

# 菱形 Navier-Stokes 流の解の分岐と非粘性極限

Sun-Chul Kim

Department of Mathematics, Chung-Ang University  
221 Heukseok-dong, Dongjak-ku, Seoul 156-756 Korea  
and

岡本 久 ( Hisashi Okamoto )

〒 606-8502 京都市左京区北白川追分町京都大学数理解析研究所

## 要旨

非圧縮粘性流体を 2 次元平坦トーラスで考え、その力学系的性質を調べることによって流れの詳しい知見を得ようとする試みは Kolmogorov に始まる。こうした問題のうち、基本となる流れが平行流の場合には多くの研究がなされてきた。本研究では基本流が菱形流の場合に解の分岐を研究する。Reynolds 数が大きいときには内部遷移層が現れ、それがある程度解析できることを報告する。

**Keywords:** incompressible fluid, bifurcation, singular perturbation, interior layer, inviscid limit

## 1 Introduction

2 次元 Navier-Stokes 方程式

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{1}{R} \Delta u - \frac{\partial p}{\partial x} + f_1, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{1}{R} \Delta v - \frac{\partial p}{\partial y} + f_2, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0. \end{aligned}$$

を考える。ここで、 $(u, v), p, R$  は速度ベクトル場、圧力、Reynolds 数を表す。すべての量は無次元化されている。流れの領域は“2次元平坦トーラス”  $\mathbf{T}_\alpha \equiv [-\pi/\alpha, \pi/\alpha] \times [-\pi, \pi]$  とする。平坦トーラスの意味するところは、この長方形領域で  $x$  方向にも  $y$  方向にも周期境界条

件を課して流れを考察するということである。  $\alpha$  をアスペクト比と呼ぶ。  $f_1$  と  $f_2$  は外力の成分である。 こうした記号は [4, 9] で使われたものと同じである

Navier-Stokes 方程式の研究は、数値的にも理論的にも大きな困難を伴う。 Reynolds 数が大きいときには特に大きな困難が生ずる (DiPerna and Majda [1])。 そこで、できるだけ単純な場合に具体的な計算を通じて流れの本質を見いだそうとするのは至極自然のことである。 こうした提言を初めて行ったのが Kolmogorov である (文献 [9] を参照されたい)。 具体的な場合に  $R \rightarrow \infty$  の極限で何が生じているのか、比較的厳密に解析できる例は (Hiemenz や Homann が見つけたような相似変換で 1 次元に帰着される場合を除き) 少ない。 単位円内部の領域では [5, 6] が、2 次元トーラスの平行流では [9, 10] などが具体的な漸近挙動の解析に一部成功しているが、わかっていないことも多い。 本稿で取り扱う例がこれらを補完する役目を果たすのではないかと期待している。

さて、外力が  $(f_1, f_2) = (\frac{1}{R} \sin y, 0)$ , のとき、平行流  $(u, v) = (\sin y, 0)$  が解となる。 これを基本流と呼ぶ。 この基本流の安定性および解の分岐については [4, 9] でくわしく調べられた。 似たような問題は数多く存在する。 たとえば [2] を参照されたい。 Reynolds 数が無限大に近づくと、分岐解がトーラスの一部 (具体的にはある曲線) において有限回しか微分ができなくなり、いわゆる内部遷移層が現れるという事実の発見は特に興味深いものと思われる。 [10, 11] はこの内部遷移層を、特異摂動展開で解析し、数値解との良好な一致を見ている。 しかし、それに対する理解は、完全からはほど遠い。 一方、こういった特異摂動現象が平行流からの分岐解に特有のものなのか、それとももっと普遍性があるのかは全くわかっていない。 そこで、別の外力で内部遷移層があることを確かめよう、と思い立ったのが本研究の動機である。 具体的には [3] で考えられた菱形流を考え、そこからの分岐を考える。 つまり、基本流は

$$\psi = -\cos(\alpha x) - \cos(y), \quad (u, v) = (\psi_y, -\psi_x). \quad (1)$$

で与えられる (ここより以後、下付の添え字は微分を表すものとする)。 Navier-Stokes 方程式を流れ関数を用いて書くと

$$-R\Delta\psi_t + \Delta^2\psi + RJ(\psi, \Delta\psi) = g, \quad (2)$$

となる。 ここで  $\Delta$  は Laplace 作用素  $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$  を表し、 $J$  は次の 2 次形式である：

$$J(p, q) = p_x q_y - p_y q_x,$$

非斉次項  $g$  は (1) が解となるように定める：

$$g = -\alpha^4 \cos(\alpha x) - \cos(y) + R(\alpha^3 - \alpha) \sin \alpha x \sin y. \quad (3)$$

基本流 (1) の流線を図 1 に描いた。

我々の目的はこの基本解から分岐する解を計算し、その  $R \rightarrow \infty$  での漸近挙動を調べることである。 実際に計算を実行してみると、平行流よりも多少複雑な外力を用いているにもかかわらず、その漸近挙動の解析は平行流の場合よりも易しくなることが判明した。

