

周期的な凹凸を有する平板間流路内流れの流動特性

佐賀大学理工学部 足立 高弘 (Takahiro ADACHI)

1 緒言

多くの工学分野において、熱交換器の伝熱促進技術の開発が望まれている。現在、安価で高効率な熱交換器として、プレート式熱交換器がある。プレート式熱交換器では、省スペース、省資源、省エネルギー、低騒音などの要求から流速や代表寸法が小さくなり低レイノルズ数化する傾向にある。そこで、層流域における伝熱促進法の研究が重要となる。

プレート式熱交換器の伝熱性能を向上させる代表的な手法の一つとして乱れ促進体を用いる方法がある。すなわち、流れ方向に周期的に障害物を設置したり凹凸を設けることで、流れの剥離や自励振動を誘起し、温度境界層の発達を抑制されて熱伝達が促進されることが知られており、実験的にも数值的にも広く研究が行われている。代表的なものとして、平行平板間流路伝熱面の片面あるいは両面に周期的に矩形 [1]-[7] や、正三角形 [8]-[10]、台形 [11] の凹凸を設け、断面形状を流れ方向に周期的に変化させたり、フィン [12]-[14] を配置したり、それらを複数列 [15] にわたり配置した場合についての熱流動特性に関する研究がある。

このような流路を流体が通過する場合には、レイノルズ数の増加に伴い、流れの状態が2次元定常流、2次元非定常振動流そして3次元非定常流に遷移することが確認されている [8, 13]。特に、2次元定常流では障害物の影響で流線が湾曲し、ケルビン・ヘルムホルツ (K-H) 不安定性が発生する。その結果、本来減衰すべき平板間流れを不安定にするトルミン・シュリヒティング (T-S) 波が励起され、2次元振動流に遷移すると報告されている [8]-[10]。また、流れ場および温度場の助走区間は短く、障害物や凹凸を3個から4個通過すると、障害物や凹凸の間隔と同じ周期を持った十分発達した状態に達することが実験 [7, 8, 13] により報告されている。数値計算では、2次元性の仮定の下で2個の障害物または凹凸を有する流路（これを1周期と呼ぶ、図1 (b) 参照）について、入口と出口の条件が同じ（周期境界条件という）として流れ場と温度場を求めることが行われてきた [1, 12, 13]。熱伝達は、障害物を配置することにより平行平板の場合と比べて3倍から4倍促進されるが、同時に圧力損失もそれ以上に増加しポンプ動力が増大するケースが多いと報告されている。

伝熱促進率を維持し、圧力損失の増大を抑制する乱れ促進体を用いた平行平板間流路の最適形状を明らかにするためには、圧力損失と熱伝達促進の効率 η [= (熱伝達の増加率) / (圧力損失の増加率)] が1を越える流路形状を明らかにすることが重要な問題である。著者等は、これまでに平行平板伝熱面に矩形の凹凸を設けた5通りの異なる幾何形状をもつ流路の圧力損失と熱伝達特性を調べ、平行平板の両面に対称あるいは非対称に凹部（拡大溝）を設けた流路が高い効率を示すことを明らかにしてきた [16]-[19]。

そこで、ここでは凹部が平行平板の中心線に対して対称な場合、すなわち矩形の拡大溝を有する場合を取り上げ溝幅比 (l/L) の影響を調べる (図1 参照)。溝幅比が $l/L \rightarrow 0$ の極限では、流路は平行平板間流路に漸近し、定常流は T-S 波によって振動流に遷移する。一方、 $l/L \rightarrow 1$ の極限では流路は厚みの無視できるフィン付き流路に漸近する。この場合には、主流と凹面内

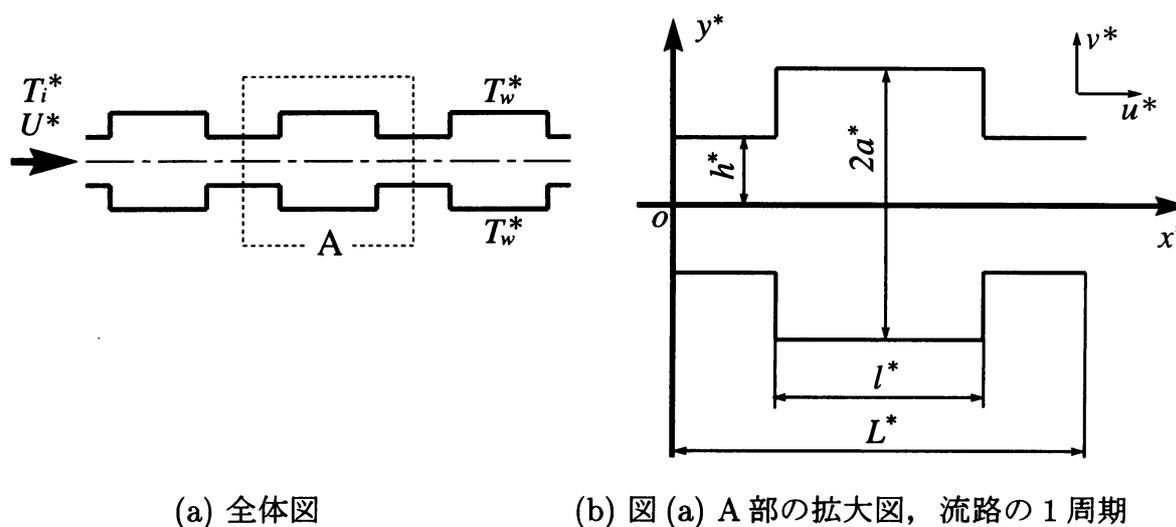


図 1: 流路形状と座標系

部の流れとの間の自由せん断層が発達するため K-H 不安定性によって流れが振動流に遷移することが考えられる。したがって、溝幅比 l/L の変化に応じて、定常流れを不安定にする不安定モードの交替がおこる可能性がある。

本報では、平行平板に流れ方向に周期的でかつ中心線に関して対称な矩形凹部（拡大溝）を設けた流路について、2次元性の仮定が成り立つ低レイノルズ数層流域の单相流を取り扱う。流れ場と温度場の状態、流体自励振動が発生する臨界レイノルズ数、圧力損失、熱伝達および圧力損失と熱伝達の相関を溝幅比の変化に対して数値的に求める。そして、伝熱促進率を維持し圧力損失の増大を抑制する矩形凹凸を有する平行平板間流路の最適流路形状を明らかにする。

2 定常流れの不安定性と臨界レイノルズ数

図 1(a) に平行平板に周期的な凹部（拡大溝）を設けた流路を示す。ここでは、流れが十分発達しており流路と同じ周期を持つと仮定し、図 1(b) に示すように流路の 1 周期分を取り上げる。図に示すように、流路は幅 $2h^*$ の平板に流れ方向に周期的かつ中心線に関して対称な凹部（拡大溝）を持つ 2 次元流路である。座標軸は、流路の中心線に沿って流れ方向に x^* 軸をとり、それに直角に y^* 軸をとる。この流路の形状を決める無次元数として、流路の周期 L 、凹部の溝幅 l および平行平板の中心線から上下凹部までの溝高さ a を次式で定義する。

$$L = L^*/h^*, \quad l = l^*/h^*, \quad a = a^*/h^*. \quad (1)$$

ただし、代表長さとして平行平板間流路の半値幅 h^* を用いる。また、アスタリスク * の付いた物理量は次元を有することを表す。なお、 $a = 1$ の場合には平行平板間流路となる。以下では、 $L = 8$ および $a = 2$ と固定し、 l を変更することによって溝幅比 l/L の影響を調べることにする。

まず、周期的な凹部を有する流路について、定常流から振動流に分岐する臨界レイノルズ数を非線形分岐理論による方法 (2.1 章) と、線形安定性理論による方法 (2.2 章) との異なる 2 つの方法で求め、得られた結果の比較を行う。

