  の極小作用 (定義は次節を参照) とする. このとき、対応

$$N \mapsto A(N) := \{a \in A : \alpha(a) \in A \otimes N\}$$

は、 $\mathbb{K}$  の左余イデアル全体から、 $A^\alpha \subseteq A$  の中間因子環全体への間の全単射を与える。

我々は、このガロア対応を踏まえて [8] において次のような結果を得た。

まず  $\mathbb{K}, \alpha, A$  は上の定理のようなものとする. 次に  $A^\alpha$  を  $\alpha$  の不動点環、i.e.,  $A^\alpha := \{a \in A : \alpha(a) = a \otimes 1\}$  として、

$$\text{Aut}(A/A^\alpha) := \{\theta \in \text{Aut}(A) : \theta|_{A^\alpha} = id\}$$

によって定義される  $A$  のある自己同型群を考える. また、 $A$  の有限次元部分空間  $D$  が  $\alpha(D) \subseteq D \otimes M$  をみたすとき、 $\alpha$ -不変部分空間とよぶことにする. さらに、 $A$  の有限次元部分空間  $D$  が ( $A$  における) ヒルベルト空間であるとは

- (1) 任意の  $a, b \in D$  に対し  $b^*a \in \mathbb{C}$ ;
- (2) 任意の  $a \in A \setminus \{0\}$  に対し  $aD \neq \{0\}$

をみたすときをいう。

**定理 1.2.** ([8])  $A^\alpha$  は infinite とする.  $\text{Aut}(A/A^\alpha)$  の元  $\theta$  が、 $A$  のすべての  $\alpha$ -不変ヒルベルト部分空間を不変にするならば、次の性質をみたすユニタリー  $v(\theta)$  が  $\widehat{M}'$  に存在する:

- (1)  $\hat{\delta}'(v(\theta)) = v(\theta) \otimes v(\theta)$  (ただし  $\hat{\delta}'$  は Kac 環  $\widehat{\mathbb{K}}'$  の余積);
- (2)  $A^\alpha \subseteq A$  の中間因子環  $A^\theta$  が ILP-ガロア対応によって定める  $\mathbb{K}$  の左余イデアル  $N(\theta)$  は

$$N(\theta) = \{x \in M : v(\theta)xv(\theta)^* = x\}$$

と与えられる。

注意. 定理 1.2 の (1) はユニタリー  $v(\theta)$  が Kac 環  $\widehat{\mathbb{K}}'$  の **intrinsic group** に属することを示している. また, 一般論より Kac 環の intrinsic group の元は  $\text{Ad} \cdot$  によりその (Pontrjagin) dual の自己同型を引き起こすことが知られているが, (2) は問題の左余イデアル  $N(\theta)$  が  $v(\theta)$  が引き起こす  $M$  の自己同型の不動点環によって得られることを示している.

ここでは, [9] に従って, この定理がより整備された形で証明できることを述べ, さらにそれを使った応用を幾つか紹介する.

## 2 主な結果とその応用

以後  $\mathbb{K} = (M, \delta, R, h)$  はコンパクト Kac 環,  $\alpha: A \rightarrow A \otimes M$  を  $\mathbb{K}$  の因子環  $A$  上の極小作用, つまり

(i)  $A \cap (A^\alpha)' = \mathbb{C}$ ;

(ii)  $\text{span} \{(id \otimes \omega)(\alpha(a)) : a \in A, \omega \in M_*\}$  は  $A$  で  $\sigma$ -strong\* 位相で稠密

をみたす  $\mathbb{K}$  の作用とする. (注: 上の (ii) は接合積  $A \rtimes_\alpha \mathbb{K}$  が因子環になるという条件におきかえてもよいことが知られている.)

定理 2.1.  $\theta$  を  $\text{Aut}(A/A^\alpha)$  の元とする.

(1) Kac 環  $\widehat{\mathbb{K}}'$  の intrinsic group  $G(\widehat{\mathbb{K}}')$  の元 (ユニタリー)  $v(\theta)$  が存在し,  $\beta_\theta := \text{Ad} v(\theta)$  によって  $M$  の自己同型を定めれば

$$(id_A \otimes \beta_\theta) \circ \alpha = \alpha \circ \theta$$

をみたす.

(2)  $A^\alpha \subseteq A$  の中間因子環  $A^\theta$  が ILP-ガロア対応によって定める  $\mathbb{K}$  の左余イデアル  $N(\theta)$  は,  $N(\theta) = M^{\beta_\theta}$  によって与えられる. したがって

$$A^\theta = \{x \in A : \alpha(x) \in A \otimes M^{\beta_\theta}\}$$

となる.

注意. この定理により, 定理 1.2 における  $A^\alpha$  の無限性および  $\theta$  があらゆる  $\alpha$ -不変ヒルベルト部分空間を保存するという仮定は実は不要であったことがわかる.

系 2.2. 群  $\text{Aut}(A/A^\alpha)$  は the intrinsic group  $G(\widehat{\mathbb{K}}')$  に位相同型である.

今,  $M$  の自己同型  $\beta$  で

$$(id_M \otimes \beta) \circ \delta = \delta \circ \beta$$

をみたすもの全体を  $\mathcal{G}$  とかくことにする. [2] によれば,  $G(\widehat{\mathbb{K}}')$  は, 写像

$$v \in G(\widehat{\mathbb{K}}') \mapsto \text{Ad} v \in \mathcal{G}$$

により  $\mathcal{G}$  に位相同型である. このとき  $\mathcal{G}$  の定義より  $M^\mathcal{G}$  は  $\mathbb{K}$  の左余イデアルになることに注意する.