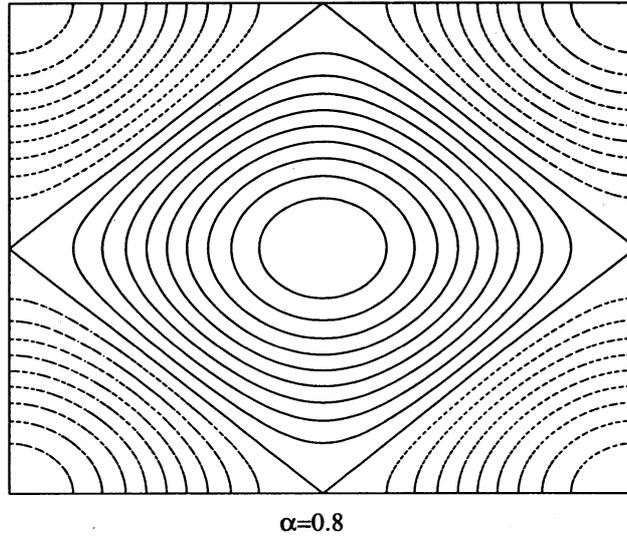


図 1: (1) の等高線,  $\alpha = 0.8$ .  $\psi < 0$  の等高線は実線で,  $\psi > 0$  の等高線は破線で表してある

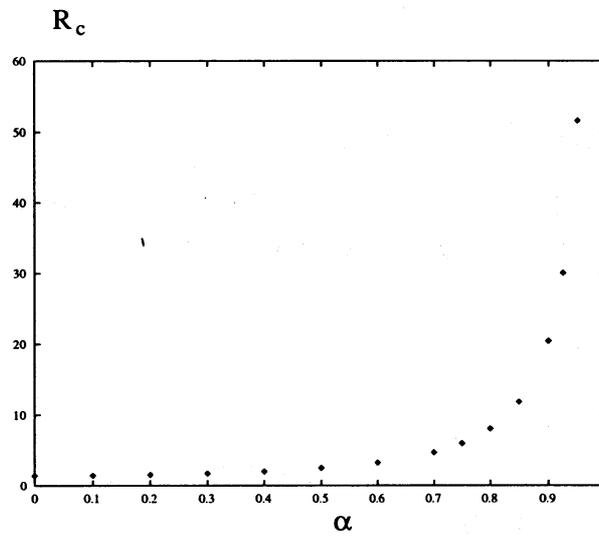


図 2: 臨界 Reynolds 数

## 2 理論的にわかっていること

最初に注意すべきは Marchioro の定理である.

**定理 1**  $\alpha = 1$  のとき, 菱形流 (1) は大域的に安定である. すなわち, 正方形領域では, すべての Reynolds 数とすべての初期値に対して,  $t \rightarrow \infty$  のときに, 非定常解は菱形流 (1) に収束する.

この結果は [8] による. この定理によって,  $\alpha = 1$  のときにはいかなる分岐も起きないことがわかる.

**注意.** 初期値としては,  $\mathbf{T}_\alpha$  で連続かつ  $\mathbf{T}_\alpha$  上の積分がゼロとなるものだけを考える. 従って, たとえば  $\mathbf{u}(x, y) = (\sin(\alpha x/2), 0)$  などは除外されている.

次に, 我々は,  $0 < \alpha < 1$  の場合のみ考えればよいことに注意する. これは次の対称性が存在することによる. 作用素  $S$  を以下のように定義する. これは  $\mathbf{T}_\alpha$  で定義された関数を  $\mathbf{T}_{1/\alpha}$  で定義された関数に移す写像で,

$$(S\phi)(t, x, y) = \phi(\alpha^{-2}t, -y/\alpha, x/\alpha),$$

で定義される. さらに, (3) の  $g$  を  $g_\alpha$  と表して, 汎関数  $F$  を

$$F(\alpha, \phi) = \alpha^{-2} \left\{ -R\Delta\phi_t + \Delta^2\phi + RJ(\phi, \Delta\phi) - g_\alpha \right\}.$$

で定義する. すると

$$S(F(\alpha, \phi)) = \alpha^2 \left\{ -RS(\Delta\phi_t) + \Delta^2(S\phi) + RJ(S\phi, \Delta(S\phi)) - g_{1/\alpha} \right\} = F(\alpha^{-1}, S\phi).$$

が成り立つことがわかる. これにより,  $\mathbf{T}_\alpha$  上の解と  $\mathbf{T}_{1/\alpha}$  上の解が 1 対 1 に対応することがわかる. 特に,  $\alpha$  に対する臨界 Reynolds 数は  $1/\alpha$  に対する臨界 Reynolds 数に等しいことがわかる.

## 3 数値実験

文献 [9] のアルゴリズムとプログラムを本研究でも用いることにする. すなわち, (2) をスペクトル・ガレルキン法で離散化する:

$$\psi = \sum_{m=-M}^M \sum_{n=-N}^N a(m, n) \exp(im\alpha x + iny).$$

[9] と同じく対称な解  $\psi(-x, -y) \equiv \psi(x, y)$  だけを考えることにする.  $0.7 \leq \alpha < 1, 0 < R < 500$  のときには  $M = N = 16$  を用いれば十分な精度の解が得られた. 一方  $\alpha$  がもっと小さいとき, あるいは  $R$  が大きいときには  $M$  あるいは  $N$  を大きくする必要がある.