2.1 非線形分岐理論による方法

ここでは、差分法による数値シミュレーションで得られる代表量の振幅を非線形分岐理論の手法で整理し、臨界レイノルズ数を評価する方法を用いる。定式化は、2次元性の仮定を課しているため流れ関数と渦度で行う。また、後に熱伝達について調べるので、ここでエネルギー式の定式化も行うことにする。代表量として、代表長さ h^* 、代表速度 $U^* = 3U_m^*/2$ (U_m^* は流路幅 $2h^*$ の位置における流路の平均流速) を用いる。代表速度をこのように選ぶことは、 $a = 1$ の平行平板間流路の場合に流路中心での流速を代表量に選ぶことに相当する。さらに、壁面温度 T_w^* および流路流入部での流体の温度 T_i^* を用いて物理量の無次元化を行う ($T = (T^* - T_w^*) / (T_i^* - T_w^*)$)。ここでも、アスタリスク * の付いた物理量は次元を有することを表す。基礎方程式は、渦度輸送方程式、渦度の定義式であるポアソン方程式およびエネルギー方程式であり、渦度 $\omega(x, y, t)$ と流れ関数 $\psi(x, y, t)$ および温度 $T(x, y, t)$ を用いて無次元形で次式のようなになる。

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial \omega}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{\partial \omega}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{1}{Re} \nabla^2 \omega, \quad (2)$$

$$\omega = -\nabla^2 \psi, \quad (3)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial T}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{\partial T}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{1}{Pr Re} \nabla^2 T. \quad (4)$$

ここで、浮力の影響は無視した。基礎方程式に現れる無次元数は、レイノルズ数およびプラントル数で

$$Re = U^* h^* / \nu^*, \quad Pr = \nu^* / \kappa^* \quad (5)$$

であり、 ν^*, κ^* はそれぞれ、動粘性係数および熱拡散係数である。また、2次元場における流速 (u, v) は、流れ関数を用いて $u = \partial \psi / \partial y, v = -\partial \psi / \partial x$ と表される。

壁面においては、速度はゼロで温度は一定とする。さらに、流路内流量は一定であるとする。この場合、流路内の流量は $4/3$ となる。これらの仮定を用いると、境界条件は下方壁面においては $\psi = u = v = T = 0$ 、上方壁面においては $\psi = 4/3, u = v = T = 0$ となる。さらに、流れは流路の周期と同じ周期を持つ十分発達した状態にあると仮定しているため、流路1周期の流入部および流出部において次式の周期境界条件が成り立つ。

$$\psi(x + L, y, t) = \psi(x, y, t), \quad \omega(x + L, y, t) = \omega(x, y, t). \quad (6)$$

温度場についての周期境界条件は次式のようなになる。

$$\frac{T(x + L, y, t) - T_w}{T_b(x + L) - T_w} = \frac{T(x, y, t) - T_w}{T_b(x) - T_w}. \quad (7)$$

ここで、 $T_b(x) = \int |u| T dy / \int |u| dy$ は混合平均温度である。

数値計算は、有限差分法を用いて行う。渦度輸送方程式を時間微分項に2次のアダムス・バッシュフォース法、空間微分項に2次精度の中心差分を用いて差分化する。ポアソン方程式に対しては2次精度の中心差分を用いて差分化し、逐次過緩和法 (SOR 法) を用いる。エネルギー方程式に対しては、時間微分項に2次のアダムス・バッシュフォース法、移流項に3次の風上差分法および粘性項には2次の中心差分を用いて離散化する。初期条件は、 $t = 0$ において $\psi = \omega = 0, T = 0.5$ として計算を行う。時間および空間刻みは、 $\Delta t = 0.0005$ および

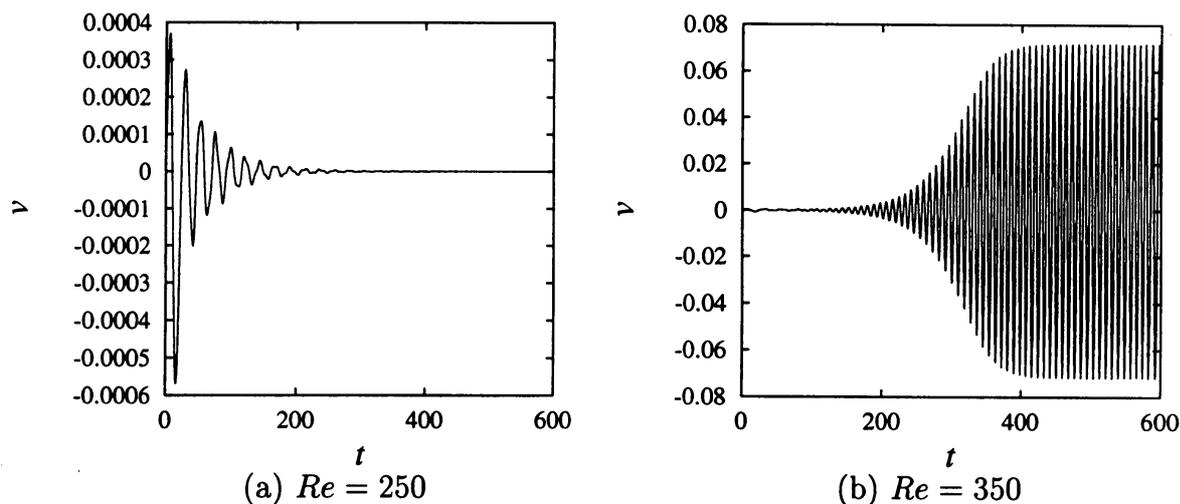


図 2: 代表速度 v at $(x, y) = (L/2, 0)$ の時間発展

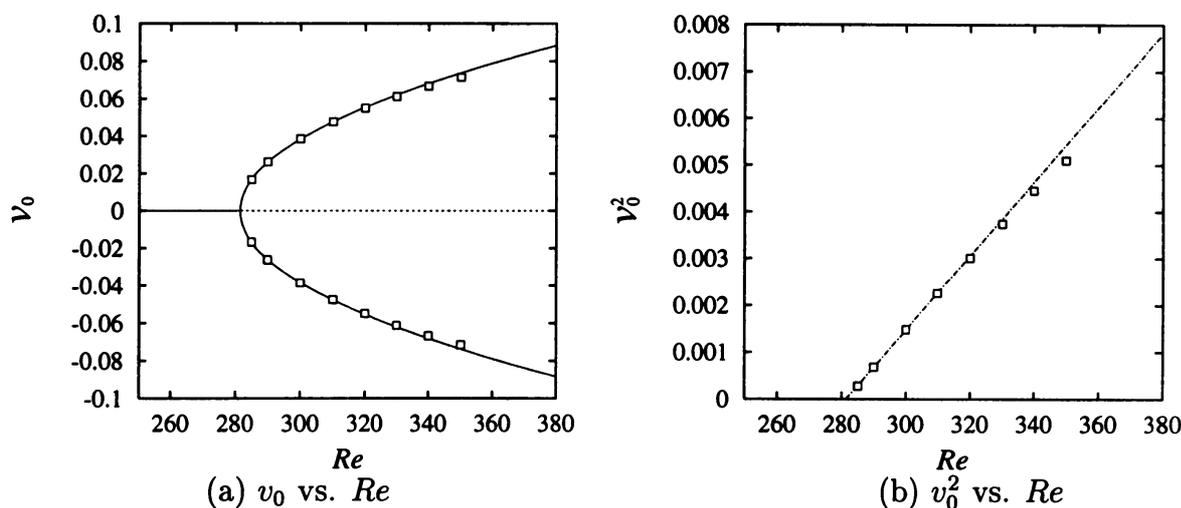


図 3: 分岐ダイアグラム

$\Delta x = \Delta y = 0.05$ とする. 刻みを $\Delta t = 0.0001$ および $\Delta x = \Delta y = 0.04$ と変更しても値が数%程度しか変化しないことを確かめている.