命題 2.3.  $\Gamma := \text{Aut}(A/A^\alpha)$  とする. このとき,  $M^\mathcal{G}$  は, ガロア対応を通して中間因子環  $A^\Gamma$  によって定まる左余イデアルと一致する.

定義.  $P$  を von Neumann 環、 $Q$  をその von Neumann 部分環とする.

- (1)  $P$  のユニタリー  $u$  で  $uQu^* = Q$  をみたすもの全体を  $Q$  の  $P$  における正規化群と呼んだ. この群を  $N(Q)$  で表すことにする.
- (2)  $N(Q)'' = P$  が成り立つとき、 $Q$  は  $P$  で正則であるという.
- (3)  $P$  の極大可換 von Neumann 部分環  $D$  が、 $P$  のカルタン部分環であるとは、 $D$  が  $P$  で正則でかつ忠実正則な条件付き期待値の像になることであった.
- (4)  $Q \subseteq P$  が共通のカルタン部分環をもつとは、 $Q, P$  の両方にとってカルタン部分環になるような可換 von Neumann 環が存在するときをいう.

一般論により、作用  $\alpha$  は opposite Kac 環  $\mathbb{K}^\sigma$  の  $A'$  への作用  $\alpha'$  を誘導する. このとき  $\alpha'$  も極小作用であることが容易にわかる.  $U(A^\alpha)$  を  $A^\alpha$  のユニタリー群としたとき、商群  $N(A^\alpha)/U(A^\alpha)$  が  $\text{Aut}(A' \rtimes_{\alpha'} \mathbb{K}^\sigma/A')$  に同型になることを使えば次の結果を得る. 以後 Kac 環  $\mathbb{K}$  は 有限次元 とする.

定理 2.4. ガロア対応を通して、中間因子環  $N(A^\alpha)''$  によって定まる  $\mathbb{K}$  の左余イデアル von Neumann 部分環は Kac 部分環  $G(\mathbb{K})''$  に一致する. つまり

$$N(A^\alpha)'' = \{a \in A : \alpha(a) \in A \otimes G(\mathbb{K})''\}.$$

系 2.5. 次は同値である:

- (1)  $\mathbb{K}$  は余可換である;
- (2)  $A^\alpha$  は  $A$  において正則である.

もし  $A$  が AFD  $II_1$  型因子環ならば、上の条件は次の命題とも同値である:

- (3)  $A^\alpha \subseteq A$  は共通のカルタン部分環をもつ.

次の系は、「共通のカルタン部分環をもつ」という条件が作用する群の構造をある程度規定してしまうという興味ある結果で、[7] において証明されたが、上の系を使うことで別証明が得られる.

系 2.6. ([7, Theorem 3.4])  $\mathbb{K}$  は可換であるとし、 $A$  は AFD  $II_1$  型因子環とする. つまり、 $\alpha$  はある有限群  $G$  の  $A$  への外部的作用とする. このとき  $A^\alpha \subseteq A$  が共通のカルタン部分環をもつための必要十分条件は  $G$  が可換であることである.

注意. この講演後、[1] において、上の系 2.5 を以下のように幾らか精密にすることができた.

- (1) まず、系 2.5 の (2), (3) は  $A$  が AFD  $II_\infty$  型因子環のときも同値である. したがって、AFD  $II$  型因子環  $A$  に対し系 2.5 のすべての条件は同値である.
- (2) 系 2.5 において、(3) から (2) (よって (3) から (1)) はどんな因子環  $A$  についても成り立つ. ただし、その逆は ( $A$  が AFD であっても) 一般には成り立たない.

## 参考文献

- [1] H. Aoi and T. Yamanouchi, Preprint.
- [2] De Cannière, On the intrinsic group of a Kac algebra, *Proc. London Math. Soc.*, **39** (1979), 1–20.
- [3] M. Enock, Sous-facteurs intermediaires et groupes quantiques mesures, *J. Operator Theory*, **42** (1999), 305–330.
- [4] M. Enock and J.-M. Schwartz, Produit croisé d’une algèbre de von Neumann par une algèbre de Kac II, *Publ. RIMS, Kyoto Univ.*, **16** (1980), 189–232.
- [5] M. Enock and J.-M. Schwartz, *Kac Algebras and Duality of Locally Compact Groups*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg (1992).
- [6] M. Izumi, R. Longo and S. Popa, A Galois correspondence for compact groups of automorphisms of von Neumann algebras with a generalization to Kac algebras, *J. Funct. Anal.*, **155** (1998), 25–63
- [7] V.F.R. Jones and S. Popa, Some properties of MASA’s in factors, in “Invariant subspaces and other topics”, eds. C. Apostol, R.G. Douglas, B. Sz.-Nagy, and D. Voiculescu, (*Operator Theory: Adv. Appl.* 6), Birkhäuser Verlag, Basel-Boston, (1982), 89–102.
- [8] T. Yamanouchi, On dominance of minimal actions of compact Kac algebras and certain automorphisms in  $\text{Aut}(A/A^\alpha)$ , *Math. Scand.*, **84** (1999) 297–319.
- [9] T. Yamanouchi, Preprint.