臨界 Reynolds 数を数値的に計算したところ、図 2 が得られた。臨界 Reynolds 数は  $\alpha$  について単調増大で、 $\alpha \rightarrow 1$  のとき  $\infty$  に近づく。 $\alpha \rightarrow 0$  のとき臨界 Reynolds 数は  $\sqrt{2}$  に収束する。Gotoh and Yamada [3] の結論「菱形流の絶対臨界 Reynolds 数は 1 で、それは波長無限大の極限で実現される」と矛盾するように思えるかも知れないが、これは彼らが安定性の計算においてすべての波長の摂動を考慮に入れているからである。我々は、 $x$  方向については  $2\pi/\alpha$  を整数で割ったものを、 $y$  方向については  $2\pi$  を整数で割ったものだけを許しているのでこうした違いが現れる。(前節の注意も参照されたい。)

$\alpha \rightarrow 0$  のとき臨界 Reynolds 数が  $\sqrt{2}$  に収束することは次のようにして理解することができる： $\alpha \rightarrow 0$  のとき、(3) の  $g$  は  $-\cos(y)$  に収束する。一方、 $g = -\cos(y)$  のときの臨界 Reynolds 数は  $\alpha \rightarrow 0$  のとき  $\sqrt{2}$  に収束することが [4] において証明されている。

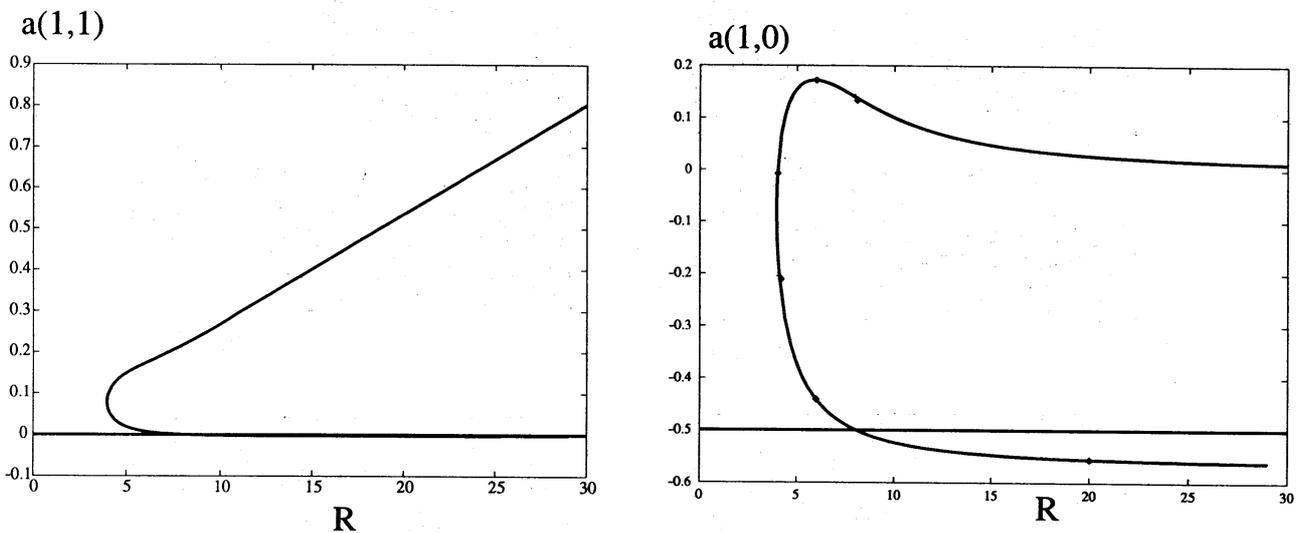


図 3:  $\alpha = 0.8$  のときの分岐図式. Fourier 係数  $a(1,1)$  を左に、 $a(1,0)$  を右に記した.  $M = N = 16$ . 図 4 の解はダイヤモンド印で表してある.

分岐解を  $\alpha = 0.5, 0.7, 0.8, 0.95, 0.97, 0.98$ . で計算してみたところ、次のような事実が判明した。分岐図式を、 $R$  を横軸にとり、Fourier 係数  $a(1,1)$  あるいは  $a(1,0)$  を縦軸にとって描いてみた。 $\alpha = 0.5, 0.7, 0.8$  の場合には大きな違いは見られなかったので、 $\alpha = 0.8$  を図 3 にする。図式は自明な解 (= 基本流) とそれから分岐する解からなっている。分岐は  $R = 8.064\dots$  で起き、遷臨界型 (transcritical) であることがわかった。非自明解の枝は  $R = 3.94$  付近で極限点 (limit point) を持つ。従って  $R \geq 3.94\dots$  なる  $R$  については基本流を含めて 3 個の解が存在する。この構造は  $R$  を大きくしても変わらず、 $R \leq 10000$  まで計算してもそれ以上の分岐は起きなかった。6 個の非自明解を図 4 に描いた。