図 2 に, 数値シミュレーションの代表例として, 溝幅比 $l/L = 0.5$ で $Re = 250, 350$ の場合について, $(x, y) = (L/2, 0)$ における y 方向の速度 v の時間変化を示す. $Re = 250$ では, 速度は時間の経過とともに一定値ゼロに収束し流れが定常で中心線に関して対称となることがわかる. 一方, $Re = 300$ では速度 v は十分時間が経過すると, 速度変動の最大値と最小値の間を一定の変動幅を保ち, 特徴的な一つの振動数によって周期的に変動し, 流れが振動流になることがわかる. したがって, 定常流が振動流へ分岐する臨界点 Re_c は, $250 < Re < 350$ の範囲に存在することがわかる.

速度変動の振幅 v_0 ($v \sim v_0 \exp(2\pi i \Omega t)$) とレイノルズ数との関係を図 3(a) に示す. 流れが定常流の場合には $v_0 = 0$ となるが, 流れが振動すると $v_0 = 0$ の解は不安定となり $v_0 \neq 0$ となるので, $v_0 = 0$ から $v_0 \neq 0$ となる点が臨界点である. 図 3(a) では, 不安定な解を点線で, 安定

な解を実線で描いている。一方、臨界点近傍で

$$v_0^2 \sim (Re - Re_c) \quad (8)$$

なる関係が成り立つとき、定常流から振動流への分岐はホップ分岐であることが知られている [27]。そこで、図 3(b) に v_0^2 とレイノルズ数の関係を示す。臨界点近傍の v_0^2 を最小自乗法で直線近似したものを一点鎖線で示すと、臨界点近傍では式 (8) の関係が成り立っており、定常流から振動流への分岐はホップ分岐であると見なすことができる。臨界レイノルズ数は、その直線近似より、 $l/L = 0.5$ の場合、 $Re_c = 281$ と求まる。

2.2 スペクトル・エレメント法による線形安定性解析

臨界レイノルズ数を求めるもう一つ方法として、ここでは、定常解に微少な攪乱を加え、攪乱の時間的な振る舞いを調べる線形安定性解析をスペクトル・エレメント法を用いて行う。定式化は、数値計算における境界条件の取り扱い易さを考慮して速度 $\mathbf{u} = (u, v)$ および圧力 p を用いて行う。基礎方程式は、連続の式とナビエ・ストークスの方程式で次式のようになる。

$$\nabla \mathbf{u} = 0, \quad (9)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{u}. \quad (10)$$

ここで、レイノルズ数は式 (5) と同じように定義される。

境界条件は、壁面で速度ゼロおよび流路出入口で周期境界条件が成り立つとして、上下壁面において $\mathbf{u} = 0$ および流路 1 周期の入り口と出口において

$$\mathbf{u}(x + L, y, t) = \mathbf{u}(x, y, t) \quad (11)$$

となる。一方、圧力に関しては次式のように流路 1 周期について周期的な項とそうでない項の分離を行う。

$$p = -\beta x + \tilde{p}, \quad \tilde{p}(x + L, y, t) = \tilde{p}(x, y, t). \quad (12)$$

ここで、 $\beta = \beta(t)$ は流れを駆動する圧力勾配であり、流路内流量一定の条件

$$\int_{-1}^1 u dy = 4/3 \quad (13)$$

から求められる。

さらに、ここではペナルティー法を用いて非圧縮性の条件式 (9) を処理する [24, 25]。すなわち、連続の式 (9) は流速の発散が極めて小さいという条件の極限状態を表しているものと見なすことにし、ペナルティー数と呼ばれる非常に大きなパラメータ $\lambda \sim O(10^8)$ を用いて圧力 \tilde{p} を

$$\tilde{p} = -\lambda \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \quad (14)$$

と置き換える。このようにすると、 λ が非常に大きな数をとるときに式 (9) は限りなくゼロに近づくことになる。そして、式 (14) を用いて、圧力 \tilde{p} を変数から除外することができる。

レイノルズ数が相対的に小さい場合、凹凸を有する流路内の流れは定常流となる。定常状態においては、基礎式(10)の時間微分項を $\partial/\partial t = 0$ とおくことができる。したがって、定常解 $(\bar{U}(x, y), \bar{V}(x, y), \bar{\beta})$ に対する方程式は、式(12)および(14)を式(10)に代入して

$$\bar{U} \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} + \bar{V} \frac{\partial \bar{U}}{\partial y} = \bar{\beta} + \lambda \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \bar{U}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{V}}{\partial y} \right) + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial y^2} \right), \quad (15)$$

$$\bar{U} \frac{\partial \bar{V}}{\partial x} + \bar{V} \frac{\partial \bar{V}}{\partial y} = \lambda \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \bar{U}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{V}}{\partial y} \right) + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 \bar{V}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{V}}{\partial y^2} \right) \quad (16)$$

となる。境界条件は、上下壁面において $\bar{U} = \bar{V} = 0$ および流路1周期の入り口と出口において

$$\bar{U}(x+L, y) = \bar{U}(x, y), \quad \bar{V}(x+L, y) = \bar{V}(x, y) \quad (17)$$

となる。さらに、流路内の流量一定条件より

$$\int_{-1}^1 \bar{U}(x=0) dy = 4/3 \quad (18)$$

となる。

得られた定常解の線形安定性を調べるために、速度および圧力勾配の定常解に攪乱が加えられた状況を考えて速度および圧力を次式のようにおく。

$$u = \bar{U} + u' \exp(\sigma t), \quad v = \bar{V} + v' \exp(\sigma t), \quad \beta = \bar{\beta} + \beta' \exp(\sigma t) \quad (19)$$

ここで、攪乱の時間依存性を指数関数的と仮定している。式(19)に現れる σ は、線形増幅率と呼ばれる。式(19)を基礎方程式に代入し、定常解が満たすべき式を考慮し攪乱について2次以上の項を省略することにより線形化を行うと、攪乱に対する方程式として次式を得る

$$\sigma u' = -\bar{U} \frac{\partial u'}{\partial x} - u' \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} - \bar{V} \frac{\partial u'}{\partial y} - v' \frac{\partial \bar{U}}{\partial y} + \beta' + \lambda \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} \right) + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 u'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial y^2} \right), \quad (20)$$

$$\sigma v' = -\bar{U} \frac{\partial v'}{\partial x} - u' \frac{\partial \bar{V}}{\partial x} - \bar{V} \frac{\partial v'}{\partial y} - v' \frac{\partial \bar{V}}{\partial y} + \lambda \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} \right) + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 v'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v'}{\partial y^2} \right). \quad (21)$$

境界条件は、上下壁面において $u' = v' = 0$ および流路1周期の入り口と出口において

$$u'(x+L, y) = u'(x, y), \quad v'(x+L, y) = v'(x, y) \quad (22)$$

となる。さらに、流路内の流量は常に一定で4/3であることから攪乱成分による流量はゼロで

$$\int_{-1}^1 u'(x=0) dy = 0 \quad (23)$$

となる。

定常解の安定性は、線形増幅率 σ の符号によって決定される。 σ の実部を $\text{Re}[\sigma]$ 、虚部を $\text{Im}[\sigma]$ とする。 $\text{Re}[\sigma] > 0$ のとき攪乱は時間の経過とともに指数関数的に成長するので定常解は不安定であり、 $\text{Re}[\sigma] < 0$ のとき攪乱は時間の経過とともに減衰するので定常解は安定であり、 $\text{Re}[\sigma] = 0$ のときには攪乱は成長も減衰もしないので定常解は中立安定であると判別され

る。また, $\text{Im}[\sigma]$ は攪乱の振動の角振動数を与え, $\text{Re}[\sigma]=0$ のとき, $\text{Im}[\sigma] \neq 0$ ならば, 振動数 $\Omega = \text{Im}[\sigma]/2\pi$ をもったホップ分岐を生じる。

