数理解析研究所講究録 1236 巻 2001 年 1-8

On Special Lagrangian submanifolds

上智大学　　宮岡礼子 (Reiko Miyaoka)

Sophia University

極小曲面論や，極小部分多様体論，そして可積分系理論に関わったことのある人なら誰しも Harvey-Lawson の calibrated geometry に興味を持つことだろう．ケーラー多様体の複素部分多様体が，同じホモロジー類の中で最小体積部分多様体であることは，Wirtinger の定理としてよく知られている．1982 年，これはある symplectic 多様体の special Lagrangian 部分多様体という概念に一般化された．special Lagrangian geometry は Calabi-Yau 多様体上に存在し， special Lagrangian 部分多様体のモデュライ空間論はミラー対称性と関わり，重要である．

ここでは $\mathbb{C}^n$ の special Lagrangian 部分多様体の例をいろいろ考えるため， Harvey-Lawson が与えた $\mathbb{R}^n$ の austere とよばれる部分多様体の normal 束として得られる special Lagrangian cone に注目し，その例に言及する．体積最小性から，これらはもちろん，Hamiltonian stationary な極小部分多様体にもなっている．

極小等径超曲面とその焦部分多様体は compact austere 部分多様体 であることから，無限個の等質，及び非等質な special Lagrangian cone が得られることは既に報告した [M]．さらに，極小等径部分多様体，等焦部分多様体とよばれるものからも多くの special Lagrangian cone を得る．

ここでは Bryant による 3 次元 austere 多様体の局所分類 [1] について述べ，cone より広い概念である twisted cone として得られる special

Lagrangian 部分多様体に言及する．また，Bernstein 問題の余次元の高い場合への拡張として，最近得られた Jost-Xin [JX] の結果も紹介する．

1 Calibrated geometry

定義. リーマン多様体 X 上の閉 p 形式 φ が，任意の向き付けられた X の接 p 平面 ξ に対して

$$\varphi_\xi \leq \mathrm{vol}_\xi \tag{1}$$

をみたすとき，(X,φ) を **calibrated manifold** という．

定義. calibrated manifold (X,φ) の部分多様体 M が

$$\varphi|_M = \mathrm{vol}|_M \tag{2}$$

をみたすとき，M を φ manifold という．

Lemma 1.1 M : φ manifold は同じホモロジー類のなかで体積最小である．

(次節参照)

例. (X,ω) : Kähler 多様体とするとき，(X,ω^p) は calibration を与え，p 次元複素部分多様体 M は φ manifold.

2 Special Lagrangian submanifolds

$\mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^n \cong \mathbb{C}^n$ の自然な複素構造を J，ケーラー形式を $\omega = \frac{\sqrt{-1}}{2}\sum dz_j \wedge d\bar{z}_j$ とする．$(\mathbb{C}^n,\omega)$ は symplectic 多様体である．

定義. $\mathbb{C}^n$ の Lagrangian 部分多様体 M が同時に極小部分多様体のとき，M を **special Lagrangian 部分多様体**という．

注意. オリジナルな定義は Theorem 2.2 に述べられる同値条件で与えられている.

向き付けられた実 n 平面 $\zeta \subset \mathbb{C}^n$ が **special Lagrangian** とは, Lagrangian であり, かつ $\zeta_0 = \mathbb{R}^n = \{(x,0)\} \subset \mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^n$ に対して, $SU(n)$ の元 A が存在して $\zeta = A\zeta_0$ となることである.

Theorem 2.1 [3] *$\alpha = \Re dz = \Re dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_n$ は comass one, すなわち $\alpha(\zeta) \le |\zeta|$ で, 等号は ζ が special Lagrangian の時に限る.*

多様体上の comass one の閉 n 次形式を **special Lagrangian caribration** という. $\alpha = \Re dz$ は $\mathbb{C}^n$ 上の special Lagrangian caribration である.

Theorem 2.2 [3] *$\mathbb{C}^n$ の向き付けられた n 次元部分多様体 M が special Lagrangian $\Leftrightarrow$ すべての接空間 T_pM が special Lagrangian*

このときおなじホモロジー類の中で M が体積最小であることは次のようにしてすぐに分かる. M, M' が $\partial M = \partial M'$ をみたし, $H_n(M,\mathbb{R})$ において $[M - M'] = 0$ であるとき $\alpha(T_pM) = |T_pM| = 1$, $d\alpha = 0$ および $\alpha(T_pM') \le |T_pM'|$ を用いて

$$\mathrm{vol}(M) = \int_M \alpha = \int_{M'} \alpha \le \mathrm{vol}(M').$$

注意.