分岐図式は  $\alpha = 0.5, 0.7, 0.8, 0.95$  については定性的に変わらない。しかし、 $\alpha = 0.97$  や

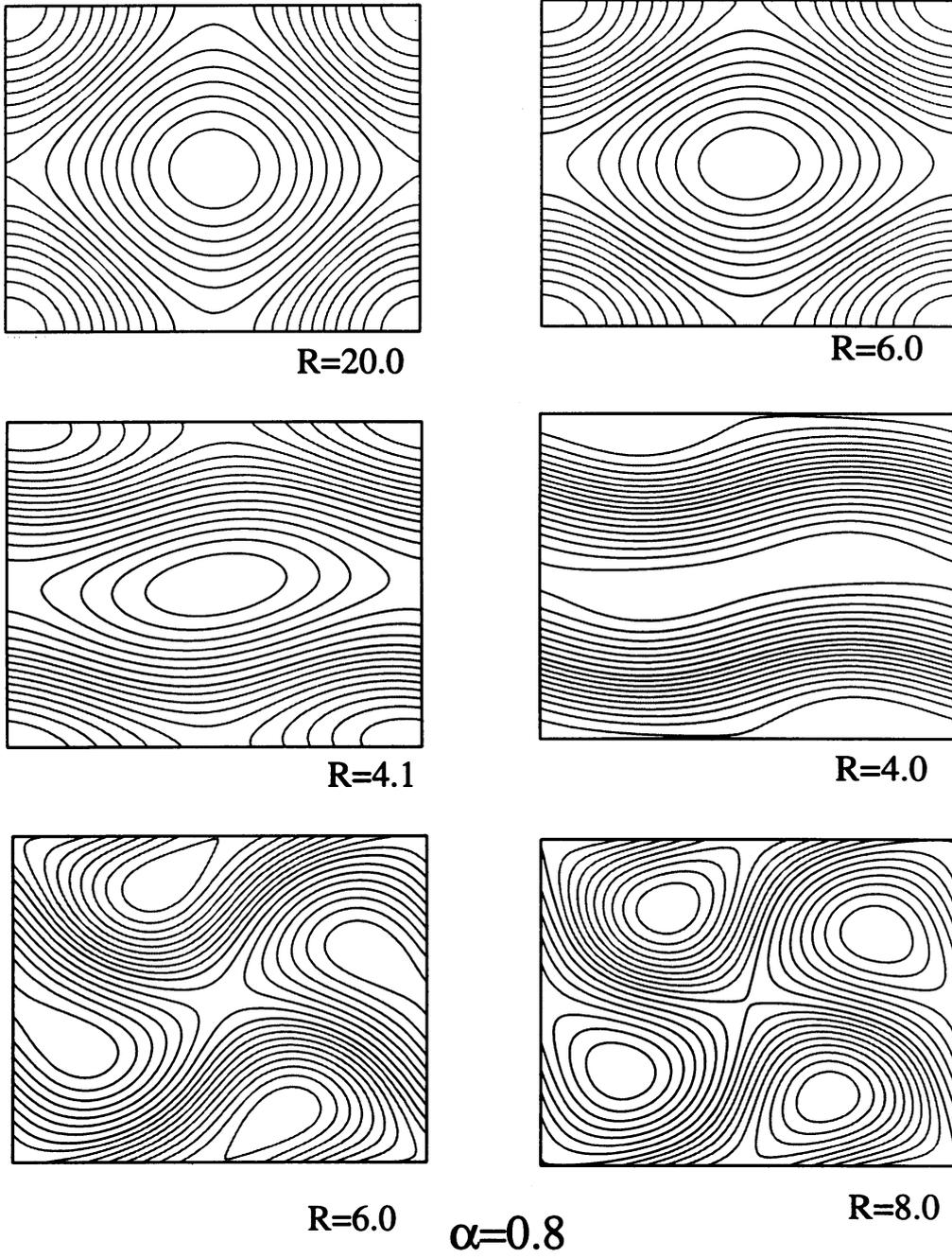


図 4: 非自明解の流線.  $\alpha = 0.8$

$\alpha = 0.98$  では質的な違いが生ずる.  $\alpha = 0.97$  の場合を図 6 に示した.  $\alpha \leq 0.95$  の場合との違いは, 極限点が 3 個あることである.  $\alpha = 0.98$  の場合にはさらに質的な違いが現れる: 分岐図式は不連結になる (図 7).

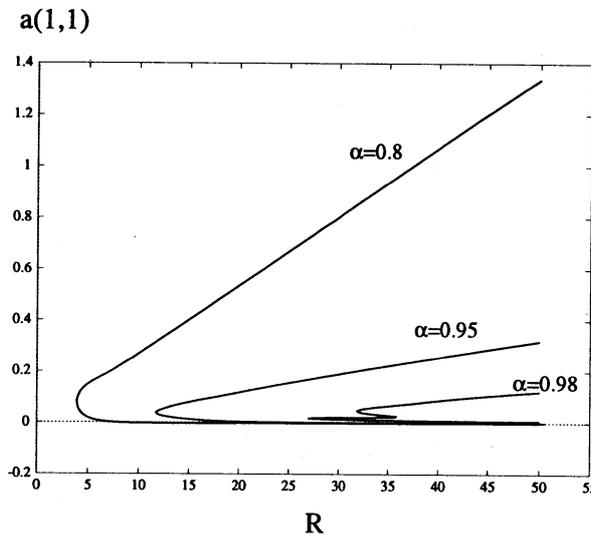


図 5:  $\alpha = 0.8, 0.95, 0.98$  に対する分岐図式.  $M = N = 16$

$\alpha$  が大きくなるときに分岐図式が幾分複雑化するの不思議である. 実際, 新たに現れる解も  $\alpha \rightarrow 1$  のときにすべて消えてしまうのである.  $\alpha = 0.99$  のときには分岐図式は 3 個の連結成分を持っている (図 8). すべての C 型の枝は ( $\alpha \rightarrow 1$  のとき) 細くなり同時に  $R$  の大きい方へ移動する (図 9).  $\alpha \geq 0.999$  のときにはさらに新たな凹みが見える (図 9). こうした分岐図式の分裂が際限なく繰り返されるのかどうかはわからない. 図 10 にはさらに  $\alpha$  が大きな場合の計算結果を示した.