数値計算はスペクトル・エレメント法を用いて行う [22, 23]. スペクトル・エレメント法では, 計算すべき全領域をいくつかの要素に分割する。本研究においては, 5つの要素に分割する (図4の, ABKL, BCDE, EFGH, HIJK および BEHK). そして, 各々の要素は座標変換によって (x, y) 座標系から, $[-1, 1]$ を定義域とする局所計算座標系 (\bar{x}, \bar{y}) に変換される。例えば, 第 k 番目の要素が x 方向の長さ L^k で, $[a^k, b^k]$ の区間とすると, 座標変換式は

$$\bar{x} = \frac{2}{L^k}(x - a^k) - 1 \quad (24)$$

となる。

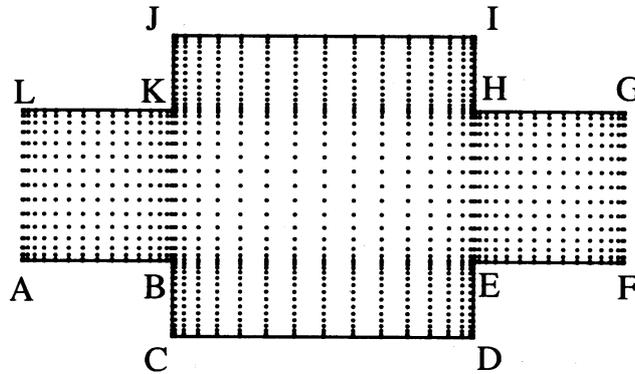


図4: スペクトル・エレメント法における領域分割と節点

第 k 要素の内部で, 定常解および攪乱速度を $N+1$ 個のガウス・ロバット点を通るラグランジュ多項式で近似する。すなわち,

$$(\bar{U}^k(\bar{y}, \bar{z}), \bar{V}^k(\bar{y}, \bar{z}), u^{ik}(\bar{y}, \bar{z}), v^{ik}(\bar{y}, \bar{z})) = \sum_{m=0}^N \sum_{n=0}^N (\bar{U}_{mn}^k, \bar{V}_{mn}^k, u_{mn}^{ik}, v_{mn}^{ik}) h_m(\bar{y}) h_n(\bar{z}), \quad (k = 1, \dots, 5). \quad (25)$$

ラグランジュ多項式は次式のようになる。

$$h_i(\bar{\zeta}) = \frac{2}{N} \sum_{n=0}^N \frac{1}{c_j c_n} T_n(\bar{\zeta}_j) T_n(\bar{\zeta}), \quad (26)$$

$$c_l = 1, \quad l \neq 0, N, \quad (27)$$

$$c_l = 2, \quad l = 0, N, \quad (28)$$

ここで, T_n は n 次のチェビシェフ多項式であり, $i = m, n$ また $\bar{\zeta} = \bar{y}, \bar{z}$ である。なお, ガウス・ロバット点は次のように定義される。

$$\bar{\zeta}_j = \cos \frac{\pi j}{N}, \quad j = 0, 1, \dots, N. \quad (29)$$

上述の h_i は第 k 要素の外部では恒等的にゼロであり，内部では次のラグランジュ補間関係式

$$h_i(\bar{x}_j^k) = \delta_{ij} \quad (30)$$

を満たす．ここで， δ_{ij} はクロネッカーのデルタである．

展開式 (25) をそれぞれの満たすべき方程式に代入し，弱形式を作りガレルキン法を用いると，展開係数に対する代数方程式が得られる．定常解の場合には，それらをニュートン・ラプソン法を用いて数値的に解き，攪乱に対する方程式の場合には増幅率 σ を固有値とする固有値問題に帰着させ QR 法を用いて固有値と固有ベクトルを数値的に求める．展開の打ち切り項数 N は 16 とする． $N = 14$ にしても残差は数%以内で値が変わらないことを確かめている．なお， $N = 16$ に対する節点の分布は，図 4 に示す通りである．

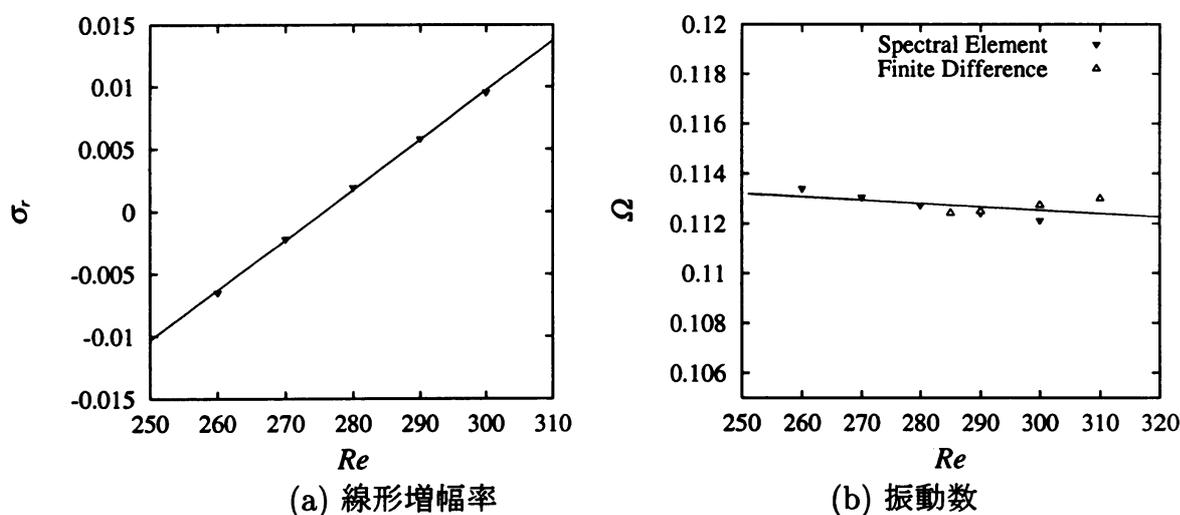


図 5: 線形安定性解析の結果

図 5 に，スペクトル・エレメント法による固有値解析結果の代表例として， $l/L = 0.5$ の場合について線形増幅率および振動数とレイノルズ数との関係を示す．図 (a) では，固有値解析で得られた固有値の中でその実部が最も大きな値を有するモードの固有値をレイノルズ数に対して示している．そのようなモードは，最大不安定モードと呼ばれる． $\sigma_r = 0$ ($\text{Re}[\sigma] = 0$) となる点が臨界レイノルズを与えるが，臨界点近傍において σ_r は直線的に変化していることがわかる．そこで，それらを直線近似することにより臨界レイノルズ数が $Re_c = 276$ と求められる．この値を，差分法と非線形分岐理論の方法から求めた値 $Re_c = 281$ と比較すると相対誤差は 2% 以下であり，よく一致している．また，図 (b) には固有値解析から得られた最大不安定モードの固有値の虚部から求めた振動数と非線形分岐理論から得られた振動数を同時に示している．これらも，よく一致していることがわかる．

2.3 流れのパターン

差分法による数値シミュレーションで得られる流れ場と線形安定性解析で得られる最大不安定モードの固有関数から求めた流れ場を， $l/L = 0.5$ に対し，臨界レイノルズ数よりもわずかに大きな $Re = 300$ の場合について比較する．差分法による数値シミュレーションで求めた瞬

間場を1周期にわたり時間平均した平均場の流線および瞬間場から平均場を差し引いた攪乱場のみの流線を1/6周期ずつ半周期分を図6に示す. 一方, 線形安定性解析で得られた定常解の流線および固有関数から求めた流線の実部と虚部を図7に示す.

図6と図7とを比較すると, 図6(a)に見られる平均場の流線は, 図7(a)に見られる定常解の流線と一致していることがわかる. また, 図6(b)-(c)の攪乱場の流線と, 図7(b),(c)の固有値解析の最大不安定モードの固有関数から求めた攪乱場の流線とは共に, その流れ場の構造は非常に類似している. したがって, これらの図より, Re が Re_c より大きくなると, 図7(b),(c)に見られるような構造を持つ攪乱場が成長し, 図6(a)および図7(a)に見られる定常流は不安定になり分岐が生じ, 図6(b)-(c)に示されるように攪乱波が下流に進行することによって流れが非定常になると考えることができる. このようにして, ここで示した2つの方法, すなわち非線形分岐理論を用いる方法と線形安定性理論を用いる方法とは, 矛盾なく同じ結果を与えていることが確認できる.