(1) Special Lagrangian calibration は Calabi-Yau 多様体の上に存在することが知られている. 実際, X を canonical bundle が自明な Kähler 多様体とし, Ω を nowhere-vanishing な正則 n 微分とする. 適当に共形変形して, $|\Omega| = 1$ としてよい. このとき, $\alpha_\theta = \Re(e^{i\theta}\Omega)$ とおくと, comass one, すなわち special Lagrangian calibration の S^1 族を得る. $\mathbb{C}P^n$ の次数 $n+1$ の超曲面は Calabi-Yau であるが, 特に $\mathbb{C}P^4$ の 5 次超曲面は T^3 fibration をもち, その双対 fibration がミラー対称性と関係する. 一般に

ファイバー T^3 は特異点をもち，special Lagrangian tori のモデュライのコンパクト化が重要である [2].

さて以下では $\mathbb{C}^n$ のみをあつかう.

(2) $\mathbb{C}^n$ の Lagrangian 部分多様体は，局所的にはある potential 関数 $F: U \to \mathbb{R}$ を用いて，その勾配ベクトル ∇F のグラフ $\Gamma_F = \{(x, \nabla F(x))\} \subset \mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^n$ として表される．ここに U は $\mathbb{R}^n$ の単連結開領域である．このとき

M が special Lagrangian $\Leftrightarrow$

$$(*) \qquad \sum_{k=0}^{[(n-1)/2]} (-1)^k \sigma_{2k+1}(\text{Hess F}) = 0.$$

すなわち，Hess F は固有値を正負の対でもつ.

(3) (*) の C^2 解は，Γ_F が体積最小より，C^ω 級となる（Morrey).

(4) (*) の線形化は楕円型で，特に Dirichlet 問題は任意の解の C^2 近傍で解ける．$F \equiv 0$ は解だから解は非常にたくさんある.

3 Austere 部分多様体 と special Lagrangian cone

定義. リーマン多様体の部分多様体 M が **austere** $\Leftrightarrow$ M の任意の法方向の第2基本形式の固有値のつくる奇数次の基本対称式は恒等的に 0，すなわち M の任意の型作用素は固有値を正負の対でもつ.

austere 部分多様体は必然的に極小部分多様体である．$n = 2$ のときはもちろん逆も正しい．球面 S^{n-1} の部分多様体 M が austere であるのはそのコーン CM が $\mathbb{R}^n$ の austere 部分多様体であるときに限る.

Theorem 3.1 [3] M を多様体 X の部分多様体とするとき，M の *conormal* 束

$$N^*M = \{(x, \xi) \in T_x^*X \mid x \in M, \xi(T_xM) = 0\}$$

は T^*X に自然にはいる *symplectic* 構造に対する *Lagrangian* 部分多様体である．特に

（1） $X = \mathbb{R}^n$ のとき，

$$NM = \{(x, \nu(x)) \in \mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^n \mid x \in M, \nu(x) \in N_xM\}$$

は $\mathbb{C}^n = \mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^n$ の *Lagrangian* 部分多様体で，これが *special* $\Leftrightarrow$ M は *austere*.

（2） M を S^{n-1} の *austere* 部分多様体 とすると

$$CNM = \{(tx, s\nu(x)) \in \mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^n \mid x \in M, \nu(x) \in N_xM, t, s \in \mathbb{R}\}$$

は $\mathbb{C}^n$ の n 次元 *special Lagrangian cone.*

4 Bryant による 3 次元 austere 部分多様体の分類

このように，austere 部分多様体は special Lagrangian geometry において，重要な役割をする．Bryant は $\mathbb{R}^n$ の austere 部分多様体の分類を考えた．部分多様体 $f : M^p \to \mathbb{R}^{p+r}$ と $x \in M$ に対し，法方向 ν に対する第 2 基本形式は対称 2 次形式であるから，T_xM 上の 2 次関数を定義していると思える．第 2 基本形式は法方向に対して線形に定まるので，$A_x \subset S^2(T_xM)$ をそれらが張る部分空間と定義する．

定義． 内積をもつ実ベクトル空間 V 上の 2 次関数のつくる空間 $S_2(V^*)$ の部分空間 Q が austere $\Leftrightarrow$ Q の各要素の固有値の奇数次基本対称式 $= 0$.