注意. 我々は  $\alpha < 0.5$  の場合にも計算を行った. この場合, より多くの分岐解が基本流から分岐し, 2 次分岐も見いだされた. その一部を図 11 に示す.

#### 4 $R \rightarrow \infty$ のときの漸近挙動

本節では  $R \rightarrow \infty$  のときの分岐解の漸近挙動を解析する. 非自明な解は 2 種類存在するが, 図 3 からわかるように, 一方の解については  $a(1,1)$  が  $R$  にほぼ比例するのに対し, もう一方の解については  $a(1,1)$  はほぼゼロである. このうち  $R$  に比例する解についてはその性質を解明することが可能である. 実際, 数値解を調べてみると  $a(1,1)$  は  $-a(1,-1)$  にほぼ等しく,  $R$  に比例して大きくなるのがわかる. さらに, その他の Fourier 級数は圧倒的に小さ

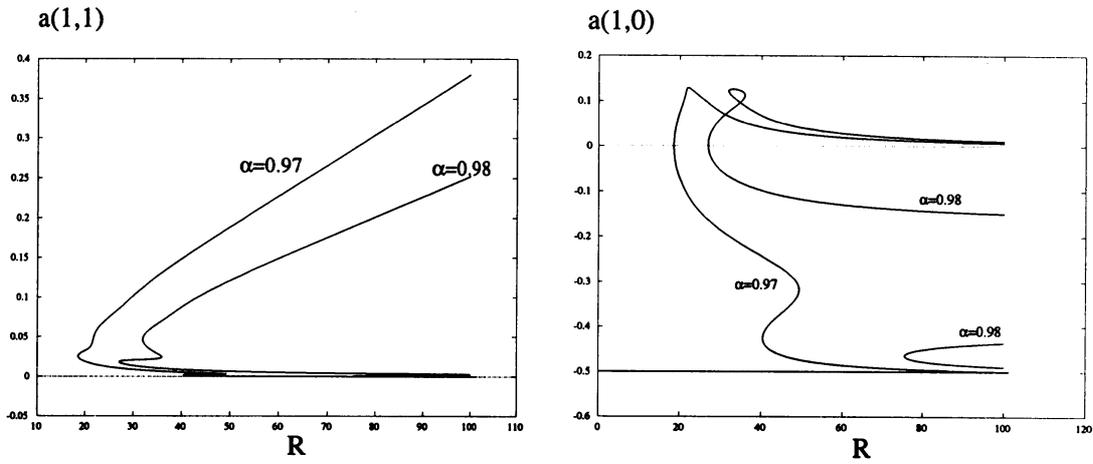


図 6:  $\alpha = 0.97$  と  $0.98$  に対する分岐図式.  $\alpha = 0.98$  のとき図式は不連続.

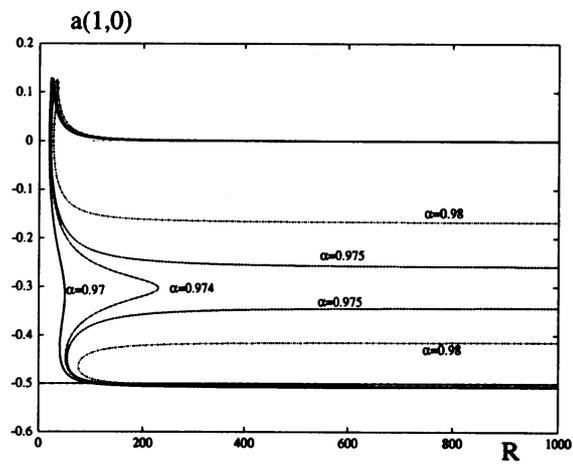


図 7:  $0.97 \leq \alpha \leq 0.98$  の分岐図式.  $R \leq 1000$

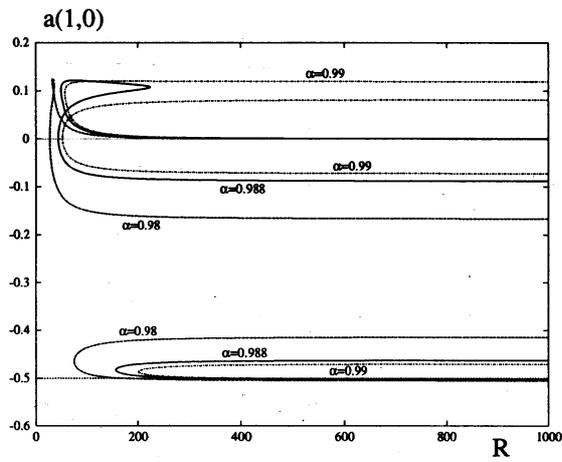


図 8:  $0.98 \leq \alpha \leq 0.99$  のときの分岐図式.  $R \leq 1000$ .  $\alpha = 0.99$  では 3 個の連結成分が存在する.