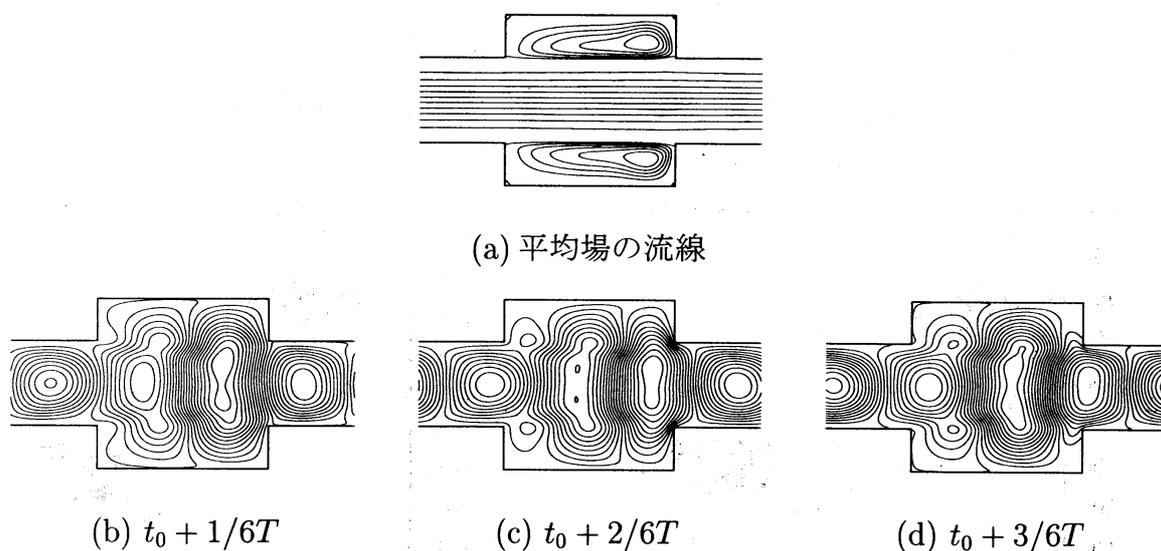


図6: 流れのパターン. (a) 平均場の流線, (b),(c),(d) 攪乱場の流線

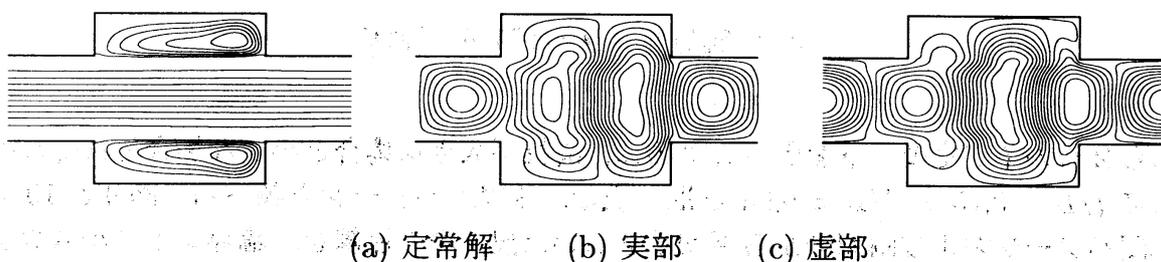


図7: 流れのパターン. (a) 定常解の流線, (b),(c) 攪乱場の流線

3 臨界レイノルズ数と溝幅比

差分法を用いた非線形分岐理論による方法とスペクトル・エレメント法を用いた線形安定性理論による方法とが同じ結果を与えることが確認できたので、以下の計算は差分法を用いた方法を用いることにする。流路形状パラメータを $L = 8, a = 2$ と固定し、 l を変更することにより $0.25 \leq l/L \leq 0.95$ の範囲で行った計算の結果を示す。図 8 に、臨界レイノルズ数 Re_c およびその振動数と溝幅比 l/L との関係を示す。図より、 l/L がおよそ 0.6 を境として、溝幅比が大きい場合と小さい場合で定常流を不安定にさせ振動流を引き起こす不安定モードの交替が生じていることがわかる。特に、図 (b) の振動数の図では、不安定モードの交替のために $0.6 < l/L < 0.675$ の間で値が不連続に変化していることがわかる。これら 2 つの不安定モードに対する臨界レイノルズ数を、 $l/L \leq 0.6$ と $l/L \geq 0.675$ のそれぞれの場合にべき関数で近似すると以下の近似式が得られる。これらの式より、不安定モードの交替が溝幅比 $l/L = 0.606$ の点で起こることがわかる。

$$Re_c = 218 + 7.39(l/L)^{-2.85} \quad \text{for } l/L \leq 0.6, \quad (31)$$

$$Re_c = -165 + 257(l/L)^{-0.873} \quad \text{for } l/L \geq 0.675. \quad (32)$$

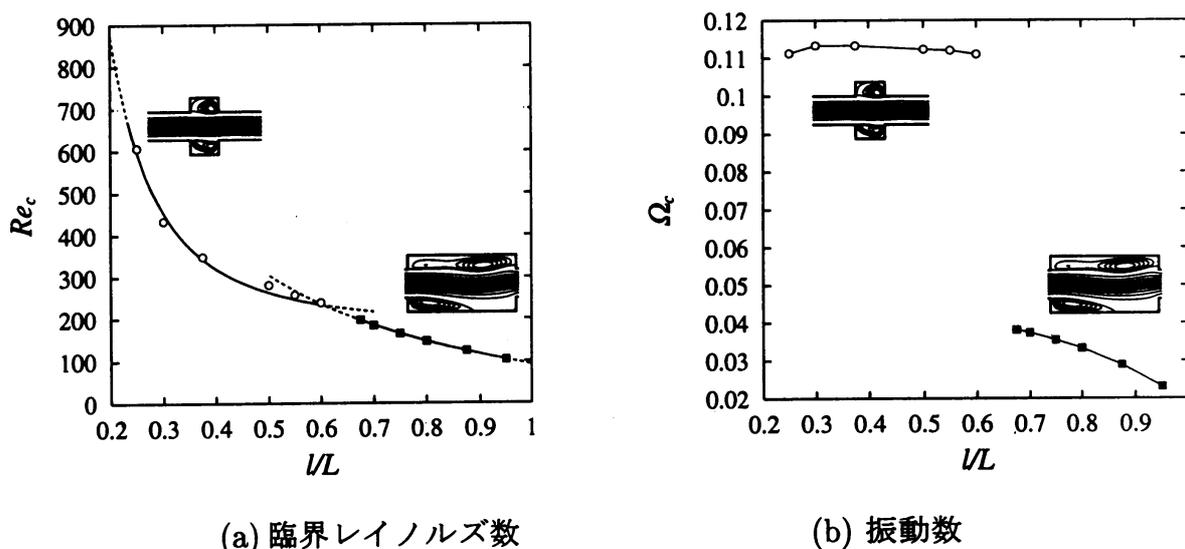


図 8: 臨界レイノルズ数を振動数

これら 2 つの不安定モードを調べるために、溝幅が大きな場合と小さな場合それぞれの代表例として $l/L = 0.25$ と $l/L = 0.95$ を取り上げ、流線の瞬間パターンおよび瞬間場から平均場を引いた攪乱場の流線を、臨界レイノルズ数よりわずかに大きなレイノルズ数に対して任意の時刻から $1/6$ 周期ずつ半周期にわたって描いたものを示す。流線の瞬間パターンにおいては、主流に生じた波の影響で、溝内部の循環渦が下流壁面に押しつけられるように移動し、同時に上流に新しい渦が形成されるという過程を繰り返すことがわかる（特に図 10(a)-(c) では顕著）。一方、攪乱場の流線図には、溝幅比が小さい場合には 1 流路周期あたり 2 対の渦が存在し、溝幅比が大きい場合には 1 個存在し、これらの渦は時間の経過とともに下流に進行することがわかる。このとき、同じ波数 α ($\alpha = 2n\pi/L$, n は 1

流路周期あたりに存在する波の数), 同じレイノルズ数で, 平行平板間流路流れの場合と攪乱波の振動数を比べると, $l/L = 0.25$ の場合には, $\alpha = 1.58, Re = 600$ で凹凸を有する流路と平板間流路の振動数はそれぞれ $\Omega = 0.112$ および $\Omega_p = 0.113$ となる. $l/L = 0.95$ の場合には, $\alpha = 0.785, Re = 110$ で振動数はそれぞれ $\Omega = 0.143$ および $\Omega_p = 0.142$ となり, いずれの場合にも振動数はよく一致している.