$n = 3$ のとき，austere 部分空間 Q は次の 4 つのタイプに分類される．$\mathbb{R}^3$ の直交座標を x_1, x_2, x_3 とするとき， Q は次の 1 〜 4 いずれかの，2 次関数の張る空間の $O(3)$ 共役元でえられる．

1. $A_0 = (0)$
2. $A_1 = (x_1^2 - x_2^2)$

3. $A_2 = (x_1^2 - x_2^2, 2x_1x_2)$
4. $A_2' = (x_1x_2, x_1x_3)$

3 次元 austere 部分多様体 M の第 2 基本形式は，上の 4 つの型のただひとつに属する．これは M は極小部分多様体なので解析的であり，M のある開集合上で第 2 基本形式の型がきまれば，M の稠密開集合上で第 2 基本形式はこの型になるからである．そこで，3 次元 Austere 部分多様体 M も対応する 4 つの型に分類される．すなわち

1. M はアフィン部分空間（全測地的）

2,3. Gauss 写像が退化する Twisted cone

4. $\mathbb{R}^5$ の generalized helicoid $f : U \to \mathbb{R}^5$，ここに $U \in \mathbb{R}^3$ を適当な開集合として

$$f(x) = (\lambda_0 x_0, x_1 \cos(\lambda_1 x_0), x_1 \sin(\lambda_1 x_0), x_2 \cos(\lambda_1 x_0), x_2 \sin(\lambda_1 x_0)).$$

さて，2,3 の Twisted cone は次のようにして与えられる．$u : \Sigma \to S^{2+r}$ を極小曲面とすると u は

$$d * du = -2\phi u$$

をみたす．ここに ϕ は Σ の面積要素．b を

$$d * db = -2\phi b$$

をみたす M 上の関数とする．$\beta = u * db - b * du$ できまるベクトル値 1 形式とする．これは閉形式であることがただちにわかるので，M 上のベクトル値関数 v で，$dv = \beta$ となるものが存在する．このとき

$$f = v + tu : M \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{3+r}$$

は 3 次元 austere 部分多様体となる．$v = 0$ のときは通常の cone であることから，これを Twisted cone という．したがってこの conormal 束も special Lagrangian cone を与える．

5 Generalised Bernstein Problem

Bernstein 問題：$\mathbb{R}^n$ の完備な極小グラフで与えられる超曲面は超平面か？

$n \leq 7$ では正しい（De Giorgi, Almgren, Simons）が，$n > 7$ では反例がある（Bombieri-De Giorgi-Giusti）．

Bernstein 問題の一般化 (Jost-Xin (99,01)) $\Gamma_F = \{(x, \nabla F(x)) \in \mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^n\}$ が special Lagrangian，したがって体積を最小にしているとき，これが n 次元アファイン空間となるのはいつか？

動機付けは，上でも述べたミラー対称性に現れる special Lagrangian torus fibration の fiber が一般に特異点をもつことから，この特異点の構造を調べることの重要性にある．

Theorem 5.1 [4] Γ_F が超平面 $\Leftrightarrow$ ある $\beta < \infty$ に対して

$$\{\det(I + (\mathrm{Hess}(F))^2)\}^{1/2} \leq \beta$$

証明では一般化されたガウス写像 $G : M \to Gr^+(n, 2n)$ の像が，Lagrangian Grassmann という全測地的部分空間の "凸集合" におさまるなら，定値写像になるという，極小曲面のガウス写像の値分布論を一般化した議論を行っている．

6 Remarks

1．austere 部分多様体の局所分類は $n \geq 4$ では大変煩雑になる．austere 超曲面に限ると，主曲率の重複度が 2 以上では主曲率分布の積分多様体は球面になり，すべての主曲率の重複度が 2 以上ならば，これは Dupin 超曲面で，コンパクトなものはおそらく極小等径超曲面のみであろう（予想）．

重複度1の主曲率を持つ場合はかなり複雑になるので，コンパクト超曲面の場合の考察から始めるべきであろう．
2. special Lagrangian graph の Gauss 写像の考察は重要と思われる．これは Gras smann 多様体 $G(n,2n)$ への調和写像を与えており，特に像はある全測地的部分空間 Lagrangian Grassmann にはいる．$\mathbb{C}^3 = \mathbb{R}^6$ の special Lagrangian graph については Lewy による興味深い結果がある [5].

References

[1] R. Bryant, *Some Remarks on the Geometry of Austere Manifolds*, Boletim da Sociedade Brasileira de Matematica (Nova Sie) **21** (1991) 133-157.

[2] M. Gross and P. M. H. Wilson, *Mirror symmetry via 3-tori for a class of Calabi-Yau threefolds*, Math. Ann. **309** (1997) 505-531

[3] R. Harvey and H. B. Lawson, *Calibrated Geometries*, Acta. Math. **148** (1982) 47-157.

[4] J. Jost and Y. L. Xin *A Bernstein theorem for special lagrangian graphs* preprint no.4 MPI (2001)

[5] H. Lewy, *On the non-vanishing of the Jacobian of a homeomorphism by harmonic gradients*, Ann. of Math. **88** (1968) 518-529

[6] R. Miyaoka, **等径超曲面今昔**, **数理研講究録** (2001)

Reiko MIYAOKA,
Department of Mathematics,
Sophia University
Kioi-cho, Chiyoda-ku, 102-8554 Tokyo, JAPAN
E-mail Address: r-miyaok@hoffman.cc.sophia.ac.jp