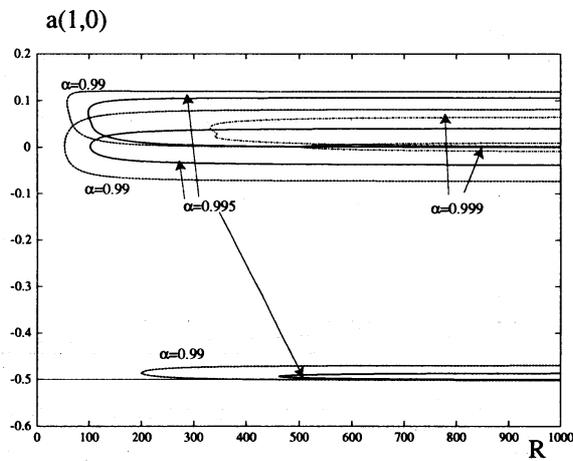


図 9:  $0.99 \leq \alpha \leq 0.999$  のときの分岐図式.  $R \leq 1000$ .

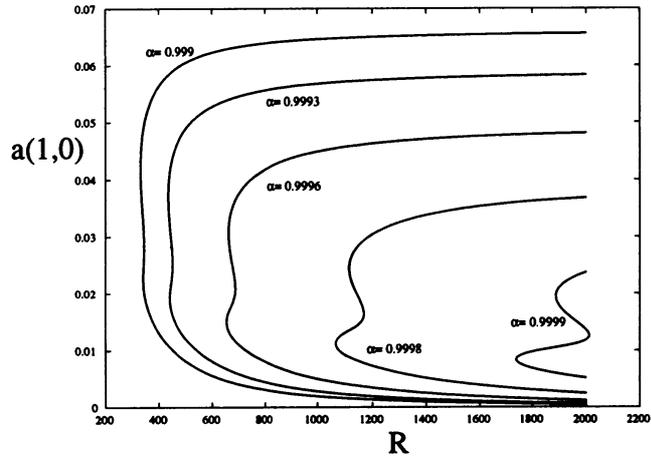


図 10:  $0.999 \leq \alpha$  のときの図式の一部.

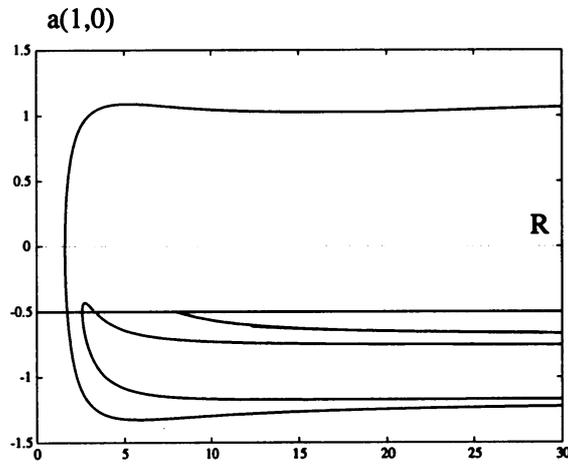


図 11:  $\alpha = 0.3$  のときの分岐図式. 基本流に沿って3個の分岐点が存在する

い. 従って,

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\psi}{R} = \text{constant} \times \sin \alpha x \sin y. \quad (4)$$

が示唆されるのである. 渦度  $-\Delta\psi$  の等高線, つまり等渦度線を  $R = 10000$  の時に描いてみると図 12 の左図となる. これは (4) によく対応している. これに対し, もう一方の解については (4) は成り立たない.

$a(1, 1)$  がほぼゼロの解については  $R \rightarrow \infty$  にわかりやすい漸近形は見いだされないが, 内部遷移層が出現することは確認できる. 等渦度線を描いてみると図 12 の右のようになる. これだけだと滑らかな関数であるかのように見えるが, さらに微分すると内部遷移層が見えてくる.  $(-\Delta)^p \psi(x, \pi/2)$  の等高線を描いてみよう.  $p = 1.5$  のときにはこれらは滑らかに見える. しかし,  $p = 1.95$  のときには図 13 のようになり, 区分的な滑らかさが示唆される.