凹凸を有する流路内流れを不安定にする攪乱波は, 図9(d)-(f) および図10(d)-(f)に見られる空間的な流線分布と進行波的挙動が T-S の性質と同じと見なせることおよび攪乱波の振動数が平板間流れの振動数と一致することから, 凹凸を有する流路に生じる不安定モードは T-S 波であると結論づけることができる. 平行平板間流路では, T-S 波は $Re > 5772$ [26] で増幅されることと比べると, 凹凸のある流路では, かなり小さなレイノルズ数で非定常流が生じることがわかる. ここでは攪乱波の定性的な性質をもとに溝付き流路と平板間流の不安定モードを論じてきたが, さらに詳しく凹凸を有する流路内流れの不安定性を調べるためには定量的な考察が必要となるが, それは今後の課題としたい.

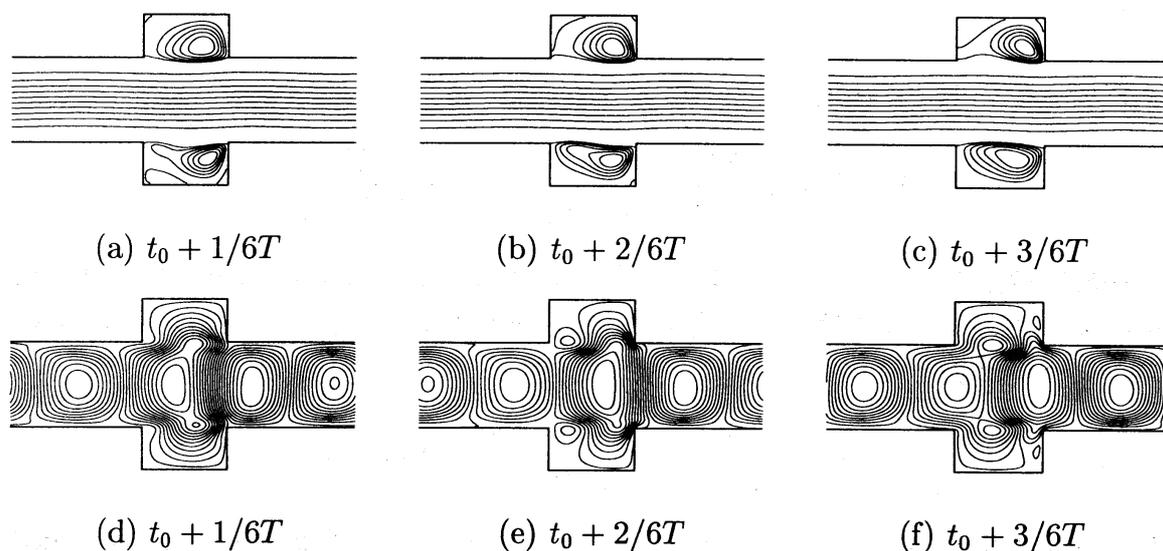


図 9: 流れのパターン ($l/L = 0.25$). (a),(b),(c) は瞬間場の流線. (d),(e),(f) は攪乱場の流線.

4 圧力損失と熱伝達

定常流から非定常流の分岐は溝幅比によって異なる波数を持つトルミン・シュリヒティング波によって生じることがわかった. そこで次に, 非定常流の発生前後で, 圧力損失と熱伝達の特性がどのように変化するかということについて調べる.

圧力損失を次式のように定義する.

$$\Delta p = \frac{(p_i^* - p_o^*)}{\rho^* U^{*2}} = p_i - p_o, \quad (33)$$

ここで, p_i および p_o は流路 1 周期の入り口および出口における平均圧力である. 流れが時間的に振動する場合には, 時間平均値を用いることにする. また, 流路 1 周期の入り口から壁面

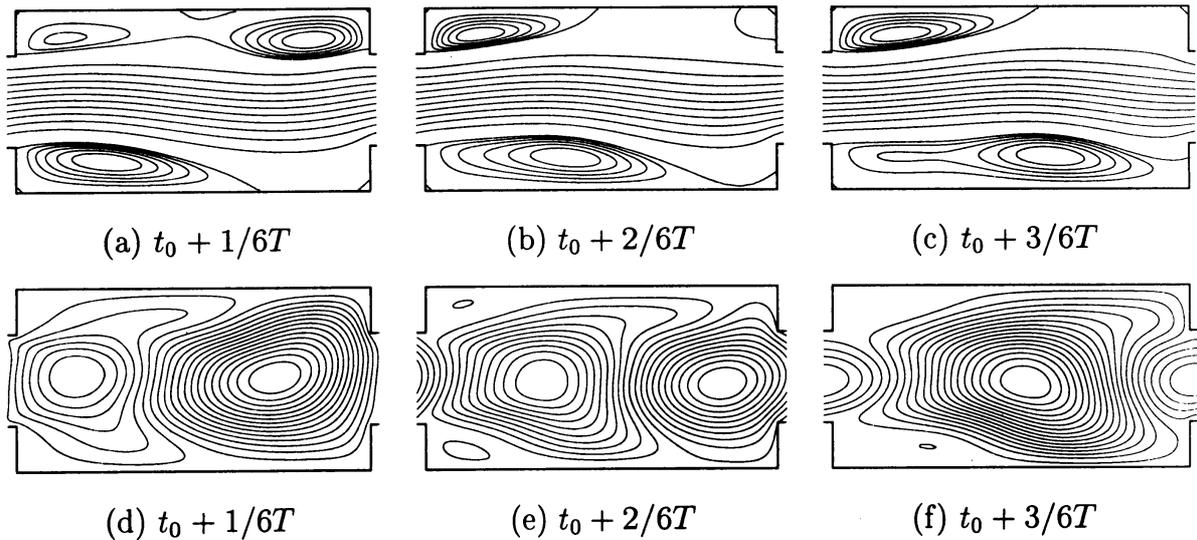


図 10: 流れのパターン ($l/L = 0.95$). (a),(b),(c) は瞬間場の流線. (d),(e),(f) は攪乱場の流線.

に沿った局所ヌセルト数を次式のように定義する.

$$Nu(s) = \frac{4h^*}{T_w^* - T_b^*} \left(\frac{\partial T^*}{\partial n^*} \right)_{w,s} = -\frac{4}{T_b} \left(\frac{\partial T}{\partial n} \right)_{w,s}. \quad (34)$$

ここで、一般座標系として $s(0 \leq s \leq L + 2(a - 1))$ を流路入り口から壁面に沿った座標としてとり、 n を s において壁面に垂直で流体側が正になる向きの座標とする。さらに平均ヌセルト数を次式のように定義する。

$$Nu_m = \frac{1}{L + 2(a - 1)} \int_0^{L+2(a-1)} Nu(s) ds. \quad (35)$$

周期的な凹部を有する流路流れの圧力損失 Δp と幅 $2h^*$ の平行平板間流路の圧力損失 Δp_p の比 $\Delta p/\Delta p_p$ とレイノルズ数の関係を図 11(a) に示す。ここで、平行平板間流路の圧力損失は層流の場合には、平面ポアズイユ流の速度分布 $u = 1 - y^2$, $v = 0$ から、 $\Delta p_p = 2L/Re$ と求められる。図に見られるように、 $Re < Re_c$ においては、平行平板間流路に対する圧力損失の比は 1 以下となり、凹面の存在が圧力損失増大を抑制する効果をもつことがわかる。これは、凹面内部の流れと主流との境界面に存在する自由せん断層で、摩擦応力が減少することに起因すると考えられる。一方、 $Re > Re_c$ においては、レイノルズ数が増加するにともない、圧力損失比は 1 を越えるようになる。このような圧力損失の増加はレイノルズ応力に起因しており、振動の発生がレイノルズ応力の効果を顕著にさせ圧力損失の増大を招くと考えられる [1, 16, 18].