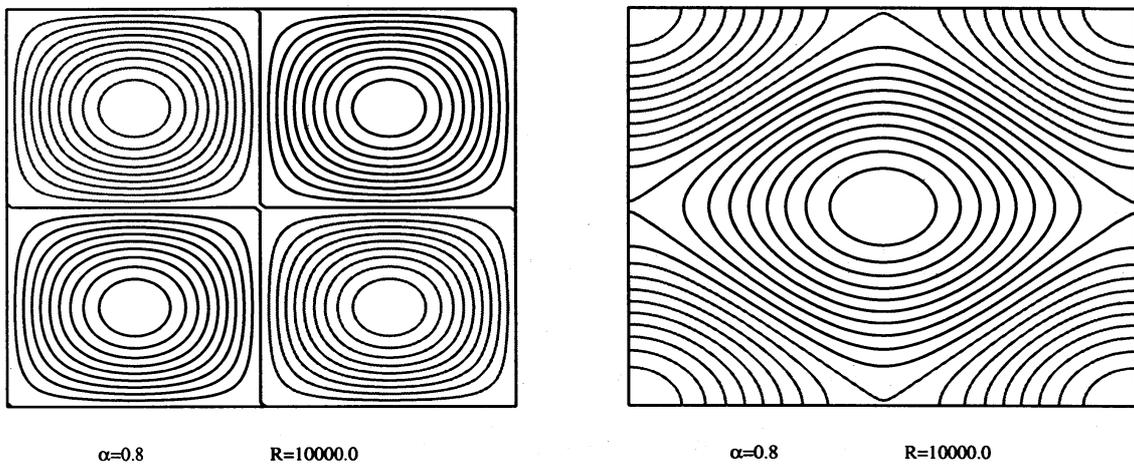


図 12:  $\alpha = 0.8$ ,  $R = 10000$  のときのふたつの非自明解.  $M = N = 24$ .

## 5 $R$ に関する漸近展開

本節では  $a(1, 1)$  が  $R$  にほぼ比例する解に関する漸近展開を考え, その係数の初項が計算できることを示す. 考えるべき方程式は

$$\Delta^2 \psi + RJ(\psi, \Delta\psi) = R(\alpha^3 - \alpha) \sin \alpha x \sin y - \alpha^4 \cos \alpha x - \cos y. \quad (5)$$

である. 数値結果に対応して次の漸近形を仮定する:

$$\psi = AR \sin \alpha x \sin y + \psi^{(0)} + R^{-1} \psi^{(1)} + R^{-2} \psi^{(2)} + \dots, \quad (6)$$

ここで  $A$  は定数である. これを (5) に代入し,  $R$  の各べきの係数を計算する.

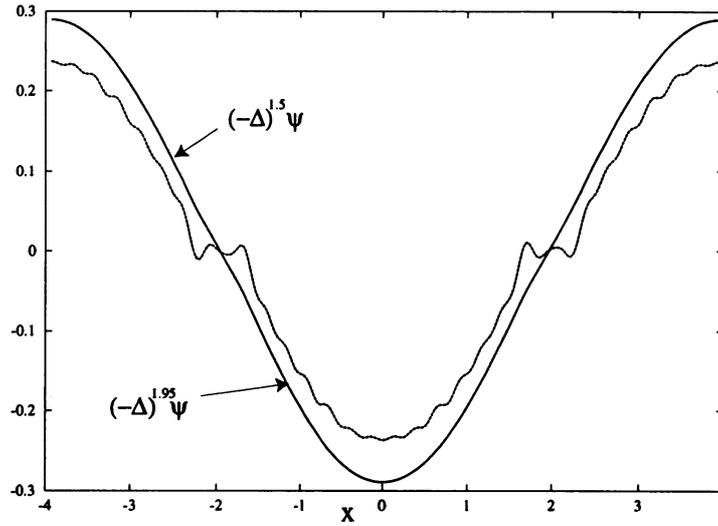


図 13:  $(-\Delta)^p\psi$  の, 対角線  $y = \alpha x, -\pi/\alpha \leq x \leq \pi/\alpha$  におけるグラフ.  $p = 1.5, 1.95$ .  $M = N = 36, \alpha = 0.8, R = 10000$ .

(6) を (5) に代入すると, その結果は  $R^3$  項から始まるが, これはゼロであることがわかる.  $R^2$  項は

$$\begin{aligned} AR^2 \{ J(\sin \alpha x \sin y, \Delta\psi^{(0)}) + J(\psi^{(0)}, \Delta(\sin \alpha x \sin y)) \} \\ = AR^2 J(\sin \alpha x \sin y, \Delta\psi^{(0)} + (\alpha^2 + 1)\psi^{(0)}), \end{aligned} \quad (7)$$

となる. ここで  $J(f, g) = -J(g, f)$  を用いている. これをゼロとおくと,

$$\Delta\psi^{(0)} + (\alpha^2 + 1)\psi^{(0)} = F^{(0)}(\sin \alpha x \sin y), \quad (8)$$

となる関数  $F^{(0)}$  の存在がわかる.

$R$  項から,

$$\begin{aligned} A(\alpha^2 + 1)^2 \sin \alpha x \sin y + J(\psi^{(0)}, \Delta\psi^{(0)}) + \\ AJ(\sin \alpha x \sin y, \Delta\psi^{(1)} + (\alpha^2 + 1)\psi^{(1)}) = (\alpha^3 - \alpha) \sin \alpha x \sin y \end{aligned}$$