同様に、平均ヌセルト数 Nu_m と、十分発達した平行平板間流路流れの平均ヌセルト数 $Nu_p = 7.54$ [20] との比 Nu_m/Nu_p とレイノルズ数との関係を図 11(b) に示す。図 11(b) に見られるように $Re < Re_c$ において、平均ヌセルト数の比は 1 よりも小さく熱伝達が平行平板流路の場合よりも減少する。この傾向は、溝幅比が大きいほど顕著となる。一方、 $Re > Re_c$ において、流れが振動流になると平均ヌセルト数の比は、急激に増大し始めレイノルズ数が増加するにともない 1 を越えるようになる。これは、振動流の発生とともに、温度境界層が溝角部で著しく薄くなり再形成が活発に行われるためと考えられる [17, 19].

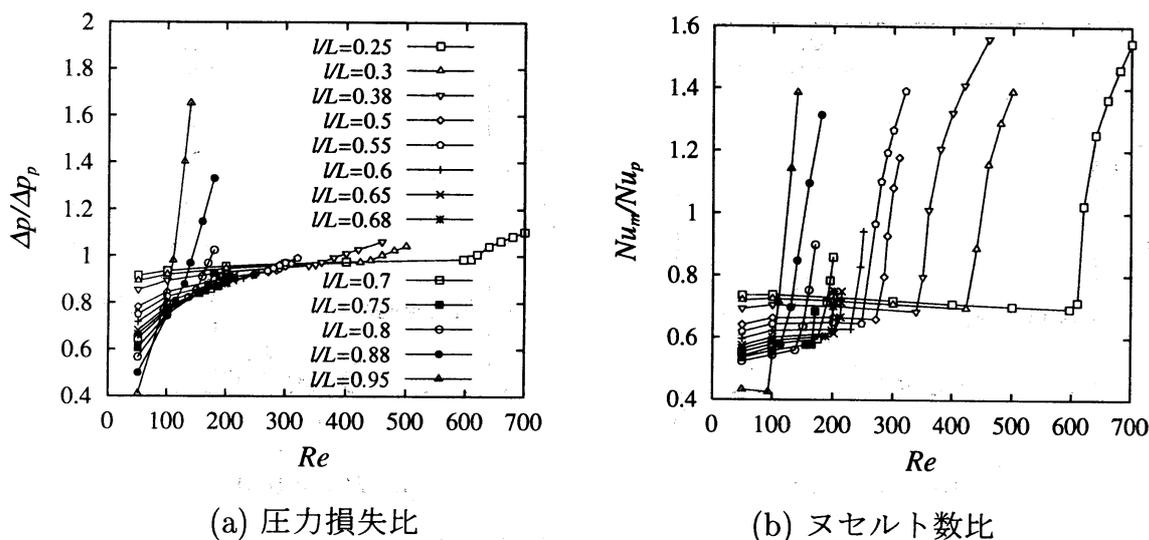


図 11: 圧力損失比とヌセルト数比

圧力損失および熱伝達に関するこれらの特性を詳しく見るために、壁面に沿った局所ヌセルト数比とせん断応力比の分布を $l/L = 0.25$ と $l/L = 0.95$ の場合について図 12 および 13 にそれぞれ示す。流れが定常流の場合 ($Re = 50$) には、ヌセルト数比およびせん断応力比は、平板部分では 1 となり拡大部で値が減少したあと再び 1 に漸近する。したがって、流路 1 周期で平均すると 1 以下の値をとり、平行平板間流路の場合よりも小さな値となる。一方、流れが非定常になると ($Re = 620$ for $l/L = 0.25$ と $Re = 110$ for $l/L = 0.95$)、流れのパターンで見たように溝内部の循環渦が壁面に押しつけられるために、ヌセルト数比、せん断応力比ともに角部で大きな値をとるようになる。特に、ヌセルト数比はせん断応力比よりも角部で大きな値をとり、平板部分でもこの値を保ちつつ再び溝部に到達するために平均的には平行平板間流れよりも大きな値となりかつ圧力損失の増大以上に伝熱が促進されることになる。平板部分におけるこの伝熱促進効果は、溝幅比が小さい場合に顕著で、溝幅が大きい場合には平板部分が短いために圧力損失の増大以上に伝熱が促進される効果が小さくなる。例えば、Wirtz 等 [9, 10] の三角形流路では、角での値は大きくなるのが期待できるが平板部分がないために、平均すると効果が小さくなると思われる。

最後に、非定常流が発生したあとの伝熱促進効率を見るために熱伝達の促進と圧力損失の増大の比として流路効率 η を

$$\eta = \frac{Nu_m/Nu_p}{\Delta p/\Delta p_p} \quad (36)$$

と定義し、横軸を振動流の発生後を表す臨界レイノルズ数からの差に対して描いたものを図 14 に示す。局所ヌセルト数比と壁面せん断応力比の考察で予想されたように、溝幅比が小さい方が大きい場合に比べて、非定常流が生じた後の流路効率が良いことがわかる。

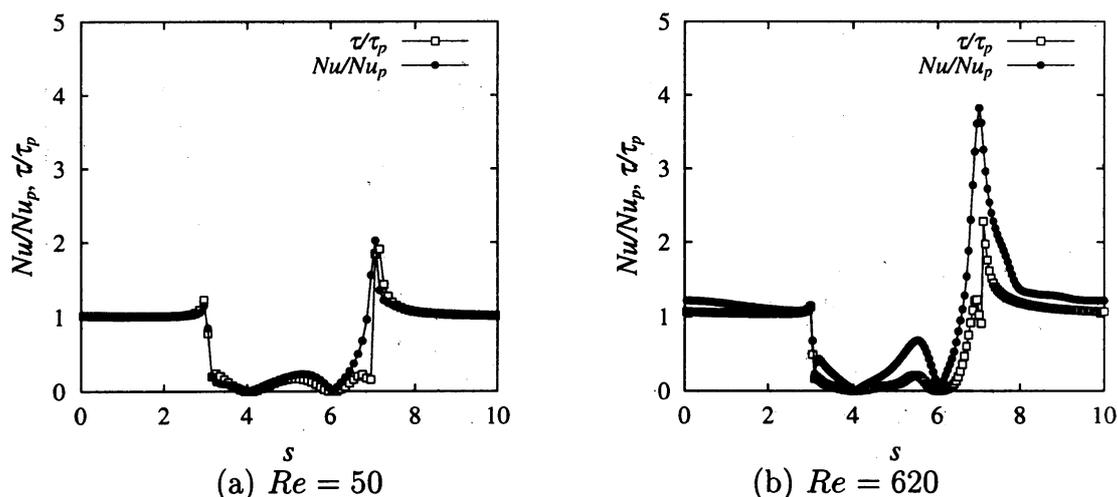


図 12: ヌセルト数比とせん断応力比の壁面分布 ($l/L = 0.25$)