を得る. この式に  $\sin \alpha x \sin y$  を乗じて  $\mathbf{T}_\alpha$  で積分すると,

$$\begin{aligned} \int \int_{\mathbf{T}_\alpha} J(\psi^{(0)}, \Delta\psi^{(0)}) \sin \alpha x \sin y dx dy &= \int \int_{\mathbf{T}_\alpha} J(\sin \alpha x \sin y, \psi^{(0)}) \Delta\psi^{(0)} \\ &= \int \int_{\mathbf{T}_\alpha} J(\sin \alpha x \sin y, \psi^{(0)}) \{ F^{(0)}(\sin \alpha x \sin y) - (\alpha^2 + 1)\psi^{(0)} \} \end{aligned}$$

$$= \int \int_{\mathbf{T}_\alpha} J(F^{(0)}(\sin \alpha x \sin y), \sin \alpha x \sin y) \psi^{(0)} dx dy \\ - (\alpha^2 + 1) \int \int_{\mathbf{T}_\alpha} J(\psi^{(0)}, \psi^{(0)}) \sin \alpha x \sin y dx dy = 0.$$

を得る. 同様に,

$$\int \int J(\sin \alpha x \sin y, \Delta \psi^{(1)} + (\alpha^2 + 1) \psi^{(1)}) \sin \alpha x \sin y dx dy = 0.$$

となるので,

$$A(\alpha^2 + 1)^2 \int \int \sin^2 \alpha x \sin^2 y dx dy = (\alpha^3 - \alpha) \int \int \sin^2 \alpha x \sin^2 y dx dy,$$

が得られる. すなわち,

$$A = \frac{\alpha^3 - \alpha}{(\alpha^2 + 1)^2} \quad (9)$$

となって, 初項の係数が決定できた.  $\psi^{(0)}$  も決定できるし, この操作を続けると面白い現象が現れるのであるが, ここでは省略する. [7] を参照していただきたい.

理論値 (9) と数値解から得たデータを比較すると図 14 となり, 極めてよい一致であると言えるであろう.

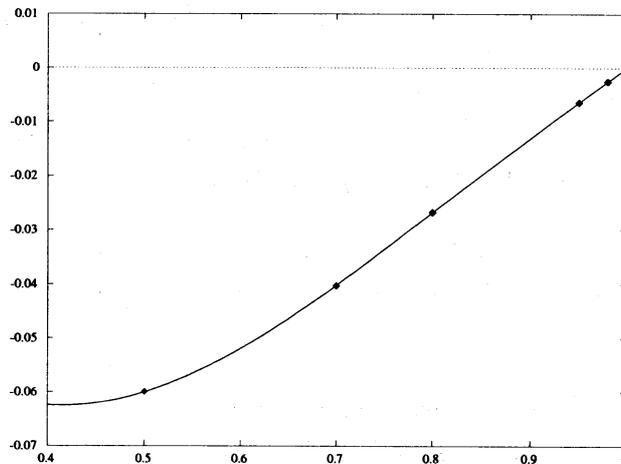


図 14: 理論値 (9) と数値データの比較. ダイヤモンド印が数値データ.  $R = 10000$ .

謝辞. The first author was supported by grant 2000-2-101-001-3 from the Basic Research Program of the Korea Science and Engineering Foundation and the second author was partly supported by the Grant-in-Aid for Scientific Research from JSPS # 11304005 .

## 参考文献

- [1] R. J. DiPerna and A. J. Majda, Concentrations in regularizations for 2-D incompressible flow, *Comm. Pure Appl. Math.*, vol. 40 (1987), pp. 301–345.
- [2] H. Fukuta and Y. Murakami, Nonlinear stability of Kolmogorov flow with bottom-friction using the energy method, *J. Phys. Soc. Japan*, vol. 64 (1995), pp. 3725–3739.
- [3] K. Gotoh and M. Yamada, The instability of rhombic cell flows, *Fluid Dynam. Res.*, vol. 1 (1986), pp. 165–176.
- [4] V. I. Iudovich, Example of the generation of a secondary stationary or periodic flow when there is loss of stability of the laminar flow of a viscous incompressible fluid, *J. Appl. Math. Mech.*, vol. 29 (1965), pp. 527–544.
- [5] S.-C. Kim, On Prandtl-Batchelor theory of a cylindrical eddy: Asymptotic study, *SIAM J. Appl. Math.*, vol. 58 (1998), pp. 1394–1413.
- [6] S.-C. Kim, On Prandtl-Batchelor theory of a cylindrical eddy: Existence and uniqueness, *Z. Angew. Math. Phys.*, vol. 51 (2000), pp. 674–686.
- [7] S.-C. Kim and H. Okamoto, Bifurcations and inviscid limit of rhombic Navier-Stokes flows in tori, preprint.
- [8] C. Marchioro, An example of absence of turbulence for any Reynolds number, *Commun. Math. Phys.*, vol. 105 (1986), pp. 99–106.
- [9] H. Okamoto and M. Shōji, Bifurcation diagrams in Kolmogorov’s problem of viscous incompressible fluid on 2-D Tori, *Japan J. Indus. Appl. Math.*, vol. 10 (1993), pp. 191–218.
- [10] H. Okamoto, Nearly singular two-dimensional Kolmogorov flows for large Reynolds number, *J. Dynamics and Diff. Eqns.*, vol. 8 (1996), pp. 203–220.
- [11] H. Okamoto, A study of bifurcation of Kolmogorov flows with an emphasis on the singular limit, *Proc. Int. Congress Math.*, vol. III, (1998), pp. 523–532.
- [12] M. Yamada, Nonlinear stability theory of spatially periodic parallel flows, *J. Phys. Soc. Japan*, vol. 55 (1986), pp. 3073–3079.