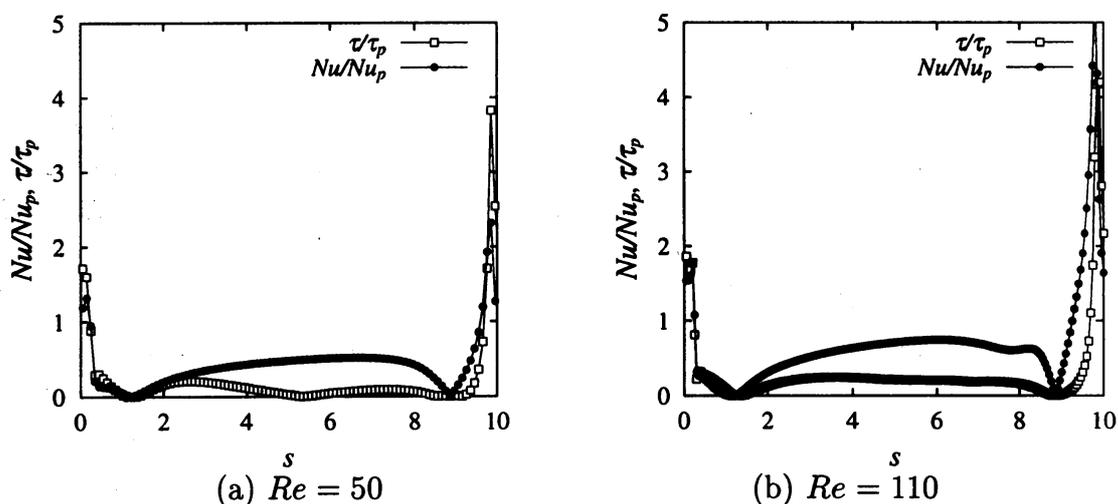


図 13: ヌセルト数比とせん断応力比の壁面分布 ($l/L = 0.95$)

5 まとめ

プレート式熱交換器のモデルとして、平行平板に流れ方向に周期的、かつ中心線に関して対称に凹部（拡大溝）が配置された2次元流路を考え、流れ場と温度場の状態、流体自励振動が発生する臨界レイノルズ数、圧力損失、熱伝達および圧力損失と熱伝達の相関を溝幅比の変化に対して2次元性の仮定のもとで数値的に調べ、以下の結論が得られた。

- 流れが定常流から振動流に分岐する臨界レイノルズ数を、差分法と非線形安定性理論による方法とスペクトル・エレメント法と線形安定性解析による方法の2通りの方法で求め、得られた結果の信頼性を確認した。
- 流れが定常流から振動流に分岐する臨界レイノルズ数 Re_c を溝幅比の変化に対して求め、臨界レイノルズ数を溝形状パラメーターの関数とする無次元式が得られた。

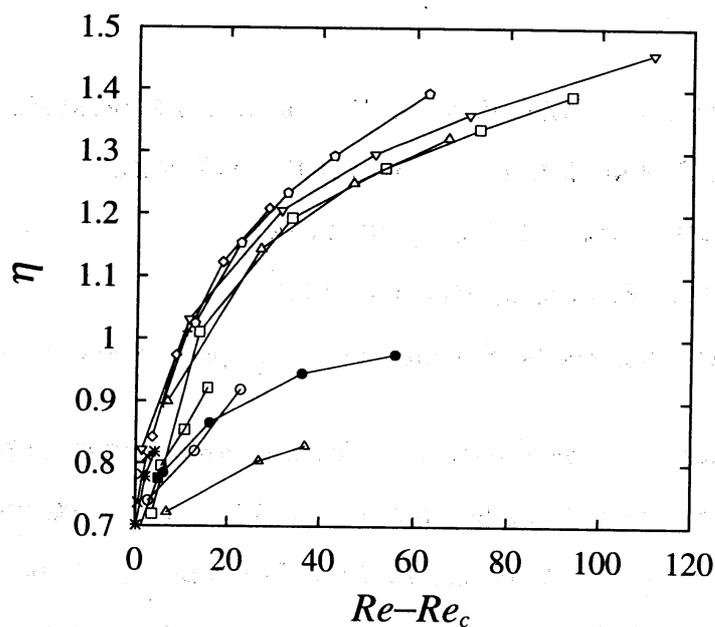


図 14: 流路効率 (図中の記号は図 11(a) のものと同じ)

- 分岐はホップ分岐であり、溝幅比が大きい場合と小さい場合で2つの不安定モードの交替が起こることがわかった。それらの不安定モードは、波数のことなるトルミン・シュリヒティング波であることがわかった。
- 圧力損失、熱伝達およびそれらの相関を、分岐が生じる前後について調べた。溝のない平板部分で伝熱促進効果が認められ、溝幅比が小さい方が大きい場合に比べて平板部分の割合が大きくなるため流路効率が良くなることを示した。

参考文献

- [1] Ghaddar, N.K. Korczak, K.Z. Mikic, B.B. and Patera, A.T., *J.Fluid Mech.* ,**163**(1986), 99-127.
- [2] Pereira, J.C.F. Sousa, J.M.M., *J. Comput. Phys.* ,**106**(1993),19-29.
- [3] 西村龍夫・ほか2名, *機論*, **62**-598, B(1996), 2106-2112.
- [4] 西村龍夫・ほか2名, *機論*, **63**-609, B(1997), 1707-1712.
- [5] T. Nishimura, K. Kunitsugu and H. Nakagiri, *Heat Transfer-Japanese Research*, **27**(1998), 522-534.
- [6] B. Sunden and S. Trollheden, *Int. Comm. Heat Mass Transf.*, **16**(1989)215-225.
- [7] B. Farhanieh, C. Herman and B. Sunden, *Int. J. Heat Mass Transf.*, **36**(1993)1609-17.
- [8] M. Greiner, R. -F. Chen and R. A. Wirtz, *ASME J. Heat Transf.*, vol. 112, pp. 336-341, 1990.
- [9] R. A. Wirtz, F. Huang and M. Greiner, *ASME J. Heat Transf.*, vol. 121, pp. 236-239, 1999.
- [10] M. Greiner, R. J. Faulkner, V. T. Van, H. M. Tufo and P. F. Fischer, *ASME J.Heat Transf.*, vol. 122, pp. 653-660, 2000.
- [11] B. Farhanieh and B. Sunden, *Int. J. Numer. Meth. Heat Fluid Flow*, **1**(1991)143-157.
- [12] Kelkar, K. M. and Patankar, S. V., *ASME J. Heat— Transf.*, **109**(1987), 25-30.
- [13] Roberts, E. P. L., : *J. Fluid Mech.*, **260**(1994), 185.
- [14] K-S. Yang, *AIAA Journal*, **38** (2000), 1173-1178.
- [15] Wang, L. B. and Tao, W. Q., *Int. J. Heat Mass transf.*, **38**(1995), 3053-3063.
- [16] 足立高弘・上原春男, *機論*, **67**-653, B(2001), 2491-2498.
- [17] 足立高弘・上原春男, *機論*, **67**-657, B(2001), 1197-1204.
- [18] T. Adachi and H. Uehara, *JSME Int Journal Series B*, vol.44, pp. 221-230, 2001.
- [19] T. Adachi and H. Uehara, *Int. J. Heat and Mass Transf.*, vol. 44, pp. 4333-4343, 2001.
- [20] R. K. and A. L. London, *Adv. Heat Transfer*, Supplement I, pp. 153-195, 1978.
- [21] S. Kakac, R. K. Shah and W. Aung, *Handbook of Single-Phase Convective Heat Transfer*, §17, A Wiley-Interscience Publication, 1987.
- [22] A. T. Patera, *J. Compt. Phys.*, vol. 54, pp.468-488, 1984.
- [23] G. E. Karnidakis, *Spectral/hp Element Methods for CFD*, Oxford university press, §2, 1999.
- [24] A. J. Baker, *Finite element computational fluid mechanics* \$5, 1985.
- [25] J. N. Reddy, *Int. J. Numer. Methods Fluids*, vol.2, 1982, p151.
- [26] S. A. Orzsag, *J. Fluid Mech.*, Vol. 50, pp.689-703, 1971.
- [27] Drazin P. G. and Reid W. H., *Hydrodynamic Stability*, (1981), §7, Cambridge University Press.